Wprowadzenie do teorii grup krystalograficznych

Andrzej Szczepański

Spis treści

Niech $\mathbb{R}^n$ będzie przestrzenią euklidesową. Dyskretną podgrupę Γ grupy izometrii $Izom(\mathbb{R}^n) = E(n) = O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ o zwartym obszarze fundamentalnym nazywamy *grupą krystalograficzną.* Z twierdzeń Bieberbacha podgrupa translacji grupy Γ jest podgrupą normalną o skończonym indeksie. Innymi słowy, istnieje krótki ciąg dokładny grup

$$1 \to \mathbb{Z}^n \to \Gamma \to G \to 1,$$

ze skończoną grupą G.

W poniższym tekście opisano, w sposób maksymalnie zwięzły, własności *grup krystalograficznych.* Wykorzystano do tego celu teorię reprezentacji i kohomologii grup skończonych. Jeżeli Γ jest beztorsyjna, to jest grupą podstawową rozmaitości $M^n = \mathbb{R}^n/\Gamma$. Okazuje się, że M^n jest rozmaitością Riemanna o krzywiźnie sekcyjnej zero, tak zwaną rozmaitością płaską. W pracy opisano wiele interesujących związków pomiędzy własnościami Γ i M^n.

W pierwszych dwóch rozdziałach wprowadzono podstawowe pojęcia oraz dowiedziono twierdzeń Bieberbacha. W następnych omówiono, najważniejsze według autora, rezultaty z ostatnich lat. Wiele wątków, jak na przykład związki z geometrią algebraiczną, nie zostało podjętych i autor ma nadzieję na rozszerzenie niniejszego opracowania w przyszłości.

Przedstawiany tekst jest zapisem rocznego wykładu * monograficznego, jaki autor prowadził na Uniwersytecie Gdańskim w roku akademickim 2004 i 2005. Słuchaczami byli studenci czwartego i piątego roku matematyki. Do zrozumienia materiału wystarczy podstawowa znajomość algebry i topologii z pierwszych lat studiów matematycznych. Pomocne powinny okazać się zamieszczone ćwiczenia, choć niektóre są trudne.

Autor bardzo dziękuje Panu prof. Czesławowi Bagińskiemu za bardzo wnikliwą recenzję. Dzięki niej uniknął wielu błędów merytorycznych i tekst został dużo lepiej zaprezentowany. Dziękuje ponadto Pani dr Aleksandrze Nowel i Pani redaktor Dorocie Zgaińskiej za przeczytanie maszynopisu i zrobienie licznych uwag.

*Część pracy była wykonana w czasie pobytu w IHES we Francji i dofinansowana przez Euro-Programme 2 (RITA-CT-2004-505493).

1. Pojęcia wstępne

Niech $\mathbb{R}^n$ oznacza n-wymiarową przestrzeń euklidesową ze standardowym iloczynem skalarnym zdefiniowanym wzorem

$$\langle x, y \rangle = \Sigma_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

gdzie $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ i $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Iloczyn ten pozwala zdefiniować normę wektorów

$$\| x \| = \sqrt{\langle x, y \rangle} = \sqrt{\Sigma_{i=1}^{n} x_i^2}$$

i naturalną metrykę

$$d(x, y) = \| x - y \| = \sqrt{\Sigma_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Definicja 1.1 Odwzorowanie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nazywamy izometrią, jeżeli dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}^n$ mamy

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)).$$

Poniższe stwierdzenie jest bezpośrednią konsekwencją definicji i jego dowód zostawiamy czytelnikowi.

Stwierdzenie 1.1 *Zbiór wszystkich izometrii przestrzeni $\mathbb{R}^n$ wraz z operacją składania przekształceń jest grupą.*

$\square$

Grupę wszystkich izometrii przestrzeni $\mathbb{R}^n$ będziemy oznaczać symbolem $E(n)$. W celu opisu jej podstawowych własności przypomnijmy definicje dwóch typów przekształceń: translacji i przekształcenia ortogonalnego.

Definicja 1.2 Niech a będzie ustalonym elementem przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Translacją przestrzeni $\mathbb{R}^n$ o element a nazywamy przekształcenie $t_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ określone wzorem

$$t_a(x) = a + x.$$

Stwierdzenie 1.2 *Zbiór wszystkich translacji przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest podgrupą normalną grupy $E(n)$. Przyporządkowanie $a \to t_a$ jest izomorfizmem addytywnej grupy $\mathbb{R}^n$ na grupę wszystkich translacji przestrzeni $\mathbb{R}^n$.*

□

Grupę wszystkich translacji przestrzeni $\mathbb{R}^n$ będziemy oznaczać symbolem $\mathbb{R}^n$.

Definicja 1.3 Przekształcenie liniowe A przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}^n$ nazywamy ortogonalnym, jeśli dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}^n$, zachodzi równość

$$\langle x, y \rangle = \langle A(x), A(y) \rangle.$$

Stwierdzenie 1.3 *Przekształcenie liniowe A przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ jest ortogonalnym wtedy i tylko wtedy, gdy zachowuje normę dowolnego wektora, tzn. dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\| x \| = \| A(x) \| .$$

Dowód: Implikacja '$\Rightarrow$' wynika bezpośrednio z definicji przekształcenia ortogonalnego. W celu dowodu implikacji w stronę przeciwną załóżmy, że A jest przekształceniem liniowym, takim że $\| x \| = \| A(x) \|$, dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^n$. Wtedy oczywiście A zachowuje formę kwadratową Q, zdefiniowaną wzorem $Q(x) = \| x \|^2$, a to z kolei oznacza, że A zachowuje formę dwuliniową f, zdefiniowaną wzorem $f(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x + y) - Q(x) - Q(y))$. Bezpośredni rachunek dowodzi, że f jest identyczna z iloczynem skalarnym przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

□

Stwierdzenie 1.4 *Zbiór wszystkich przekształceń ortogonalnych przestrzeni $\mathbb{R}^n$ wraz z operacją składania przekształceń jest grupą.*

□

Grupę opisaną w powyższym stwierdzeniu nazywamy grupą ortogonalną przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i oznaczamy symbolem $O(n)$. W przyszłości elementy tej grupy będziemy traktowali jako macierze, a także jako odwzorowania liniowe przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$.

Rozważmy ortonormalną bazę $e_1, e_2, \ldots, e_n$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Z podstawowego wykładu algebry liniowej wynika, że macierz A dowolnego przekształcenia ortogonalnego w tej bazie jest ortogonalna, tzn. $A^{-1} = A^T$, gdzie A^T jest macierzą transponowaną do A. Przyporządkowanie, które każdemu przekształceniu ortogonalnemu przypisuje jego macierz w tej ustalonej bazie, jest izomorfizmem grupy ortogonalnej na grupę macierzy ortogonalnych (z operacją mnożenia macierzy). Ze względu na ten izomorfizm, pod pojęciem grupy ortogonalnej $O(n)$ będziemy rozumieć tę właśnie grupę macierzy ortogonalnych.

Stwierdzenie 1.5 *Każda izometria przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest superpozycją przekształcenia ortogonalnego i translacji. Innymi słowy, jeżeli $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest izometrią przestrzeni $\mathbb{R}^n$, to istnieje translacja t_a i przekształcenie ortogonalne A tej przestrzeni, takie że $f = A \circ t_a$.*

Dowód: Niech $a = f(0)$ i $A = f \circ t_{-a}$. Wtedy oczywiście A jest izometrią i $A(0) = 0$. W myśl stwierdzenia 1.3, do zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że A jest przekształceniem liniowym. Niech $x, y \in \mathbb{R}^n$ będą dowolnymi wektorami i C płaszczyzną rozpiętą na tych wektorach. Ponieważ A jest izometrią, więc obrazem równoległoboku o bokach x, y i przekątnej $x + y$ jest równoległobok o bokach $f(x), f(y)$ i przekątnej $f(x) + f(y)$. Obrazem przekątnej równoległoboku jest przekątna obrazu, więc $f(x + y) = f(x) + f(y)$. To dowodzi liniowości A. Zatem A jest przekształceniem ortogonalnym i $f = A \circ f_a$.

$\square$

Wprowadzimy teraz bardzo ważne pojęcie z teorii grup.

Definicja 1.4 Niech H i K będą dowolnymi grupami z operacjami, odpowiednio, '$\circ$' i '$\star$'. Załóżmy ponadto, że H jest podgrupą grupy automorfizmów grupy K. Produktem półprostym grup H i K nazywamy grupę $H \ltimes K$, której elementami są wszystkie uporządkowane pary (h, k), $h \in H$, $k \in K$, z operacją

$$(h_1, k_1)(h_2, k_2) = (h_1 \circ h_2, h_1(k_2) \star k_1).$$

Przykład 1.1 Na mocy stwierdzenia 1.5 będziemy przyjmować, że

$$E(n) = O(n) \ltimes \mathbb{R}^n.$$

Jest to zbiór wszystkich par $(A, t_a) = (A, a) \in O(n) \times \mathbb{R}^n$ z działaniem danym wzorem

$$(A, a)(B, b) = (AB, Ab + a),$$

gdzie $(B, b) \in O(n) \times \mathbb{R}^n$.

W powyższym przykładzie pierwsza współrzędna nazywana jest obrotem, a druga – translacją. Symbol $\ltimes$ oznacza produkt półprosty grupy $\mathbb{R}^n$, z działaniem dodawania, i grupy ortogonalnej $O(n)$.

Przykład 1.2 Grupa $A(n) = GL(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$. Jest to produkt półprosty grupy $\mathbb{R}^n$ z grupą $GL(n, \mathbb{R})$.

Stwierdzenie 1.6 *Mamy następujący ciąg podgrup*

$$E(n) \subset A(n) \subset GL(n + 1, \mathbb{R}).$$

Dowód: Niech $(A, a) \in E(n)$. Wówczas jest to także element grupy $A(n)$. Ponadto, jeżeli zapiszemy go jako macierz $(n+1)\times(n+1)$ w postaci $\begin{bmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, jest on elementem grupy $GL(n + 1, \mathbb{R})$.

$\square$

Ostatnie stwierdzenie pozwala nam określić topologię na grupie $E(n)$ jako indukowaną z $\mathbb{R}^{(n+1)^2}$.

Definicja 1.5 Podzbiór X przestrzeni euklidesowej jest dyskretny, jeżeli każdy jego punkt x ma otoczenie otwarte U_x, takie że częścią wspólną zbioru U_x i X jest tylko punkt x.

Definicja 1.6 Niech Γ będzie podgrupą grupy izometrii przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$. Nazywamy ją podgrupą dyskretną, jeżeli jako podzbiór przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^{(n+1)^2}$ jest dyskretna. Mówimy, że Γ działa *właściwie dyskretnie* na $\mathbb{R}^n$, jeśli dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$ istnieje takie jego otoczenie otwarte U_x, że zbiór

$$\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma U_x \cap U_x \neq \emptyset\}$$

jest skończony. Ponadto będziemy mówili, że Γ działa wolno, jeśli dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$ zbiór $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma x = x\}$ zawiera tylko element neutralny $(I, 0)$ grupy Γ.

Lemat 1.1 *Jeżeli* Γ *jest dyskretną podgrupą grupy* $E(n)$ *i* $V_0 \subset \mathbb{R}^n$ *jest kulą otwartą o środku w punkcie* 0 *i promieniu* r, *to*

$$\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma V_0 \cap V_0 \neq \emptyset\} \subset \Gamma \cap (O(n) \times V_0'),$$

gdzie V_0' *jest kulą o środku w punkcie* 0 *i promieniu* $2r$. *(Tutaj* $O(n) \times V_0'$ *jest rozumiany jako podzbiór grupy* $E(n)$.*)*

Dowód: Niech $\gamma = (A, a) \in \Gamma$ będzie takim elementem, że $\gamma V_0 \cap V_0 \neq \emptyset$. Wówczas istnieją $x, x' \in V_0$, takie że $\gamma x = Ax + a = x'$. Stąd na mocy nierówności trójkąta $\| a \| = \| x' - Ax \| \leq \| x' \| + \| Ax \| \leq 2r$. Zatem $\gamma \in O(n) \times V_0'$.

□

Stwierdzenie 1.7 *Niech* $\Gamma \subset E(n)$ *będzie podgrupą grupy* $E(n)$. *Następujące warunki są równoważne:*

(i) Γ *działa właściwie dyskretnie na przestrzeni* $\mathbb{R}^n$,

(ii) Γx *nie ma punktu skupienia dla każdego* $x \in \mathbb{R}^n$,

(iii) Γ *jest dyskretną podgrupą grupy* $E(n)$.

Dowód: Załóżmy, że grupa Γ działa właściwie dyskretnie na $\mathbb{R}^n$. Udowodnimy, że jest ona dyskretna. Niech ciąg elementów $\{\gamma_n\}_{n=1}^{n=\infty}$ grupy Γ będzie zbieżny do identyczności. Rozpatrzmy otoczenie $0 \in U_0 \subset \mathbb{R}^n$ i zbiór $\{\gamma_i \mid U_0 \cap \gamma_i U_0 \neq \emptyset\}$, który z definicji działania jest skończony. Stąd $\gamma_i = (I, 0)$ od pewnego n i grupa Γ jest dyskretna. Aby udowodnić wynikanie przeciwne, wykorzystamy lemat 1.1.

Niech $x \in \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym punktem, V_x – kulą o środku w x i promieniu r, a t_x – translacją o x. Wówczas z definicji działania właściwie dyskretnego i lematu 1.1 mamy

$$\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma V_x \cap V_x \neq \emptyset\} = \{\gamma \in \Gamma \mid t_{-x}\gamma t_x V_0 \cap V_0 \neq \emptyset\} \subset t_{-x}\Gamma t_x \cap (O(n) \times V_0').$$

Ponieważ grupa Γ jest dyskretna, więc powyższy zbiór jest skończony i grupa Γ działa właściwie dyskretnie na $\mathbb{R}^n$. Udowodniliśmy równoważność (i) oraz (iii).

Załóżmy warunek (i). Udowodnimy, że dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$ zbiór Γx nie ma punktu skupienia. Przypuśćmy przeciwnie, że taki punkt $y \in \mathbb{R}^n$ istnieje. To znaczy, że istnieje ciąg elementów $\{\gamma_i x = A_i x + a_i\}_{i=1}^{i=\infty}$ zbieżny do punktu

y. Ponieważ grupa $O(n)$ jest zwarta, więc możemy założyć, że ciąg $\{A_i\}_{i=1}^{i=\infty}$ jest zbieżny do pewnego $A \in O(n)$. Stąd ciąg elementów $\{a_i\}_{i=1}^{i=\infty}$ jest zbieżny do punktu $-Ax + y$. Istotnie wyrażenie

$$|| \, a_i + Ax - y \, || \leq || \, a_i + A_i x - y \, || + || \, A_i x - Ax \, ||$$

może być dowolnie małe dla dostatecznie dużego i. Pokazaliśmy zatem, że ciąg izometrii $\{\gamma_i\}_{i=1}^{i=\infty}$ jest zbieżny do $\gamma = (A, -Ax + y)$ w grupie $E(n)$. Stąd ciąg izometrii $\{\gamma_i \gamma_{i+1}^{-1}\}_{i=1}^{i=\infty}$ jest zbieżny do identyczności. A to jest sprzeczne z dyskretnością grupy Γ.

Odwrotnie zakładając, że dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$ zbiór Γx nie ma punktów skupienia, udowodnimy, że Γ działa właściwie dyskretnie. Niech $x_0 \in \mathbb{R}^n$ będzie taki, że dla każdej kuli U_{x_0} o środku w x_0 zbiór

$$\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma U_{x_0} \cap U_{x_0} \neq \emptyset\}$$

jest nieskończony. A to oznacza, że zbiór Γx_0 ma punkt skupienia. Dostaliśmy sprzeczność.

$\square$

Stwierdzenie 1.8 *Dyskretna podgrupa grupy $E(n)$ działa wolno na $\mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest beztorsyjna (nie ma elementów skończonego rzędu).*

Dowód: Jeżeli grupa Γ ma element γ skończonego rzędu k, to dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$ punkt $x + \gamma x + \gamma^2 x + \cdots + \gamma^{k-1} x$ nie zmienia się, gdy działamy na nim elementem γ. To oznacza, że działanie grupy izometrii Γ nie jest wolne. W przeciwną stronę stwierdzenie wynika z następującej równości zbiorów

$$\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma a = a\} = \Gamma \cap t_a(O(n) \times 0)t_{-a},$$

gdzie $a \in \mathbb{R}^n$, a t_a oznacza translację o a. Ponieważ grupa $O(n)$ jest zwarta, a grupa Γ dyskretna, więc zbiór po prawej stronie jest zawsze skończony.

$\square$

Kolejna definicja dotyczy bardzo ważnego pojęcia.

Definicja 1.7 Przestrzeń topologiczną Hausdorffa $\mathcal{M}$ nazywamy rozmaitością *odpowiedniej klasy*, jeżeli spełnione są poniższe warunki:

1. Istnieje pokrycie $\mathcal{M}$ rodziną zbiorów otwartych $U_i, i \in I$, z których każdy jest odwzorowywany za pomocą homeomorfizmu φ_i na otwarty podzbiór $\mathbb{R}^n$.

2. Jeżeli $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, to odwzorowanie (tzw. funkcja przejścia)

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

jest *odpowiedniej klasy.*

Para (U_i, φ_i) jest nazywana mapą rozmaitości $\mathcal{M}$, a zbiór wszystkich map – jej atlasem.

Przykład 1.3 Przestrzenie liniowe $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ oraz ich przestrzenie rzutowe $\mathbb{R}P^n$ i $\mathbb{C}P^n$ są rozmaitościami. n-wymiarowa sfera

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \| x \| = 1\}$$

oraz n-wymiarowy torus

$$T^n = S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1 = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$$

są rozmaitościami. Pokazanie tego jest prostym ćwiczeniem [60].

Definicja 1.8 Grupą Liego G nazywamy rozmaitość różniczkową, która jest jednocześnie grupą. Ponadto działania mnożenia $G \times G \to G$ i *brania* elementu odwrotnego $G \to G$ są odwzorowaniami różniczkowalnymi rozmaitości.

Przykład 1.4 Sfera $S^1 \subset \mathbb{C}$ z działaniem mnożenia liczb zespolonych jest abelową grupą Liego. Iloczyn kartezjański grup S^1, tzn. n-wymiarowy torus $T^n = (S^1)^n$, jest grupą Liego. Grupy macierzy $U(n), O(n), SL(n, \mathbb{R}), SL(n, \mathbb{C})$ są grupami Liego.

Zaczniemy od obserwacji, którą będziemy wykorzystywać wielokrotnie i w wielu innych miejscach.

Lemat 1.2 [11, lemat 8.4, s. 98] *Niech G będzie grupą Liego, a Γ jej podgrupą. Jeżeli istnieje otwarte otoczenie U elementu neutralnego e, takie że $U \cap \Gamma = \{e\}$, to Γ jest przeliczalnym, domkniętym, dyskretnym podzbiorem grupy G.*

Dowód: Niech $e \in V$ będzie otwartym otoczeniem elementu neutralnego, takim że $VV^{-1} \subset U$. Jego istnienie wynika z ciągłości odwzorowania $G \times G \to G$, opisanego wzorem $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2^{-1}$, i tego, że w tym odwzorowaniu obrazem pary (e, e) jest e. Jeżeli ciąg elementów $\{h_n\}$ grupy Γ jest zbieżny do h, to z definicji wynika, że istnieje liczba naturalna N, taka że $\forall n > N, h_n \in Vg$. Zbiór Vg jest otoczeniem otwartym punktu g. Niech $h_n = v_n g$ i $h_m = v_m g$ dla pewnych $v_n, v_m \in V$. Mamy $h_n h_m^{-1} = v_n v_m^{-1} \in U$. Ponieważ $U \cap \Gamma = \{e\}$, więc $h_n h_m^{-1} = e$ i $h_n = h_m, \forall n, m > N$ i $g = h_N \in \Gamma$. Ponadto dla każdego $h \in \Gamma, hU$ jest otwartym otoczeniem h, którego przecięcie z Γ jest równe h. To dowodzi dyskretności zbioru Γ. W końcu rodzina zbiorów $\{hV \mid h \in \Gamma\}$ jest indeksowaną rodziną parami rozłącznych podzbiorów grupy Γ. Istotnie, jeżeli $h_1 V \cap h_2 V \neq \emptyset$, to $h_1 v_1 = h_2 v_2$ dla pewnych $v_1, v_2 \in V$ i $h_2^{-1} h_1 = v_2 v_1^{-1} \in VV^{-1} \subset U$. Stąd $h_1 = h_2$ i gdyby Γ nie była przeliczalna, to oznaczałoby nieistnienie przeliczalnej bazy zbiorów otwartych.

□

Lemat 1.3 *Jeżeli Γ jest podgrupą grupy $E(n)$, to odwzorowania $\pi_1 : E(n) \to E(n)/\Gamma$ rzutowania na grupę ilorazową oraz $\pi_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\Gamma$ rzutowania na przestrzeń orbit działania grupy izometrii Γ na $\mathbb{R}^n$ są otwarte i domknięte.*

Dowód: Jest to bezpośrednia konsekwencja definicji topologii na przestrzeniach ilorazowych (zob. np. [23]).

□

Stwierdzenie 1.9 *Niech Γ będzie podgrupą grupy $E(n)$. Wówczas przestrzeń orbit $\mathbb{R}^n/\Gamma$ jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń warstw $E(n)/\Gamma$ jest zwarta.*

Dowód: Na podstawie lematu 1.3, rzutowanie $\pi : E(n) \to \mathbb{R}^n$ na drugą współrzędną indukuje ciągłe i domknięte odwzorowanie $\phi : E(n)/\Gamma \to \mathbb{R}^n/\Gamma$, określone wzorem

$$\phi((A, r)\Gamma) = \Gamma r.$$

Z ćwiczenia 1.3 wynika, że jest to poprawna definicja. Stąd zwartość przestrzeni $E(n)/\Gamma$ indukuje zwartość przestrzeni $\mathbb{R}^n/\Gamma$. W drugą stronę zauważmy, że dla każdego punktu $r \in \mathbb{R}^n/\Gamma$, $\phi^{-1}(r) = (O(n) \times r)/\Gamma$ jest zbiorem zwartym. Stąd i z założenia o zwartości przestrzeni orbit $\mathbb{R}^n/\Gamma$

oraz domkniętości odwzorowania ϕ wynika zwartość przestrzeni $E(n)/\Gamma$ (zob. ćwiczenie 1.6).

$\square$

Drugi dowód stwierdzenia 1.9 opiera się na poniższym lemacie.

Lemat 1.4 *Przestrzeń $E(n)/\Gamma$ jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje zwarty podzbiór $D \subset E(n)$, taki że $E(n) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma D = \Gamma D$.*

Dowód: Grupę $E(n)$, jako podzbiór $\mathbb{R}^{(n+1)^2}$, można pokryć nieskończonym zbiorem zbiorów otwartych $U_k \cap E(n)$, gdzie U_k jest kulą otwartą o środku w zerze i promieniu k. Ich obrazy $\pi_1(U_k \cap E(n))$ w naturalnym epimorfizmie $\pi_1 : E(n) \to E(n)/\Gamma$ tworzą otwarte pokrycie przestrzeni zwartej $E(n)/\Gamma$. Stąd istnieje k_0, takie że $\pi_1(U_{k_0} \cap E(n)) = E(n)/\Gamma$. Niech D będzie domknięciem zbioru $(U_{k_0} \cap E(n))$, tzn. $D = \overline{(U_{k_0} \cap E(n))}$. Jest teraz oczywiste, że

$$E(n) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma D = \Gamma D.$$

Dowód lematu w odwrotną stronę wynika z definicji.

$\square$

Lemat pozostaje prawdziwy, z analogicznym dowodem, jeśli $E(n)$ zastąpimy przestrzenią $\mathbb{R}^n$. Możemy teraz zakończyć drugi dowód stwierdzenia 1.9. Wystarczy zauważyć, że istnienie zwartego obszaru z lematu 1.4 dla przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i $E(n)$ jest równoważne. Niech D będzie takim zbiorem dla $E(n)$. Z definicji mamy $E(n) = \Gamma D$. Ponieważ $E(n)(0) = \mathbb{R}^n$, więc $\Gamma D(0) = \mathbb{R}^n$ i $D(0)$ staje się zwartym podzbiorem z lematu 1.4 dla przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Odwrotnie, niech D będzie zbiorem z lematu 1.4 dla grupy Γ i przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Wówczas zbiór

$$C = \{x \in E(n) \mid x(0) \in D\} = O(n) \times D$$

jest tym zbiorem dla $E(n)$, gdyż $\Gamma C = E(n)$ i $C \cap \mathbb{R}^n = D$.

$\square$

Definicja 1.9 Podgrupę Γ grupy $E(n)$ nazywamy kozwartą, jeżeli przestrzeń ilorazowa $E(n)/\Gamma$ jest zwarta.

Definicja 1.10 Niech X będzie G zbiorem. Domknięty podzbiór $F \subset X$ nazywamy obszarem fundamentalnym działania grupy G na zbór X, jeżeli

$$X = \bigcup_{g \in G} gF$$

i $gF \cap g'F = \emptyset$, dla $g \neq g' \in G$.

Uwaga: Rozważany powyżej zbiór D nie zawsze jest obszarem fundamentalnym. Przykłady obszarów fundamentalnych są rozważane w rozdziale 3.

Ćwiczenie 1.1 Opisać wszystkie izometrie przestrzeni $\mathbb{R}^2$.

Ćwiczenie 1.2 Przeprowadzić brakujące powyżej dowody stwierdzeń i lematów.

Ćwiczenie 1.3 Niech Γ będzie podgrupą grupy $E(n)$. Niech

$$\gamma_1 = (A_1, r_1), \gamma_2 = (A_2, r_2)$$

będą takimi elementami grupy $E(n)$, że $\gamma_1\Gamma = \gamma_2\Gamma$. Udowodnić, że istnieje $\gamma \in \Gamma$, takie że $\gamma r_1 = r_2$.

Ćwiczenie 1.4 Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie odwzorowaniem liniowym, a $g \in O(n)$. Udowodnić, że wówczas

$$|| \, gf \, || = || \, f \, || = || \, fg \, || \, .$$

Ćwiczenie 1.5 Niech G będzie grupą Liego. Udowodnić, że w G istnieje przeliczalna baza zbiorów otwartych.

Ćwiczenie 1.6 Niech $f : X \to Y$ będzie ciągłym i domkniętym odwzorowaniem przestrzeni topologicznej X na przestrzeń topologiczną Y. Załóżmy ponadto, że dla dowolnego $y \in Y, f^{-1}(y)$ jest przestrzenią zwartą. Udowodnić, że przetrzeń X jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń Y jest zwarta.

Wskazówka [23, s. 50]: Pokazać, że f jest domknięte wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu $y \in Y$ i zbioru otwartego U, zawierającego przeciwobraz $f^{-1}(y)$ punktu y, istnieje otoczenie V punktu $y \in Y$, takie że $f^{-1}(V) \subset U$.

2. Twierdzenia Bieberbacha

Definicja 2.1 Dyskretną i kozwartą podgrupę grupy $E(n)$ nazywamy grupą krystalograficzną wymiaru n.

Uwaga: Pierwsza część 18 problemu Hilberta dotyczyła opisania dyskretnych grup izometrii $\mathbb{R}^n$, mających zwarty obszar fundamentalny, a zatem n-wymiarowych grup krystalograficznych.

Przykład 2.1 Jeśli $(B, t_{(1/2,0)})$ i $(I, t_{(0,1)})$ są elementami grupy $E(2)$, gdzie $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, to najmniejsza podgrupa Γ grupy $E(2)$, zawierająca te elementy, jest grupą krystalograficzną wymiaru dwa, a przestrzeń orbit $\mathbb{R}^2/\Gamma$ jest butelką Kleina.

Część problemu Hilberta, dotycząca grup krystalograficznych, została rozwiązana przez matematyka niemieckiego L. Bieberbacha.

Twierdzenie 2.1 (Bieberbacha) *1. Jeżeli $\Gamma \subset E(n)$ jest grupą krystalograficzną, to jej zbiór translacji $\Gamma \cap (I \times \mathbb{R}^n)$ jest maksymalną i normalną podgrupą abelową o skończonym indeksie.*

2. Dla każdej liczby naturalnej n istnieje skończona liczba klas izomorfizmu grup krystalograficznych wymiaru n.

3. Dwie grupy krystalograficzne wymiaru n są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy są sprzężone w grupie $A(n)$.

Uwaga: Oryginalny dowód Bieberbacha pochodzi z roku 1910 (zob. [9] i [10]). W następnych latach pojawiły się inne dowody: w roku 1911 G. Frobeniusa [27], w roku 1938 H. Zassenhausa [61]. Wspomnijmy także o późniejszych dowodach: L. Auslandera [3] (1960, 1961), J. Wolfa [60] (1970), M. Gromowa [29] (1978). Dowód Gromowa dotyczy grup wirtualnie nilpotentnych, a na użytek grup krystalograficznych został opracowany przez P. Busera i H. Karchera [13-15] (zob. dodatek). W cytowanych tutaj pracach Busera i Karchera można znaleźć także omówienia, porównania niektórych z tych dowodów.

Dowód:* Na dowód składa się seria lematów.

---

*Dowód, w dużej części, bazuje na [60].

Lemat 2.1 *W grupie ortogonalnej $O(n)$ istnieje otoczenie U elementu neutralnego I, takie że dla dowolnych $g, h \in U$ spełniony jest warunek: jeżeli g jest przemienne z komutatorem $[g,h] = ghg^{-1}h^{-1}$, to g jest przemienne z h.*

Dowód: Niech $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ będą wartościami własnymi odwzorowania $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, a $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_r$ – odpowiadającym im rozkładem na podprzestrzenie niezmiennicze. Ponieważ $g[g,h] = [g,h]g$, więc $ghg^{-1}h^{-1} = hg^{-1}h^{-1}g$. Ponadto dla $i = 1, 2, \ldots, r$ oraz $\forall x \in V_i$ mamy $gx = \lambda_i x$. Stąd

$$ghg^{-1}h^{-1}x = hg^{-1}h^{-1}gx = hg^{-1}h^{-1}\lambda_i x = \lambda_i hg^{-1}h^{-1}x$$

i $hg^{-1}h^{-1}V_i \subset V_i$. Ponieważ h i g są izomorfizmami, więc $h^{-1}V_i = g^{-1}h^{-1}V_i$. Mamy

$$h^{-1}V_i = (h^{-1}V_i \cap V_1) \oplus (h^{-1}V_i \cap V_2) \oplus ... \oplus (h^{-1}V_i \cap V_r),$$

gdzie $h^{-1}V_i \cap V_j = \{x \in h^{-1}V_i \mid gx = \lambda_j x\}$.

Niech $x, v \in \mathbb{C}^n$ są takie, że $\| x \| = \| v \| = 1$ i $x \perp v$. Stąd mamy z definicji $\| x - v \| = \sqrt{2}$. Ponadto niech $\| h^{-1} - I \| < \epsilon = \sqrt{2} - 1$, $i \neq j$ oraz $x \in (h^{-1}V_i \cap V_j)$. (Jeżeli $x \neq 0$, to możemy przyjąć, że ma normę jeden.) Inaczej mówiąc, istnieje $y \in V_i$, takie że $h^{-1}y = x$. Ale $x \in V_j$, a to oznacza, że $< x \mid y >= 0$ *. Mamy zatem sprzeczność, gdyż

$$\sqrt{2} = \| x - y \| = \| h^{-1}y - y \| \le \| h^{-1}y \| + \| y \| = 1 + \| h^{-1} \| < \sqrt{2}.$$

Stąd $h^{-1}V_i \cap V_j = 0$, dla $i \neq j, h^{-1}V_i = V_i$, dla $i = 1, 2, \ldots, r$, i macierze odwzorowań g, h obcięte do V_i są przemienne, gdyż macierz odwzorowania g jest diagonalna. Ponieważ każdy element przestrzeni $\mathbb{C}^n$ jest sumą elementów z podprzestrzeni V_i, więc g i h są przemienne. Jako szukane otoczenie przyjmijmy

$$U = \{h \in O(n) \mid \| I - h^{-1} \| < \epsilon\}.$$

□

Lemat 2.2 *Dla pewnego otoczenia U elementu neutralnego w grupie ortogonalnej $O(n)$ i dowolnych jego elementów g, h ciąg*

$$[g,h], [g,[g,h]], [g,[g,[g,h]]], \ldots$$

*Korzystamy z faktu, że wektory własne różnych wartości własnych są prostopadłe. Istotnie $\lambda_i \langle x \mid y \rangle = \langle Ax \mid y \rangle = \langle x \mid A^T y \rangle = \bar{\lambda_j}^{-1} \langle x \mid y \rangle$. Stąd $\lambda_i \bar{\lambda_j} = 1$. Ponieważ $\forall i, \lambda_i \bar{\lambda_i} = 1$, więc $\lambda_i = \lambda_j$, co jest sprzeczne z założeniem, i $\langle x, y \rangle = 0$.

jest ciągiem, elementów z U, zbieżnym do identyczności.

Dowód: Niech U będzie otoczeniem otwartym identyczności o promieniu $\epsilon < 1/4$. Z definicji (por. ćwiczenie 1.4) mamy

$$|| [g,h] - I ||=|| gh - hg ||=|| gh - g - h + I - hg + h + g - I ||=$$

$$|| (g-I)(h-I) - (h-I)(g-I) ||\leq 2 || g - I |||| h - I ||< \frac{|| h - I ||}{2}$$

i $g, h \in U$. Stąd $[g,h] \in U$ i z indukcji

$$|| \underbrace{[g,[g,[g,\ldots,[g,}_{n} h]\ldots]]] - I ||\leq \frac{|| h - I ||}{2^n}.$$

□

Definicja 2.2 Otoczeniem stabilnym elementu neutralnego grupy $O(n)$ nazywamy otoczenie spełniające warunki powyższych lematów.

Niech G będzie grupą topologiczną, to znaczy przestrzeną topologiczną z taką strukturą grupy, że wszystkie działania są odwzorowaniami ciągłymi. Przez G_0 będziemy oznaczać jej składową spójności identyczności.

Lemat 2.3 *1. W grupie ortogonalnej $O(n)$ istnieje otoczenie V elementu neutralnego, takie że $\forall g \in O(n), gVg^{-1} = V$.*

2. Jeżeli G jest dowolną grupą topologiczną, to G_0 jest jej podgrupą normalną.

3. Jeżeli $G \subset O(n)$ jest spójną podgrupą, a U otwartym otoczeniem identyczności, to grupa generowana przez zbiór $G \cap U$ jest tożsama z G.

Dowód: 1. Niech ϵ będzie dowolną liczbą dodatnią i niech V będzie kulą otwartą $B(I,\epsilon)$. $\forall g \in O(n)$ i $\forall h \in V$ z definicji (por. ćwiczenie 1.4) mamy

$$|| ghg^{-1} - I ||=|| g(h-I)g^{-1} ||=|| h - I ||< \epsilon.$$

I odwrotnie, jeżeli $h = gh_1g^{-1} \in gVg^{-1}$, to mamy

$$|| h - I ||=|| gh_1g^{-1} - I ||=|| h_1 - I ||< \epsilon.$$

2. Niech $f : G_0 \to G$ będzie funkcją określoną wzorem $f(g) = g^{-1}$. Ponieważ f jest ciągła, więc $f(G_0)$ jest spójna i wobec tego, że $f(I) = I$, mamy $f(G_0) \subset G_0$. Analogicznie, jeżeli $f_h : G_0 \to G$ jest funkcją zdefiniowaną wzorem $f_h(g) = gh, \forall g \in G_0$, to oczywiście f_h jest ciągła, a dla $h \in G_0$ mamy $h^{-1} \in G_0$ i dlatego z równości $f_h(h^{-1}) = I \in G_0$ dostajemy $f_h(G_0) \subset G_0$. Podsumowując otrzymujemy, że G_0 jest podgrupą grupy G.

Podobne argumenty zastosowane do funkcji f'_h, określonej wzorem $f'_h(g) = hgh^{-1}, \forall h \in G, g \in G_0$, pokazują, że $f'_h(G_0) \subset G_0$ dla dowolnego $h \in G$. Zatem G_0 jest podgrupą normalną grupy G.

3. Niech $< G \cap U >$ oznacza podgrupę generowaną przez zbiór $G \cap U$. Zawieranie $< G \cap U > \subset G$ jest oczywiste. Udowadniając inkluzję w stronę przeciwną, pokażemy najpierw, że $< G \cap U >$ jest zbiorem otwartym. Niech $x \in < G \cap U >$ i niech $B(x, \epsilon)$ będzie dowolną kulą otwartą o środku w punkcie x i promieniu ϵ zawartą w U. Wówczas dla dowolnego $y \in B(x, \epsilon) \cap G$ mamy

$$(*) \qquad \| yx^{-1} - I \| = \| yx^{-1} - xx^{-1} \| = \| y - x \| < \epsilon.$$

Stąd

$$yx^{-1} \in B(I, \epsilon) \cap G \subset U \cap G$$

i $y = yx^{-1}x \in < U \cap G >$. W konsekwencji zbiór $S = G \setminus < G \cap U >$ jest domknięty. Ponadto jeśli $y \in S$, to mamy zawieranie zbiorów $B(y, \epsilon) \cap G \subset G \setminus < U \cap G > = S$. W przeciwnym wypadku, dla $x \in B(y, \epsilon) \cap G$, $x \in < U \cap G >$ i z $(*)$, mielibyśmy $y \in < U \cap G >$, co jest niemożliwe. Podsumowując otrzymujemy, że zbiory S i $< U \cap G >$ są jednocześnie otwarte i domknięte. Ponieważ U jest niepusty, a G spójny, więc $S = \emptyset$.

□

Lemat 2.4 *Niech Γ będzie grupą krystalograficzną. Niech $\Psi : E(n) \to O(n)$ będzie rzutowaniem na pierwszą współrzędną. Wówczas $\overline{\Psi(\Gamma)}_0$ jest grupą abelową.*

Dowód: Niech $U = B(I, \epsilon)$ [*], gdzie $\epsilon < 1/4$, i $\gamma_1 = (A_1, a_1), \gamma_2 = (A_2, a_2) \in (\Psi^{-1}(U) \cap \Gamma)$. Zdefiniujmy rekurencyjnie ciąg dla $i \geq 2$

$$\gamma_{i+1} = [\gamma_1, \gamma_i].$$

[*] Z defincji można zauważyć, że U jest otoczeniem *stabilnym*.

Mamy

$$\gamma_{i+1} = ([A_1, A_i], (1 - A_1 A_i A_1^{-1}) a_1 + A_1 (1 - A_i A_1^{-1} A_i^{-1}) a_i).$$

Stąd $A_{i+1} = [A_1, A_i]$ oraz $|| a_{i+1} || \leq || 1 - A_i |||| a_1 || + \frac{1}{4} || a_i ||$. Z lematu 2.2 mamy $lim_{i \to \infty} A_i = I$, a stąd $lim_{i \to \infty} a_i = 0$. Ponieważ Γ jest dyskretna, więc $\gamma_i = (I, 0)$ dla dostatecznie dużych i. Z lematu 2.1 mamy $A_1 A_2 = A_2 A_1$. Z dowolności wyboru mamy przemienność elementów w zbiorze $\overline{\Psi(\Gamma)}_0 \cap U$, a to na podstawie punktu 3 lematu 2.3 dowodzi przemienności grupy $\overline{\Psi(\Gamma)}_0$.

□

Definicja 2.3 Niech T będzie torusem. Generatorem T nazywamy taki element $g \in T$, że $T = \overline{< g >}$.

Lemat 2.5 *Każdy torus grupy ortogonalnej ma generator.*

Dowód: Jeżeli $T = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$, to $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$, gdzie $g_1, g_2, \ldots, g_n \in (0, 1)$ są liniowo niezależne nad $\mathbb{Q}$ i podprzestrzeń rozpięta na nich (nad $\mathbb{Q}$) ma zerowy przekrój ze zbiorem $\mathbb{Q}$. Odpowiadającym mu generatorem w grupie ortogonalnej jest element złożony z obrotów o kąty $2\pi g_1, 2\pi g_2, \ldots, 2\pi g_n$ dookoła odpowiednich osi.

□

Jako przestrzeń topologiczna grupa $E(n)$ jest iloczynem kartezjańskim przestrzeni topologicznych $O(n)$ i $\mathbb{R}^n$. Stąd $O(n)$ i $\mathbb{R}^n$ można traktować jako podprzestrzenie przestrzeni $E(n)$, dzięki utożsamieniu pierwszej z nich z $O(n) \times \{0\}$, a drugiej z $\{I\} \times \mathbb{R}^n$. Niech $\Gamma \subset E(n)$ będzie podgrupą i niech $\Gamma\mathbb{R}^n = \{\gamma(I, r) \mid \gamma \in \Gamma, r \in \mathbb{R}^n\}$. Oznaczmy przez $\Lambda(\Gamma)$ zbiór $\Gamma \cap (\overline{\Gamma\mathbb{R}^n})_0$. Jest jasne, że $(\overline{\Gamma\mathbb{R}^n}) = \overline{\Psi(\Gamma)} \times \mathbb{R}^n$ oraz $(\overline{\Gamma\mathbb{R}^n})_0 = \overline{\Psi(\Gamma)}_0 \times \mathbb{R}^n$.

Lemat 2.6 *Niech Γ będzie dyskretną podgrupą grupy $E(n)$. Wówczas:*

1. $\Lambda(\Gamma)$ jest abelową podgrupą normalną i grupa ilorazowa $\Gamma/\Lambda(\Gamma)$ jest skończona.

2. Istnieje torus $T \subset O(n)$ i podprzestrzeń $W \subset \mathbb{R}^n$, takie że

(i) T dział a trywialnie na W,

(ii) $\Lambda(\Gamma) \subset T \times W$,

(iii) $\Lambda(\Gamma) = A \times B$, gdzie A jest skończoną grupą abelową, a B – dyskretną i kozwartą podgrupą W.

Dowód: 1. Mamy

$$\overline{\Gamma\mathbb{R}^n}/(\overline{\Gamma\mathbb{R}^n})_0 = \overline{\Psi(\Gamma)} \times \mathbb{R}^n/\overline{\Psi(\Gamma)}_0 \times \mathbb{R}^n \simeq \overline{\Psi(\Gamma)}/\overline{\Psi(\Gamma)}_0.$$

Ponieważ grupa $\overline{\Psi(\Gamma)} \subset O(n)$ jest zwarta, więc grupa $\overline{\Psi(\Gamma)}/\overline{\Psi(\Gamma)}_0$ jest skończona. Wystarczy teraz zauważyć, że grupa $\Gamma/\Lambda(\Gamma)$ jest podgrupą, z dokładnością do monomorfizmu, grupy $\overline{\Gamma\mathbb{R}^n}/(\overline{\Gamma\mathbb{R}^n})_0$. Abelowość grupy $\Lambda(\Gamma)$ dowodzimy poniżej.

2. Niech $U \subset O(n)$ będzie otoczeniem stabilnym. Z rozważań poprzedzających lemat 2.2 i z lematu 2.3 (3) wnioskujemy, że $\overline{\Psi(\Gamma)}_0 =< U \cap \overline{\Psi(\Gamma)}_0 >$ jest pewnym torusem T. Niech

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall g \in T, gx = x\}, \Delta = \Gamma \cap \mathbb{R}^n.$$

Twierdzimy, że $\Delta \subset W$. Niech $\delta \in \Delta$. Ponieważ $\Lambda(\Gamma) \trianglelefteq \Gamma$, więc $[\Gamma, \delta] \subset \Gamma$. Ponadto dla każdego $\gamma \in \Gamma$ i $a \in \mathbb{R}^n$ mamy $[\gamma t_a, \delta] = [\gamma, \delta]$. Stąd

$$[\Gamma\mathbb{R}^n, \delta] \subset [\Gamma, \delta].$$

Po domknięciu mamy zawieranie $[T, \delta] \subset [\Gamma, \delta]$. Ponieważ zbiór $[T, \delta]$ jest jednocześnie dyskretny i spójny, więc $[T, \delta] = id$. Stąd dla każdego $g \in T, g\delta = \delta g$ i po ewaluacji w zerze $g\delta(0) = \delta(0)$. Otrzymaliśmy zawieranie $\Delta \subset W$. Kontynuując, oznaczmy przez g generator torusa T. Ponadto niech $W^{\perp}$ będzie ortogonalnym dopełnieniem przestrzeni W w $\mathbb{R}^n$. Oczywiście odwzorowanie $(g - I)$ jest injekcją na przestrzeni $W^{\perp}$. Ponieważ zbiór odwzorowań różnowartościowych jest otwarty w zbiorze wszystkich odwzorowań liniowych, więc istnieje element $h \in \Psi(\Gamma)$, taki że $h_{|}W = id_W$.

Niech $\gamma_0 = (h, x) \in \Lambda(\Gamma)$ jest takie, że $x \in W$ (tzn. $h(x) = x$). Przypuśćmy, że dla każdego $(h, y) \in \Lambda(\Gamma)$, $y \notin W$. Pokażemy, że istnieje $b \in \mathbb{R}^n$, takie że $(I, b)(h, y)(I, -b) = (h, y+b-hb)$ i $h(y+b-hb) = y+b-hb$. Proste wyliczenie pokazuje, że $b = (h-I)^{-1}(y)$. Stąd, ewentualnie po sprzężeniu przez odpowiednią translację, istnieje element γ_0. Będzie on wykorzystany do pokazania, że $\forall \gamma = (A, a) \in \Lambda(\Gamma), a \in W$. Przypuśćmy, że element a nie należy do podprzestrzeni W. Wówczas $[\gamma_0, \gamma] = (id, ha - a) \in \Gamma \cap \mathbb{R}^n = \Delta \subset W$. Ponieważ $(ha - a) \notin W$, więc otrzymaliśmy sprzeczność.* Stąd $\Lambda(\Gamma) \subset T \times W$.

*Jeżeli $(h - I)a \in W$, to $(h - I)^2 a = 0$. Ale z wyboru $(h - I)$ jest różnowartościowe, otrzymujemy więc sprzeczność.

W dowodzie punktu 2(iii), niech $\Phi : T \times W \to W$ oznacza rzutowanie na drugą współrzędną. Z definicji $\Phi(\Lambda(\Gamma)) = \Gamma \cap \mathbb{R}^n$ jest grupą dyskretną i $\Lambda(\Gamma) \simeq A \times \mathbb{Z}^n$. Tutaj $A = \Lambda(\Gamma) \cap T$.

□

Zakończymy teraz dowód pierwszego twierdzenia Bieberbacha. Z lematu 2.6 (2), zastosowanego do grupy krystalograficznej Γ, wystarczy udowodnić, że $W = \mathbb{R}^n$. Wykorzystamy w tym celu założenie o zwartości przestrzeni orbit $\mathbb{R}^n/\Gamma$. Ponieważ $[\Gamma : \Lambda(\Gamma)] < \infty$, więc także przestrzeń $\mathbb{R}^n/\Lambda(\Gamma)$ jest zwarta. Stąd istnieje zwarty obszar fundamentalny $0 \in F \subset \mathbb{R}^n$, taki że $\Lambda(\Gamma)(F) = \mathbb{R}^n$. Z definicji oznacza to, że $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \exists \gamma_x \in \Lambda(\Gamma)$, takie że

$$\gamma_x(x) \in F.$$

W szczególności $\forall x \in \mathbb{R}^n, \exists m \in \mathbb{N}$, takie że $|| \gamma_x(x) ||< m$ *. Niech $0 \neq x \in W^{\perp}$. Możemy założyć, że $|| x ||= 2m$. Niech $\gamma_x = (A, a) \in \Lambda(\Gamma)$. Z założenia $< a, x >= 0$. Ponadto

$$|| \gamma_x(x) ||^2 = \langle \gamma_x(x), \gamma_x(x) \rangle =$$

$$= \langle Ax + a, Ax + a \rangle = (\langle x, x \rangle + \langle a, a \rangle) >|| x || .$$

Otrzymaliśmy sprzeczność. Stąd $W = \mathbb{R}^n$, $T = \{I\}$† i $\Lambda(\Gamma) = \Gamma \cap \mathbb{R}^n$.

□

Zanim udowodnimy drugie i trzecie twierdzenie Bieberbacha, przedstawmy ważny rezultat H. Zassenhausa z roku 1947.

Twierdzenie 2.2 (Zassenhausa) *Grupa Γ jest izomorficzna z grupą krystalograficzną wymiaru n wtedy i tylko wtedy, gdy ma normalną wolną i maksymalną podgrupę abelową $\mathbb{Z}^n$ skończonego indeksu.*

Dowód: Jeżeli Γ jest grupą krystalograficzną wymiaru n, to trzeba tylko udowodnić, że podgrupa translacji jest maksymalna. Niech dowolny element $(A, a) \in \Gamma \subset E(n)$ będzie przemienny z dowolną translacją grupy Γ. Jest

---

* $m = sup_{x,y \in F} || x - y ||$.

† T działa trywialnie na $\mathbb{R}^n$.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & \mathbb{Z}^n & \rightarrow & \Gamma & \rightarrow & H & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\| & & \\
0 & \rightarrow & \mathbb{R}^n & \rightarrow & \overline{\Gamma} & \rightarrow & H & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow\| & & \downarrow & & \downarrow h_\Gamma & & \\
0 & \rightarrow & \mathbb{R}^n & \rightarrow & A(n) & \rightarrow & GL(n,\mathbb{R}) & \rightarrow & 0
\end{array}
$$

Diagram 2.1

oczywiste, że wówczas $A = I$. Zakładamy teraz, że mamy dowolną abstrakcyjną grupę Γ, definiującą krótki ciąg dokładny grup

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^n \rightarrow \Gamma \rightarrow H \rightarrow 0,$$

ze skończoną grupą H. Grupę abelową $\mathbb{Z}^n$ można rozpatrywać jako podgrupę przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^n$. Stąd otrzymujemy diagram 2.1, w którym wszystkie pionowe strzałki są monomorfizmami. Ponadto środkowy poziomy ciąg grup jest rozszczepialny *. Do definicji środkowego pionowego ciągu grup, $\Gamma \rightarrow \overline{\Gamma} \rightarrow A(n) = GL(n,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$, wykorzystujemy własności grupy Γ, które definiują reprezentację holonomii

$$h_\Gamma : H \rightarrow GL(n,\mathbb{Z}) \subset GL(n,\mathbb{R}).$$

$\forall g \in H, h_\Gamma(g)(e_i) = \overline{g}e_i\overline{g}^{-1}$. Tutaj $e_i \in \mathbb{Z}^n$ jest bazą standardową, a $\overline{g}$ oznacza dowolny element grupy Γ odwzorowywany na g. Ponieważ podgrupa abelowa $\mathbb{Z}^n$ jest maksymalna, więc reprezentacja holonomii jest monomorfizmem. Do zakończenia dowodu wystarczy zauważyć, że dowolna skończona grupa macierzy kwadratowych rzeczywistych wymiaru n, w odpowiedniej bazie, jest grupą macierzy ortogonalnych.

□

Definicja 2.4 Grupę H z powyższego twierdzenia nazywamy grupą holonomii grupy krystalograficznej Γ.

$^*H^2(H,\mathbb{R}^n) = 0$.

Przedstawimy teraz dowód drugiego twierdzenia Bieberbacha. Z twierdzenia Zassenhausa-Jordana (zob. [21]) wynika, że dla dowolnej grupy skończonej H, istnieje skończona liczba parami nieizomorficznych H-modułów $\mathbb{Z}^n$. Udowodnimy silniejszy rezultat.

Twierdzenie 2.3 *Dla danego n, istnieje skończona liczba klas sprzężoności skończonych podgrup grupy $GL(n, \mathbb{Z})$.*

Dowód ([17, cz. 6, rozdz. I, s. 37-39]): Niech $\rho : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ będzie formą dwuliniową, symetryczną, niezdegenerowaną i dodatnio określoną, o macierzy B w pewnej bazie. Niech

$$G_\rho = \{g \in GL(n, \mathbb{Z}) \mid B = gBg^T\},$$

gdzie, przypomnijmy, g^T oznacza macierz transponowaną macierzy g. Nietrudno zauważyć, że podgrupa G grupy $GL(n, \mathbb{Z})$ jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje pewna dwuliniowa, symetryczna, niezdegenerowana i dodatnio określona forma α na $\mathbb{Z}^n$, taka że $G \subset G_\alpha$. Dwuliniową formę definiujemy jako $\Sigma_{g \in G} g^T g$. Z drugiej strony, dyskretna podgrupa grupy ortogonalnej, która jest zbiorem odwzorowań liniowych zachowujących dodatnią, symetryczną i niezdegenerowaną formę kwadratową, jest skończona (zob. [17, stwierdzenie 6.2, s. 37]).

Niech $L \subset \mathbb{R}^n$ będzie kozwartą, dyskretną podgrupą (kratą), generowaną przez elementy $b_1, b_2, \ldots, b_n$, i niech

$$P = \{\Sigma_{i=1}^{i=n} r_i b_i \mid 0 \leq r_i \leq 1\}.$$

Z definicji $vol(P) = \int_P dx_1 dx_2 \ldots dx_n = vol(L)$. Ponadto z algebry liniowej mamy

$$vol(L) = \mid det(b_1, b_2, \ldots, b_n) \mid = \sqrt{det(\langle b_i, b_j \rangle)}.$$

Można pokazać, że każdą parę $(\mathbb{Z}^n, \rho)$, gdzie ρ jest odpowiednią formą, możemy traktować jak kratę w $\mathbb{R}^n$ o objętości jeden, a ρ jako iloczyn skalarny $\langle , \rangle$ w $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{Z}^n \otimes \mathbb{R}^n$.

Potrzebny nam będzie fakt, którego dowód będzie konsekwencją poniższego lematu, nazywanego w literaturze twierdzeniem Minkowskiego.

Lemat 2.7 *Niech $K \subset \mathbb{R}^n$ będzie wypukłym podzbiorem przestrzeni euklidesowej, takim że jeżeli $x \in K$, to $-x \in K$. Niech L będzie dowolną kratą w $\mathbb{R}^n$. Wówczas, jeżeli*

$$vol(K) > 2^n vol(L),$$

to K zawiera niezerowy punkt kraty L.

Dowód: Rozważmy rzutowanie

$$p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/L.$$

Niech $K/2 = \{(x/2) \mid x \in K\}$. Ponieważ $vol(K/2) = \frac{1}{2^n} vol(K)$, więc z założenia mamy

$$vol(K/2) > vol(L).$$

Stąd obcięcie p do $K/2$ nie jest odwzorowaniem różnowartościowym. Oznacza to istnienie elementów $(x/2), (y/2) \in K/2$, takich że $p(x/2) = p(y/2)$. W konsekwencji $0 \neq (x/2) - (y/2) \in L$. Jednocześnie punkt $(x/2 - y/2)$ jest środkiem odcinka łączącego punkt x z punktem $-y$ i, co wynika z własności zbioru K, jego elementem. To kończy dowód lematu.

□

Oznaczmy przez $B(r)$ domkniętą kulę o promieniu r. Niech

$$\omega_n = \frac{vol(B(r))}{r^n}.$$

Z ostatniego lematu mamy, że dla $r^n > \frac{2^n}{\omega_n}$ i kraty L o objętości jeden, zbiór $B(r) \cap L$ jest niepusty. Stąd dla c_n określonego równością

$$c_n = \frac{4}{(\omega_n)^{\frac{2}{n}}}$$

ma miejsce poniższy fakt.

Fakt: *Istnieje liczba c_n, taka że każda krata $L \subset \mathbb{R}^n$ o objętości jeden zawiera punkt $x_0 \neq 0$, spełniający nierówność*

$$< x_0, x_0 > \; \leq \; c_n.$$

Do sformułowania następnego lematu będzie nam potrzebna definicja.

Definicja 2.5 Niech $\rho, \rho' : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ oznaczają symetryczne odwzorowania dwuliniowe (formy kwadratowe). Mówimy, że ρ i ρ' są izomorficzne, jeżeli istnieje izomorfizm grup $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$, taki że $\forall m, n \in \mathbb{Z}^n, \;\; \rho(m,n) = \rho'(f(m), f(n))$.

Lemat 2.8 (twierdzenie Eisensteina, Hermite, Jordana) *Istnieje tylko skończenie wiele, z dokładnością do izomorfizmu, symetrycznych, niezdegenerowanych i dodatnio określonych odwzorowań dwuliniowych z* $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n$ *do* $\mathbb{Z}$.

Dowód: Będziemy stosować indukcję. Dla $n = 1$ dowód jest oczywisty.

Ponadto, z tego co powiedzieliśmy powyżej, wystarczy udowodnić nasz lemat dla krat o objętości jeden. Załóżmy, że lemat jest prawdziwy dla wymiarów $< n$. Niech $L \subset \mathbb{R}^n$ będzie dowolną kratą o objętości jeden i

$$L_0 = \{y \in L \mid \langle x_0, y\rangle \equiv 0 mod \langle x_0, x_0\rangle\},$$

gdzie x_0 jest elementem z powyższego faktu. Dla $y \in L_0$, mamy

$$\langle y, x_0\rangle / \langle x_0, x_0\rangle \in \mathbb{Z}.$$

Stąd element $y - (\langle y, x_0\rangle/\langle x_0, x_0\rangle)x_0$ należy do L_0 i jest ortogonalny do x_0. Zatem L_0 jest ortogonalną sumą prostą podprzestrzeni $X =$ gen$< x_0 >$ i $X^{\perp} = \{x \in L_0 \mid \langle x, x_0\rangle = 0\} = X_1$. Tutaj gen$< x_0 >$ oznacza podprzestrzeń generowaną przez element x_0. Z założenia indukcyjnego wynika, że lemat jest prawdziwy dla X i X_1. Stąd jest tylko skończona ilość izomorficznych form kwadratowych na L_0. Ponieważ indeks $\mid L : L_0 \mid$ spełnia nierówność

$$\mid L : L_0 \mid \leq \langle x_0, x_0\rangle < c_n,$$

więc liczba form kwadratowych na kracie L jest także ograniczona.

□

Aby zakończyć dowód drugiego twierdzenia Bieberbacha, zauważmy, że dla danego H modułu $\mathbb{Z}^n$ ilość krótkich ciągów dokładnych

$$0 \to \mathbb{Z}^n \to \Gamma \to H \to 0$$

jest ograniczona (zob. [5, wniosek 10.12, s. 373]) liczbą elementów grupy skończonej $H^2(H, \mathbb{Z}^n)$. To kończy dowód drugiego twierdzenia Bieberbacha.

□

W celu przeprowadzenia dowodu trzeciego twierdzenia Bieberbacha załóżmy, że mamy izomorfizm $h : \Gamma \to \Gamma'$ dwóch grup krystalograficznych wymiaru n.

Obcięcie $h_{|}(\Gamma \cap \mathbb{R}^n)$ tego izomorfizmu do podgrupy translacji jednoznacznie wyznacza odwzorowanie liniowe reprezentowane przez macierz $A \in GL(n, \mathbb{R})$. Niech $(\gamma, a) \in \Gamma$. Połóżmy $h(\gamma, a) = (r, c) \in \Gamma'$. Mamy

$$h((\gamma, a)(I, e_i)(\gamma^{-1}, -\gamma^{-1}a)) = (I, A\gamma(e_i)).$$

Z definicji $rA\gamma(e_i) = A\gamma(e_i)$, dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Stąd $r = A\gamma A^{-1}$. Sprzęgając izomorfizm h, przez odpowiednią macierz z grupy $GL(n, \mathbb{R})$, możemy przyjąć, że macierz A jest identycznością. Niech $h(\gamma, a) = (\gamma, a') \in \Gamma'$. Zwykle $a \neq a'$. Połóżmy $\gamma'' = (\gamma, a - a')$. Łatwo udowodnić, że odwzorowanie $\bar{h} : \Gamma \to A(n)$, zdefiniowane wzorem $\bar{h}(\gamma, a) = \gamma''$, jest homomorfizmem i $ker\bar{h} = \Gamma \cap \mathbb{R}^n$. Stwierdzenie 1.8 zapewnia istnienie punktu stałego $x_0 \in \mathbb{R}^n$, działania skończonej grupy liniowej $\bar{h}(\Gamma)$ na przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Mamy $x_0 = \gamma''(x_0) = \gamma(x_0) + a - a'$. Stąd $a = -\gamma(x_0) + a' + x_0$, dla wszystkich $\gamma \in \Gamma$. W końcu, dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^n$, otrzymujemy

$$(I, x_0)(\gamma, a')(I, -x_0)x = (I, x_0)(\gamma(x - x_0) + a') =$$

$$\gamma(x) - \gamma(x_0) + a' + x_0 = (\gamma, a)x.$$

Zatem $(I, x_0)\Gamma'(I, -x_0) = \Gamma$ (por. [62, s. 123]). Stąd izomorfizm h ma żądane własności, tzn. jest sprzężeniem w grupie $A(n)$.

$\square$

Jako dodatek do twierdzeń Bieberbacha, udowodnimy dwa stwierdzenia o własnościach skończonych grup macierzowych. Chociaż drugie jest łatwym wnioskiem z lematów w dowodzie drugiego twierdzenia Bieberbacha, przytaczamy je ze względu na interesujący dowód.

Stwierdzenie 2.1 (twierdzenie Jordana) *Istnieje liczba $\nu(n)$, taka że dowolna podgrupa skończona F grupy ortogonalnej $O(n)$ ma normalną podgrupę abelową $A(F)$ indeksu mniejszego od $\nu(n)$.*

Dowód: Niech $U = B(I, \epsilon)$ będzie *stabilnym* otoczeniem identyczności grupy $O(n)$ i $U' = B(I, \frac{\epsilon}{2})$. Połóżmy $\nu(n)$ tak, aby $\mu(U') > \frac{1}{\nu(n)}$. Tutaj $\mu()$ oznacza miarę Haara na $O(n)$. Ponadto niech $A(F) =< U \cap F >$. Z lematu 2.3(1) wynika, że podgrupa $A(F)$ jest normalna, a z lematu 2.4 – że jest także abelowa. Z założenia $F/A(F) = \{[f_1], [f_2], \ldots, [f_m]\}$, gdzie $[f]$ oznacza klasę abstrakcji elementu $f \in F$. Z definicji, jeżeli $[f_i] \neq [f_j]$, to $f_i U' \cap f_j U' = \emptyset$. Stąd

$$m\mu(U') = \Sigma_{i=1}^{m} \mu(f_i U') \leq 1$$

i $\mid F/A(F) \mid = m \leq \frac{1}{\mu(U')} < \nu(n)$.

□

Stwierdzenie 2.2 *Istnieje tylko skończona liczba parami nieizomorficznych, skończonych podgrup grupy $GL(n, \mathbb{Z})$.*

Dowód [24]: Niech p oznacza nieparzystą liczbę pierwszą. Udowodnimy, że jądro naturalnego homomorfizmu

$$\phi : GL(n, \mathbb{Z}) \rightarrow GL(n, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

jest beztorsyjne. Niech macierz $A \neq I$ należy do kerϕ. Mamy $A = I + pB$, gdzie $B \in M(n, \mathbb{Z})$ *. Przypuśćmy, że istnieje liczba pierwsza q, taka że

$$A^q = (I + pB)^q = I + pqB + \binom{q}{2} p^2 B^2 + \cdots + p^q B^q = I.$$

Po redukcji otrzymujemy

$$qB + \binom{q}{2} pB^2 + \binom{q}{3} p^2 B^3 + \cdots + p^{q-1} B^q = 0.$$

Niech α będzie maksymalną liczbą o takiej własności, że p^α dzieli wszystkie współczynniki macierzy B. Ponieważ każdy wyraz macierzy pB^2 jest podzielny przez $p^{2\alpha+1}$, więc elementy macierzy qB są podzielne przez $p^{2\alpha+1}$. Stąd jeżeli $p \neq q$, to z maksymalności α mamy $2\alpha + 1 \leq \alpha$, co jest niemożliwe. Jeżeli natomiast $p = q$, to $2\alpha \leq \alpha$ i $\alpha = 0$. Ponadto mamy

$$B + \binom{p}{2} B^2 + \binom{p}{3} pB^3 + \cdots + p^{p-2} B^p = 0.$$

Ponieważ liczba pierwsza p jest nieparzysta, więc $p \mid \binom{p}{2}$ i p dzieli pozostałe składniki ostatniej sumy. Stąd p dzieli wyrazy macierzy B i $\alpha \geq 1$. Otrzymana sprzeczność dowodzi beztorsyjności jądra kerϕ. W szczególności, każda skończona podgrupa grupy $GL(n, Z)$ ma trywialny przekrój z jądrem ϕ i jest izomorficzna z pewną podgrupą grupy skończonej $GL(n, \mathbb{Z}_3)$.

□

*$M(n, \mathbb{Z})$ oznacza zbiór macierzy kwadratowych stopnia n o wyrazach całkowitych.

Przykład 2.2 Niech $\Gamma \subset E(n)$ będzie beztorsyjną grupą krystalograficzną. Przestrzeń orbit $\mathbb{R}^n/\Gamma$ jest rozmaitością. Jeżeli pominiemy założenie beztorsyjności, to przestrzeń orbit $\mathbb{R}^n/\Gamma$ nazywamy orbifoldem.

Rozmaitości (orbifoldy)zdefiniowane w powyższym przykładzie nazywają się *płaskimi.* Nazwa ma związek z geometrią Riemanna, w której przestrzeń euklidesowa $\mathbb{R}^n$ ma krzywiznę sekcyjną zero, co potocznie nazywa sie płaskością (zob. [60]).

W algebrze liniowej orientacją przestrzeni wektorowej nazywamy wybór bazy. Dwie orientacje są zgodne, jeśli macierz przejścia z jednej bazy do drugiej ma dodatni wyznacznik.

Definicja 2.6 Rozmaitość nazywamy orientowalną, jeżeli istnieje atlas, w którym wszystkie funkcje przejścia zachowują wybraną orientację przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Przykład 2.3 Rozmaitości $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{C}P^n, S^n, T^n$ są orientowalne. Rozmaitość $\mathbb{R}P^n$ oraz butelka Kleina nie są orientowalne.

Kończąc tę część wprowadźmy jeszcze jedno kluczowe określenie.

Definicja 2.7 Beztorsyjną grupę krystalograficzną nazywamy grupą Bieberbacha.

Ćwiczenie 2.1 Udowodnić, że jeżeli ciągłe odwzorowanie $f : X \to Y$ pomiędzy przestrzeniami topologicznymi jest domknięte i 'na', to X jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy Y jest zwarta.

Ćwiczenie 2.2 Udowodnić, że jeżeli Γ jest beztorsyjną grupą krystalograficzną wymiaru n, to odwzorowanie rzutowania (ilorazowe)

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\Gamma$$

jest nakryciem. Ponadto przestrzeń orbit $\mathbb{R}^n/\Gamma$ jest rozmaitością.

Ćwiczenie 2.3 1. Udowodnić, że jeśli $G \subset O(n)$ jest podgrupą, to jej domknięcie $\overline{G}$ jest także podgrupą grupy $O(n)$.

2 (por. ćwiczenie 2.4 (5)). Opisać dyskretne podgrupy grupy $\mathbb{R}^n$. Kiedy taka podgrupa jest kozwarta?

Ćwiczenie 2.4 1. Udowodnić, że maksymalna spójna abelowa podgrupa grupy $O(n)$ jest torusem, tzn. $(S^1)^k$, dla pewnego $k \in \mathbb{N}$.

2. Udowodnić, że jeżeli G jest domkniętą podgrupą grupy ortogonalnej $O(n)$, to G_0 jest jej dzielnikiem normalnym o skończonym indeksie (por. [1, twierdzenie 2.26-7]).

3. Niech $\Gamma \subset E(n)$ będzie podgrupą grupy izometrii przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Udowodnić, że $(\overline{\Gamma\mathbb{R}^n}) = \overline{\Psi(\Gamma)} \times \mathbb{R}^n$, gdzie $\Psi : E(n) \to O(n)$, jest rzutowaniem na pierwszą współrzędną.

4. Udowodnić, że dla dowolnego elementu $(A, a) \in E(n)$ istnieje $b \in \mathbb{R}^n$, takie że $t_b(A, a)t_{-b} = (A, c)$ i $A(c) = c$.

5. Udowodnić, że dyskretna i kozwarta podgrupa $\mathbb{R}^n$ jest izomorficzna z $\mathbb{Z}^n$.

Ćwiczenie 2.5 1. Niech $G_1 \subset G \subset E(n)$ będzie ciągiem podgrup. Udowodnić, że jeżeli G jest kozwarta, $G_1 \trianglelefteq G$ o skończonym indeksie, to G_1 jest kozwartą podgrupą grupy $E(n)$.

2. Niech Γ będzie podgrupą grupy $E(n)$. Udowodnić, że funkcja $F : \mathbb{R}^n/\Gamma \to \mathbb{R}$, zdefiniowana wzorem $F([x]) = inf_{\gamma\in\Gamma}\{|| \gamma x ||\}$, jest dobrze zdefiniowana i ciągła.

Ćwiczenie 2.6 Udowodnić, że w twierdzeniu Zassenhausa maksymalność podgrupy $\mathbb{Z}^n$ w grupie Γ jest równoważna wierności reprezentacji holonomii h_Γ, zdefiniowanej w dowodzie twierdzenia.

Ćwiczenie 2.7 [17, ćwiczenie 6.7, s. 38] Pokazać, że każdą parę $(\mathbb{Z}^n, \rho)$, gdzie ρ jest odpowiednią formą, możemy traktować jak kratę w $\mathbb{R}^n$ o objętości jeden, a ρ jako iloczyn skalarny $\langle , \rangle$ w $\mathbb{R}^n$.

Ćwiczenie 2.8 [17, ćwiczenie 6.8, s. 38] Niech L i L_0 będą kratami z lematu 2.8, a x_0 punktem z L zdefiniowanym przed definicją 2.5. Pokazać, że

$$| L : L_0 | < \langle x_0, x_0 \rangle.$$

Ćwiczenie 2.9 Udowodnić, że powyżej (w dowodzie trzeciego twierdzenia Bieberbacha) zdefiniowane odwzorowanie $\overline{h} : \Gamma \to A(n)$ jest homomorfizmem i $\ker \overline{h} = \Gamma \cap \mathbb{R}^n$.

Ćwiczenie 2.10 Uzupełnić dowód twierdzenia Jordana.

3. Metody klasyfikacji

Opiszemy teraz beztorsyjne grupy krystalograficzne, wymiaru dwa i trzy. Są tylko dwie dwuwymiarowe płaskie rozmaitości – torus i butelka Kleina (zob. przykład 2.1).

W wymiarze trzy mamy dziesięć płaskich rozmaitości. Będziemy opisywać je kolejno. Jest sześć grup Bieberbacha wymiaru trzy z cyklicznymi grupami holonomii (zob. na przykład [60, s. 125]) – trzy (jedna orientowalna) z grupą holonomii $\mathbb{Z}_2$ i po jednej (wszystkie orientowalne) z grupą holonomii, odpowiednio, $\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6$. Ponadto mamy orientowalny torus i trzy grupy Bieberbacha wymiaru trzy z grupą holonomii $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (jedna orientowalna).

Niech $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Definiujemy

$$\Gamma_1 =< (A_1, (1/2, 0, 0)), (I, (0, 1, 0)), (I, (0, 0, 1)) >\subset E(3).$$

Orientowalny platycosm $\mathbb{R}^3/\Gamma_1$, z grupą holonomii $\mathbb{Z}_2$, jest nazywany * *dicosm* (zob. [22]). Odpowiada on rozmaitości oznaczonej $\mathcal{G}_1$ w [60].

Niech $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Definiujemy

$$\Gamma_2 =< (A_2, (1/2, 0, 0)), (I, (0, 1, 0)), (I, (0, 0, 1)) >\subset E(3).$$

Nieorientowalny platycosm $\mathbb{R}^3/\Gamma_2$, z grupą holonomii $\mathbb{Z}_2$, jest nazywany *first amphicosm* ([22]; $\mathcal{B}_1$ w [60]).

Niech $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Definiujemy

$$\Gamma_3 =< (A_3, (1/2, 0, 0)), (I, (0, 1, 0)), (I, (0, 0, 1)) >\subset E(3).$$

*Według J. Conwaya [22], nasz wszechświat (*cosmos*) zbudowany jest z 3-rozmaitości płaskich, tzw. *platycosms*.

Nieorientowalny platycosm $\mathbb{R}^3/\Gamma_3$, z grupą holonomii $\mathbb{Z}_2$, jest nazywany *second amphicosm* ([22]; $\mathcal{B}_2$ w [60]).

Niech $C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Definiujemy

$$\Gamma_4 =< (C_1, (1/2, 0, 0)), (C_2, (0, 0, 1/2)), (I, (0, 1, 0)) >\subset E(3).$$

Nieorientowalny platycosm $\mathbb{R}^3/\Gamma_4$, z grupą holonomii $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, jest nazywany *first amphidicosm* ([22]; $\mathcal{B}_3$ w [60]).

Niech $D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Definiujemy

$$\Gamma_5 =< (D_1, (1/2, 1/2, 0)), (D_2, (0, 0, 1/2)), (I, (0, 1, 0)) >\subset E(3).$$

Nieorientowalny platycosm $\mathbb{R}^3/\Gamma_5$, z grupą holonomii $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, jest nazywany *second amphidicosm* ([22]; $\mathcal{B}_4$ w [60]).

Niech $A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Definiujemy

$$\Gamma_6 =< (A_6, (1/3, 0, 0)), (I, (0, 1, 0)), (I, (0, 0, 1)) >\subset E(3).$$

Orientowalny platycosm $\mathbb{R}^3/\Gamma_6$, z grupą holonomii $\mathbb{Z}_3$, jest nazywany *tricosm* ([22]; $\mathcal{G}_3$ w [60]).

Niech $A_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Definiujemy

$$\Gamma_7 =< (A_7, (1/4, 0, 0)), (I, (0, 1, 0)), (I, (0, 0, 1)) >\subset E(3).$$

Orientowalny platycosm $\mathbb{R}^3/\Gamma_7$, z grupą holonomii $\mathbb{Z}_4$, jest nazywany *tetracosm* ([22]; $\mathcal{G}_4$ w [60]).

Niech $A_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Definiujemy

$$\Gamma_8 =< (A_8, (1/6, 0, 0)), (I, (0, 1, 0)), (I, (0, 0, 1)) >\subset E(3).$$

Orientowalny platycosm $\mathbb{R}^3/\Gamma_8$, z grupą holonomii $\mathbb{Z}_6$, jest nazywany *hexacosm* ([22]; $\mathcal{G}_5$ w [60]).

Niech $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Definiujemy

$$\Gamma_9 =< (B_1, (1/2, 1/2, 0)), (B_2, (0, 1/2, 1/2)) >\subset E(3).$$

Orientowalny platycosm $\mathbb{R}^3/\Gamma_9$, z grupą holonomii $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, jest nazywany *didicosm* ([22]; $\mathcal{G}_6$ w [60]).

Niech

$$\Gamma_{10} = \mathbb{Z}^3.$$

$\mathbb{R}^3/\Gamma_{10}$ jest torusem nazywanym *cubical torocosm* [22].

Wprowadzimy teraz pojęcie pierwszej grupy kohomologii. Niech G będzie dowolną grupą, M zaś G-modułem. Zdefiniujmy grupę $HS(G, M)$ homomorfizmów skrzyżowanych jako zbiór

$$\{f : G \to M \mid \forall g_1, g_2 \in G, f(g_1 g_2) = g_1 f(g_2) + f(g_1)\},$$

z działaniem dodawania. Ma ona podgrupę $HSG(G, M)$ homomorfizmów skrzyżowanych głównych

$$\{f : G \to M \mid \exists a \in M, \forall g \in G, f(g) = ga - a\}.$$

Definiujemy

$$H^1(G, M) = HS(G, M)/HSG(G, M).$$

Z długiego ciągu dokładnego dla kohomologii, który pochodzi od krótkiego ciągu dokładnego G-modułów

$$0 \to \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \to 0,$$

mamy izomorfizm $H^1(G, \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n) \simeq H^2(G, \mathbb{Z}^n)$ (zob. [5, s. 364]).

Przypomnijmy, że z dowolną grupą krystalograficzną Γ jest związany krótki ciąg dokładny grup (zob. twierdzenie 2.2)

$$0 \to \mathbb{Z}^n \to \Gamma \xrightarrow{p} G \to 0,$$

gdzie podgrupa $\mathbb{Z}^n$ jest maksymalną podgrupą abelową, a G – skończoną. Powyższy ciąg definiuje tak zwaną reprezentację holonomii

$$h_\Gamma : G \to GL(n, \mathbb{Z}).$$

Jest ona dana wzorem

$$\forall g \in G, h_\Gamma(g)(e_i) = \overline{g} e_i \overline{g}^{-1},$$

gdzie $e_i \in \mathbb{Z}^n, i = 1, 2, \ldots, n$, jest standardową bazą, a $p(\overline{g}) = g$, dla $\overline{g} \in \Gamma$.

Stwierdzenie 3.1 *Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy grupami krystalogarficznymi wymiaru n, o danej reprezentacji holonomii grupy skończonej G, a elementami grupy kohomologii $H^1(G, \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)$.*

Dowód ([5, s. 338, twierdzenie 10.7]): Niech $\Gamma \subset E(n)$ będzie grupą krystalograficzną wymiaru n, rozważaną powyżej. Łatwo zobaczyć, że jest ona zbiorem par $\{(A, s(A)+t)\}$, gdzie $A \in \Psi(\Gamma)$, a $t \in \Gamma \cap \mathbb{R}^n$. Z twierdzenia 2.2, z dokładnością do sprzężenia w grupie $GL(n, \mathbb{R})$, $\Psi(\Gamma)$ możemy utożsamić z obrazem reprezentacji holonomii h_Γ. Ponadto

$$s(A) \in \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{Q}^n \mid \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, 0 \leq a_i < 1\}.$$

Stąd grupie Γ przyporządkowaliśmy element $[s()] \in H^1(G, \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)$. I odwrotnie, każdy element $[s()] \in H^1(G, \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)$ definiuje zbiór elementów $\Pi = \{(A, s(A) + z)\} \subset E(n)$, gdzie $z \in \mathbb{Z}^n$. Udowodnienie, że Π jest grupą krystalograficzną pozostawiamy jako ćwiczenie.

$\square$

Podamy teraz bardzo proste kryterium beztorsyjności grupy krystalograficznej.

Twierdzenie 3.1 *Niech Γ będzie n-wymiarową grupą krystalograficzną, a $\alpha \in H^2(G, \mathbb{Z}^n)$ – kocyklem odpowiadającym grupie Γ. Wówczas Γ jest grupą beztorsyjną wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej grupy cyklicznej rzędu pierwszego p, $\mathbb{Z}_p \subset G$, wartość homomorfizmu obcięcia $res^G_{\mathbb{Z}_p}(\alpha) \in H^2(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}^n)$ jest różna od zera.*

Dowód: Homomorfizm $res^G_{\mathbb{Z}_p} : H^1(G, \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n) \to H^1(\mathbb{Z}_p, \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)$ oznacza homomorfizm obcięcia. Klasie kocyklu przyporządkowujemy klasę rozpatrywaną tylko na podgrupie $\mathbb{Z}_p \subset G$. Wykorzystujemy tutaj utożsamienie $H^1(G, \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n) \simeq H^2(G, \mathbb{Z}^n)$. Niech Γ będzie grupą beztorsyjną. Przypuśćmy, że istnieje element $g \in G$, rzędu pierwszego p, taki że $res^G_{<g>}(\alpha) = 0$. Jest to równoważne temu, że następujący krótki ciąg dokładny grup

$$0 \to \mathbb{Z}^n \to p^{-1}(< g >) \to < g > \simeq \mathbb{Z}_p \to 0$$

się rozszczepia. Z definicji oznacza to istnienie homomorfizmu grup

$$h : < g > \simeq \mathbb{Z}_p \to p^{-1}(< g >),$$

takiego że $ph = id_{(<g> \simeq \mathbb{Z}_p)}$, gdzie $< g > \subset G$ jest podgrupę cykliczną rzędu p generowaną przez element g. Stąd grupa Γ jest torsyjna. Otrzymaliśmy sprzeczność. Dowód w przeciwną stronę jest podobny.

□

Niech n oznacza liczbę naturalną. Z drugiego twierdzenia Bieberbacha wiemy, że istnieje tylko skończona liczba n-wymiarowych grup krystalograficznych, z dokładnością do izomorfizmu. Stąd problem klasyfikacji ma sens. Przedstawimy teraz trzy metody klasyfikacji i ich kolejne kroki.

Pierwsza metoda klasyfikacji – *algorytm Zassenhausa* [60]:

1. Opisać wszystkie skończone podgrupy grupy $GL(n, \mathbb{Z})$.

2. Opisać wszystkie G-moduły wierne $\mathbb{Z}^n$ *.

3. Obliczyć $H^2(G, \mathbb{Z}^n) = H^1(G, \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)$ dla wszystkich grup skończonych G z punktu 1 i G-modułów $\mathbb{Z}^n$ z punktu 2.

4. Określić, które grupy krystalograficzne z punktu 3, zdefiniowane przez elementy z grupy kohomologii, są izomorficzne.

Druga metoda klasyfikacji – *metoda indukcyjna Calabiego* [60], dla grup beztorsyjnych:

1. Sklasyfikować wszystkie beztorsyjne grupy krystalograficzne wymiaru $< n$.

2. Opisać wszystkie beztorsyjne grupy krystalograficzne Γ wymiaru n, których abelianizacja $\Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ jest skończona.

---

*Moduł nazywamy wiernym, jeśli odpowiadająca mu reprezentacja grupy $G \to GL(n, \mathbb{Z})$ jest wierna, czyli różnowartościowa.

3. Opisać wszystkie beztorsyjne grupy krystalograficzne Γ wymiaru n, zdefiniowane przez krótki ciąg dokładny grup

$$0 \to \Gamma_{n-1} \to \Gamma \to \mathbb{Z} \to 0,$$

gdzie Γ_{n-1} jest dowolną beztorsyjną grupą krystalograficzną wymiaru $(n-1)$.

Trzecia metoda klasyfikacji – *metoda niezmiennika Vasqueza* [51], dla grup beztorsyjnych, z daną skończoną grupą holonomii G:

1. Wyznaczyć wartość niezmiennika Vasqueza $n(G)$ i związanych z nim grup(y) Bieberbacha Γ_G wymiaru $n(G)$.

2. Opisać wszystkie beztorsyjne grupy krystalograficzne Γ wymiaru $n \geq n(G)$, występujące w ciągu dokładnym grup

$$0 \to \mathbb{Z}^{(n-n(G))} \to \Gamma \to \Gamma_G \to 0.$$

3. Sklasyfikować wszystkie grupy Bieberbacha wymiaru $\leq n(G)$ z grupą holonomii G.

Jeśli chodzi o pierwszą metodę, to jest ona w pewnym sensie najbardziej efektywna. Stosując ją, sklasyfikowano grupy krystalograficzne wymiaru mniejszego lub równego 5 (zob. [18]). Jeśli chodzi o wyższe wymiary, to znana jest (zob. [18]) lista grup beztorsyjnych wymiaru 6.

Wiadomo (zob. [41, s. 16]), że grupa kohomologii $H^2(G, \mathbb{Z}^6)$ może mieć rząd $2^{30} = 1073741824$, dla pewnej podgrupy skończonej, grupy $GL(6, \mathbb{Z})$. Stąd już w wymiarze 6 ilość grup krystalograficznych jest tak duża, że ich klasyfikacja nie jest możliwa bez pomocy komputera. W istocie pierwsza metoda jest pewnym algorytmem. Jej punkt 1 jest realizowalny w wymiarach mniejszych niż 30. Jeśli chodzi o punkt 3, to znany jest algorytm na wyznaczenie drugiej grupy kohomologii. W programie GAP [28] istnieje pakiet Carat, bazujący na *algorytmie Zassenhausa*, który pozwala znaleźć listę grup krystalograficznych, małych wymiarów, z daną grupą holonomii. Dokładniejsze omówienie tej metody można znaleźć w pracy W. Pleskena [43] (zob. także [18]).

Druga metoda klasyfikacji ma swoje źródło w poniższym stwierdzeniu E. Calabiego. Korzystając z niej udało mu się opisać wszystkie płaskie rozmaitości wymiaru cztery (por. [16] i [31]).

Stwierdzenie 3.2 (Calabiego) *Niech Γ będzie beztorsyjną grupą krystalograficzną wymiaru n. Ponadto niech będzie dany epimorfizm $f : \Gamma \to \mathbb{Z}$.*

Wówczas jądro Γ' tego homomorfizmu jest beztorsyjną grupą krystalograficzną wymiaru $n-1$.

Dowód: Mamy diagram 3.1. Ponieważ $\Gamma' \cap \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{Z}^n$, więc $\Gamma' \cap \mathbb{Z}^n$ jest wolną grupą abelową. Ponadto jest ona podgrupą o skończonym indeksie w grupie Γ'. Stąd, wobec beztorsyjności grupy Γ, grupa Γ' jest krystalograficzna. Pozostaje pokazać, że wymiar grupy Γ' jest równy $n-1$. Przypuśćmy, że wymiar grupy Γ' jest mniejszy od $(n-1)$. Wówczas z diagramu 3.1 wynika, że ranga grupy $(\mathbb{Z}^n/(\Gamma' \cap \mathbb{Z}^n)$ byłaby większa od 2. Co jest niemożliwe, ze względu na różnowartościowość homomorfizmu g. Analogicznie, gdyby wymiar grupy Γ' był równy n, to grupa $\mathbb{Z}^n/(\Gamma' \cap \mathbb{Z}^n)$ byłaby skończona lub trywialna. W pierwszym przypadku mamy sprzeczność z monomorficznością homomorfizmu g, a w drugim – z epimorficznością homomorfizmu f i maksymalnością podgrupy $\mathbb{Z}^n$ w grupie Γ.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \Gamma' \cap \mathbb{Z}^n & \to & \mathbb{Z}^n & \to & \mathbb{Z}^n/(\Gamma' \cap \mathbb{Z}^n) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow g & & \\
0 & \to & \Gamma' & \to & \Gamma & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & G' & \to & G & \to & G/G' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

Diagram 3.1

□

Aby przybliżyć drugą i trzecią metodę klasyfikacji grup krystalograficznych, będą nam potrzebne nowe definicje i pojęcia. Szczegółowo można się z nimi zapoznać na przykład w monografiach [5] i [12].

Definicja 3.1 Niech P, M, N będą R-modułami, gdzie R jest pierścieniem. W naszej sytuacji jest to najczęściej pierścień grupowy. Mówimy, że P jest modułem projektywnym, jeżeli dla dowolnego epimorfizmu $\pi : M \to N$ i homomorfizmu $\phi : P \to N$ istnieje odwzorowanie $\psi : P \to M$, takie że $\phi = \pi\psi$.

Przykład 3.1 Każdy moduł wolny jest projektywny.

Definicja 3.2 Rezolwentą projektywną F, R modułu $\mathbb{Z}$ nazywamy dowolny ciąg dokładny

$$\to F_i \to F_{i-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to \mathbb{Z} \to 0$$

modułów projektywnych F_i, gdzie $i = 0, 1, 2, \ldots$

Możemy teraz zdefiniować homologie grupy G. Niech $F \to \mathbb{Z}$ będzie G-rezolwentą projektywną trywialnego G-modułu $\mathbb{Z}$.

Definicja 3.3

$$H_i(G, M) = H_i(F \otimes_G M),$$
$$H^i(G, M) = H^i(Hom_G(F, M)).$$

Przykład 3.2 Niech $C =< \sigma >$ będzie grupą cykliczną rzędu n, M – dowolnym C-modułem. Wówczas

$$H^2(C, M) = M^C/IM,$$

gdzie $IM = \{(1+\sigma+\sigma^2+\cdots+\sigma^{n-1})m \mid m \in M\}$, a $M^C = \{m \in M \mid \sigma m = m\}$.

Będzie nam potrzebny tzw. lemat Shapiro. Wprowadźmy pojęcie modułu indukowanego.

Definicja 3.4 ([12]) Niech $H \subset G$ będzie podgrupą grupy G i $[G : H] = n < \infty$. Niech M będzie dowolnym H-modułem. Wówczas

$$Ind_H^G M = \oplus_{g \in G/H} gM,$$

gdzie dla $\bar{g} \in G/H$ i $\bar{g_i} \in G/H, i = 1, 2, 3, \ldots, n$ mamy

$$\bar{g}(\bar{g_1}m_1, \bar{g_2}m_2, \ldots, \bar{g_n}m_n) = (g\bar{g_1}m_1, g\bar{g_2}m_2, \ldots, g\bar{g_n}m_n) \in \oplus_{g \in G/H} gM.$$

Ponadto działanie na ,,współrzędnych" jest następujące: niech $gg_i = g_j h$, wówczas $g(g_i m_i) = g_j h m_i$. Tutaj współrzędną ,,wyznacza" element $g_i, i = 1, 2, \ldots, n$.

Uwaga: Jeżeli grupy G i H są skończone, to G-moduł $Ind_H^G M$ jest oznaczany także przez $Coind_H^G M$.

Twierdzenie 3.2 (lemat Shapiro [12]) *Niech M, G, H będą jak powyżej. Wówczas*

$$H_*(H, M) \simeq H_*(G, Ind_H^G M)$$

oraz

$$H^*(H, M) \simeq H^*(G, Coind_H^G M).$$

Dowód: Zobacz [12, stwierdzenie 6.2].

□

Niech G będzie grupą skończoną, a $\mathcal{X}$ – zbiorem jej klas sprzężoności cyklicznych podgrup rzędu pierwszego p.

Definicja 3.5 Niech $n \geq 1$ będzie liczbą naturalną. G-kratą nazywamy dowolny G-moduł izomorficzny z beztorsyjną grupą abelową $\mathbb{Z}^n$.

Przykład 3.3 Następujący G-moduł

$$S = \oplus_{C \in \mathcal{X}} ind_C^G \mathbb{Z}$$

jest G-kratą.

Wprowadzimy teraz pojęcie, którego charakterystyka została podana w twierdzeniu 3.1.

Definicja 3.6 Element $\alpha \in H^2(G, \mathbb{Z}^n)$ nazywamy *specjalnym*, kiedy definiuje beztorsyjną grupę krystalograficzną.

Niech $h : M \to N$ oznacza dowolny G-homomorfizm ($\mathbb{Z}G$-homomorfizm) G-modułów M, N. Przez $h_* : H^2(G, M) \to H^2(G, N)$ oznaczamy homomorfizm indukowany z definicji, na grupach kohomologii grupy G.

Definicja 3.7 Niech M będzie dowolną G-kratą. G-krata L ma własność $\mathcal{S}$, jeżeli dla dowolnego elementu *specjalnego* $\alpha \in H^2(G, M)$ istnieje G-homomorfizm $h : M \to L$, taki że $h_*(\alpha) \in H^2(G, L)$ jest elementem *specjalnym.*

Stwierdzenie 3.3 *Zdefiniowana powyżej G-krata S ma własność $\mathcal{S}$.*

Dowód: Niech $C \in \mathcal{X}$ i $\alpha \in H^2(G, M)$ będzie elementem *specjalnym.* Na początek udowodnimy istnienie C-homomorfizmu $\phi_C : M \to \mathbb{Z}$ o własności $(\phi_C)_*(res^G_C(\alpha)) \neq 0$. Niech $h : M \to M$ będzie homomorfizmem zdefiniowanym wzorem

$$h(m) = \Sigma_{g \in C} gm.$$

Zdefiniujmy krótki ciąg dokładny G-modułów

$$0 \to kerh \to M \to h(M) \to 0.$$

Łatwo pokazać, że $(h(M))^C = h(M)$ i $(kerh)^C = 0$. Stąd odwzorowanie $h_* : H^2(C, M) \to H^2(C, h(M))$ jest injekcją. Wynika to natychmiast z długiego ciągu dokładnego kohomologii dla powyższego krótkiego ciągu dokładnego modułów. Możemy zatem przyjąć, że grupa C działa trywialnie na M. Następnie wybierzmy taką bazę w kracie M, że istnieje C izomorfizm $M = \oplus_{i \in I} \mathbb{Z}$. Stąd mamy izomorfizm $H^2(C, M) = \oplus_{i \in I} H^2(C, \mathbb{Z})$, gdzie I jest zbiorem skończonym. Możemy więc zdefiniować C-rzutowanie $\phi_C : M \to \mathbb{Z}$, takie że element $(\phi_C)_*(res^G_C(\alpha)) \in H^2(C, \mathbb{Z})$ ma rząd p. Z izomorfizmu odpowiedniości Frobeniusa (por. [48, twierdzenie 13, s. 77]) mamy

$$\pi_* : Hom_{\mathbb{Z}G}(M, ind^G_C \mathbb{Z}) \to Hom_{\mathbb{Z}C}(res^G_C M, \mathbb{Z}).$$

Niech $\psi_C \in Hom_{\mathbb{Z}G}(M, ind^G_C \mathbb{Z})$ będzie π_*-odpowiednikiem ϕ_C. Wówczas

$$\pi_*(\psi_C)_*(res^G_C \alpha) = (\phi_C)_*(res^G_C \alpha) \neq 0$$

i $(\psi_C)_*(res^G_C \alpha) \neq 0$. Definiujemy

$$h = \oplus_{C \in \mathcal{X}} \psi_C : M \to S.$$

Musimy pokazać, że $h_*(res^G_C \alpha) \neq 0$ w grupie $H^2(C, S)$ dla wszystkich $C \in \mathcal{X}$, gdyż $(res^G_C h_*(\alpha) = h_*(res^G_C \alpha)$. W tym celu wystarczy zauważyć, że $(\psi_C)_*(res^G_C \alpha) \neq 0$ w grupie $H^2(C, ind^G_C \mathbb{Z})$.

$\square$

Na podstawie stwierdzenia Calabiego (stwierdzenie 3.2) oczywiste stają się punkty 1 i 3 drugiej metody klasyfikacji grup krystalograficznych. Jeśli chodzi o punkt 2 tej metody, to dotyczy on grup krystalograficznych nie mających epimorficznego odwzorowania na grupę $\mathbb{Z}$. W przypadku beztorsyjnym istnieje ich poniższa charakteryzacja.

Stwierdzenie 3.4 [30] *Niech Γ będzie beztorsyjną grupą krystalograficzną z grupą holonomii G i maksymalną podgrupą abelową $\mathbb{Z}^n$. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) grupa $\Gamma/[\Gamma,\Gamma]$ jest skończona,

(ii) centrum grupy Γ jest trywialne,

(iii) $(\mathbb{Z}^n)^G = 0$, gdzie G działa na $\mathbb{Z}^n$ za pomocą reprezentacji holonomii.

Dowód: Jest oczywiste, że odpowiednia potęga nietrywialnego elementu centrum definiuje niezerowy element G-modułu $(\mathbb{Z}^n)^G$. Odwrotna implikacja jest również oczywista. To dowodzi równoważności (ii) oraz (iii). W artykule [30, wniosek 1.3], wykorzystując elementarne własności ciągu spektralnego kohomologii grup, związanego z krótkim ciągiem dokładnym grup

$$0 \to \mathbb{Z}^n \to \Gamma \to G \to 0,$$

udowodniono, że

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\Gamma/[\Gamma,\Gamma] \otimes \mathbb{Q}) = \operatorname{rank}(\mathbb{Z}^n)^{G\ *}.$$

Stąd otrzymujemy równoważność warunku (i) z warunkiem (iii).

$\square$

Definicja 3.8 Niech M będzie rozmaitością płaską o grupie podstawowej Γ. Liczbę całkowitą $\operatorname{rank} H_1(M,\mathbb{Z})$ nazywamy pierwszą liczbą Bettiego rozmaitości M (grupy Γ). Zwykle jest ona oznaczana przez $b_1(M)(b_1(\Gamma))$.

Okazuje sie, że istnieje pełna charakteryzacja grup holonomii beztorsyjnych grup krystalograficznych o trywialnym centrum. Została udowodniona w roku 1987 przez H. Hillera i C. H. Saha [30]. Kolejne dowody podali w roku 1989 W. Plesken [44] oraz G. Cliff i A. Weiss [19].

Twierdzenie 3.3 [30] *Skończona grupa G jest grupą holonomii beztorsyjnej grupy krystalograficznej z trywialnym centrum wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby pierwszej p, dzielącej rząd grupy G, jej p-podgrupa Sylowa nie jest cykliczna, a gdy jest cykliczna, to nie ma p-normalnego uzupełnienia.*

Zamiast dowodu, który można znaleźć w jednej z powyższych prac, podajmy przykład.

---

*Niech M będzie dowolną skończenie generowaną grupą abelową. Wówczas $\operatorname{rank} M = \dim_{\mathbb{Q}}(M \otimes \mathbb{Q})$.

Przykład 3.4 Niech Γ będzie beztorsyjną grupą krystalograficzną z cykliczną grupą holonomii C. Definiuje ona pewien element

$$\alpha \in H^2(C, M) = M^C/IM,$$

gdzie IM jest pewnym C-podmodułem M. Z definicji wynika, że beztorsyjność grupy Γ, przy jednoczesnej własności posiadania trywialnego centrum, nie jest możliwa. Stąd grupa $\Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ jest zawsze nieskończona.

Zajmiemy się teraz trzecią metodą klasyfikacji grup krystalograficznych. Pochodzi ona od pewnej konstrukcji topologicznej. Oznaczmy przez $\mathcal{M}$ płaską rozmaitość z $\pi_1(\mathcal{M}) = \Gamma$. Niech $T^k = \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$ będzie płaskim torusem z działającą na nim, poprzez izometrie, grupą Γ. Wówczas Γ działa, poprzez izometrie, na przestrzeni $\tilde{\mathcal{M}} \times T^k$, gdzie $\tilde{\mathcal{M}}$ jest uniwersalnym nakryciem rozmaitości $\mathcal{M}$. Łatwo pokazać, że przestrzeń ilorazowa $(\tilde{\mathcal{M}} \times T^k)/\Gamma$ jest płaską rozmaitością; będziemy ją nazywali *płaskotorusowym rozszerzeniem* rozmaitości $\mathcal{M}$. Przyjmujemy konwencję, że punkt jest 0-wymiarowym torusem, i stąd każda płaska rozmaitość może być *płaskotorusowym rozszerzeniem* samej siebie. W roku 1970 A. T. Vasquez udowodnił poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 3.4 [58] *Dla każdej skończonej grupy G istnieje liczba naturalna $n(G)$ o następującej własności: jeżeli $\mathcal{M}$ jest dowolną płaską rozmaitością, z grupą holonomii G, to $\mathcal{M}$ jest płaskotorusowym rozszerzeniem pewnej płaskiej rozmaitości wymiaru $\leq n(G)$.*

Cliff i Weiss [19] obliczyli wartość $n(G)$ dla dowolnej skończonej p-grupy. Okazuje się [51, twierdzenie 3], że niezmiennik Vasqueza można określić zgodnie z poniższą definicją.

Definicja 3.9 Niezmiennikiem Vasqueza nazywamy liczbę

$$n(G) = \min\{rank_{\mathbb{Z}}(L) \mid L \text{ jest } G\text{-kratą o własności } \mathcal{S}\}.$$

Niech L będzie G-kratą z definicji liczby $n(G)$, niech Γ będzie dowolną beztorsyjną grupą krystalograficzną wymiaru $n \geq n(G)$ z grupą holonomii G i maksymalną podgrupą abelową $\mathbb{Z}^n \subset \Gamma$. Z definicji mamy diagram 3.2 Ma on wszystkie kolumny i wiersze dokładne, a G-homomorfizm f istnieje z definicji liczby Vasqueza. Stąd wynika trzecia metoda klasyfikacji beztorsyjnych grup krystalograficznych z daną grupą holonomii. Niestety wartość niezmiennika Vasqueza jest znana tylko dla skończonych p-grup [19]. Ponadto wiadomo, że skończona grupa G ma własność $n(G) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy jej rząd jest iloczynem różnych liczb pierwszych [51]. Obliczenie jej nie jest łatwe. Można tutaj wspomnieć, że nawet wybitni matematycy, jak na przykład S.T.Yau, popełniali pomyłki przy jej obliczaniu.

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & ker f = \mathbb{Z}^{n-n(G)} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}^{n-n(G)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}^n \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \Gamma \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma_G \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Diagram 3.2

Jako ilustrację metod klasyfikacji, przeprowadzimy w sposób elementarny klasyfikacje dwuwymiarowych grup krystalograficznych. Zaczniemy od opisu skończonych podgrup grupy $GL(2,\mathbb{Z})$.

Stwierdzenie 3.5 *Niech $C_n \subset O(2)$ będzie cykliczną grupą obrotów rzędu n, a $D_n \subset O(2)$ – grupą dyhedralną rzędu $2n$, generowaną przez odbicie i obrót rzędu n. Jeżeli $G \subset GL(2,\mathbb{Z})$ jest grupą skończoną, to*

$$G = C_2, C_3, C_4, C_6, D_1, D_2, D_3, D_4, D_6.$$

Ponadto grupy D_1, D_2, D_3 są reprezentowane przez dwie klasy sprzężoności.

Dowód [35]: Niech G będzie dwuelementową podgrupą grupy $GL(2,\mathbb{Z})$ i $M \in G \setminus \{I\}$. Zajmiemy się bazą przestrzeni $\mathbb{R}^2$, w której jest przedstawiona macierz M. Jej całkowitoliczbowe kombinacje wyznaczają pewną kratę (dyskretną podgrupę) $L \subset \mathbb{R}^2$. Jest jasne, że $ML = L$. Z ograniczenia krystalograficznego (zob. ćwiczenie 3.8) wiemy, że $G = C_2$ lub M jest odbiciem. Niech $A = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid Mv = v\}$, a $B = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid Mv = -v\}$. Zauważmy, że A i B zawierają niezerowe elementy kraty L. Niech $0 \neq c \in L \setminus \{A \cup B\}$.

Wówczas element $c + Mc \in A$ i ponieważ $c \notin B$, więc jest niezerowy. Analogicznie, ponieważ $c \notin B$, więc element $c - Mc \in B$ też jest różny od zera. Niech $a \in A$ i $b \in B$ będą generatorami prostych A i B. Oznaczmy przez L_M kratę generowaną przez a i b. Zobaczmy, czy istnieje inna krata niezmiennicza dla G. Mamy $L_M \subset L$. Niech $c \in L \setminus L_M$. Mamy

$$(c + ma + nb) + M(c + ma + nb) = c + Mc + 2ma,$$

$$(c + ma + nb) - M(c + ma + nb) = c - Mc + 2nb,$$

gdzie $m, n \in \mathbb{Z}$. Stąd $c + Mc + 2ma = 2la + a$ lub $c + Mc + 2ma = 2la$ dla pewnego $l \in \mathbb{Z}$. W pierwszym przypadku, dla $n' = m - l$, spełniona jest równość

$$a = c + Mc + 2n' = (c + n'a + nb) + M(c + n'a + nb),$$

i zmieniając c na $c' = c + n'a + nb$, mamy $c' + Mc' = a$. Ponadto zachodzi $c' \equiv c \pmod{L_M}$. Natomiast w drugim przypadku $c + Mc + 2n'a = 0 = c' + Mc'$. Stąd $c' \in B$, co jest niemożliwe. Analogiczne rozumowanie można zastosować do elementu $c - Mc + 2nb$. Podsumowując, możemy założyć, że $c + Mc = a, c - Mc = b$. W konsekwencji $c = 1/2(a + b)$ i $L = gen\{c, Mc\}$. Stąd macierz M w bazie $\{a, b\}$ jest równa $D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, a w bazie $\{c, Mc\}$ ma postać $D_{1^*} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Łatwo pokazać, że macierze D_1 i D_{1^*} nie są sprzężone w grupie $GL(2, \mathbb{Z})$. Krata $L = \mathrm{gen}\{a, b\}$ jest nazywana prostokątną. Natomiast krata $L = \mathrm{gen}\{c, Mc\}$ jest nazywana rombową. Pomogą nam one opisać następne grupy.

Niech D_2 będzie grupą generowaną przez odbicia względem linii zawierających a i b, natomiast D_{2^*} – przez odbicia względem linii zawierających $c + Mc$ i $c - Mc$.

C_4 jest generowana przez obrót ρ rzędu cztery, a krata, z lematu Lagrange'a, (ćwiczenie 3.9), jest generowana przez $a \in L\setminus\{0\}$ i $\rho(a)$. Nazywamy ją kratą kwadratową.

D_4 jest grupą automorfizmów kraty kwadratowej. Niech a, b oznaczają boki dowolnego kwadratu na kracie. D_4 jest generowana przez obrót rzędu cztery, przekształcający a na b i b na $-a$, i odbicie względem prostej zawierającej a.

C_3 jest generowana przez obrót ρ rzędu trzy. Z twierdzenia Lagrange'a (ćwiczenie 3.9) wynika, że krata jest generowana przez $a, \rho(a)$. Wektory $a, \rho(a), \rho^2(a)$ wyznaczają trójkąt równoboczny. Jeżeli dodamy wektory

$$-a, -\rho(a), -\rho^2(a),$$

to otrzymamy sześciokąt. Kratę nazywamy sześciokątną.

D_3 jest grupą generowaną przez powyższy obrót rzędu trzy i odbicia względem trzech przekątnych sześciokąta.

D_{3^*} jest grupą generowaną przez obrót rzędu trzy i odbicia względem prostych przecinających środki przeciwległych boków sześciokąta.

C_6 definiujemy jako grupę obrotów rzędu sześć. Jej kratę otrzymujemy z twierdzenia Lagrange'a (ćwiczenie 3.9). Jest to sześciokątna krata L.

D_6 jest równa grupie automorfizmów $\mathrm{Aut}(L)$, gdzie L jest kratą sześciokątną.

$\square$

Przystąpmy do opisu i klasyfikacji grup krystalograficznych wymiaru dwa. Jak dobrze wiadomo (zob. np. [35]), jest ich 17 z dokładnością do izomorfizmu. Powyżej podaliśmy listę $\mathcal{A}$ wszystkich ewentualnych grup holonomii, to znaczy podgrup skończonych grupy $GL(2,\mathbb{Z})$. Korzystając ze związku pomiędzy rozszerzeniami grup a drugą grupą kohomologii, wystarczy obliczyć grupy kohomologii $H^2(G,\mathbb{Z}^2)$, dla $G \in \mathcal{A}$ i odpowiadającej jej kraty $\mathbb{Z}^2$. Mamy

$$H^2(C_i,\mathbb{Z}^2) = (\mathbb{Z}^2)^{C_i}/I\mathbb{Z}^2 = 0,$$

dla $i = 2,3,4,6$. Ponadto łatwo obliczyć, że $H^2(D_1,\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}_2, H^2(D_{1^*},\mathbb{Z}^2) = 0$. To daje nam 8 grup krystalograficznych, włączając torus $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Z definicji

$$D_2 = \{A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}.$$

Z teorii kohomologii grup $H^2(D_2,\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Elementy grupy kohomologii to $s_1(A) = [0,0], s_1(B) = [0,0]; s_2(A) = [1/2,0], s_2(B) = [0,1/2]; s_3(A) = [1/2,0], s_3(B) = [0,0]; s_4(A) = [0,0], s_4(B) = [0,1/2]$. Daje to cztery grupy krystalograficzne. Okazuje się, że dwie z nich są izomorficzne. Można sprawdzić, że są to grupy wyznaczone przez kocykle s_3 i s_4. Z definicji

$$D_{2^*} = \{A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}.$$

Ponieważ, $H^2(C, \mathbb{Z}^2) = 0$, dla dowolnej podgrupy dwuelementowej $C \subset D_{2^*}$, więc $H^2(D_{2^*}, \mathbb{Z}^2) = 0$. To definiuje jedną grupę krystalograficzną.

Zajmiemy się teraz grupą D_4. Z definicji wynika, że jest ona generowana przez macierz $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (obrót rzędu cztery) i macierz $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (odbicie względem prostej zawierającej element a). Obliczymy, że $H^2(D_4, \mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}_2$. To definiuje dwie grupy krystalograficzne. Pozostałe trzy mają grupy holonomii D_3, D_{3^*}, D_6. Ponieważ każda z nich wyznacza trywialną drugą grupę kohomologii, więc odpowiadające im grupy krystalograficzne to produkt półprosty tej grupy skończonej i $\mathbb{Z}^2$. Wystarczy wykorzystać znany fakt teorii kohomologii grup, że homomorfizm obcięcia do podgrupy Sylowa jest monomorfizmem (zob. [12, twierdzenie 10.3, s. 84]).

Stosując dokładnie te same metody, można opisać grupy krystalograficzne wymiaru trzy *. Dla wymiaru cztery i wyższych jest już niezbędny komputer (zob. komentarz przed stwierdzeniem 3.2).

Ćwiczenie 3.1 Pokazać, że jeżeli grupa podstawowa rozmaitości płaskiej należy do grupy $SO(n) \ltimes \mathbb{R}^n$, to rozmaitość jest orientowalna.

Ćwiczenie 3.2 Uzupełnić dowód twierdzenia 3.1 (por. [55, s. 17]).

Ćwiczenie 3.3 Udowodnić, że jeżeli w stwierdzeni 3.2 nie założymy beztorsyjności grupy Γ, to stwierdzenie jest nieprawdziwe.

Ćwiczenie 3.4 Udowodnić, że dla grupy skończonej G i jej podgrupy H mamy izomorfizmy G-modułów

$$Ind_H^G M \simeq \mathbb{Z}G \otimes_H M \simeq Hom_H(\mathbb{Z}G, M) \simeq Coind_H^G M,$$

gdzie M jest dowolnym G-modułem.

---

*Lista beztorsyjnych grup wymiaru trzy została podana na początku rozdziału 3.

Ćwiczenie 3.5 Udowodnić izomorfizm (odpowiedniość Frobeniusa, zob. [48, s. 77, twierdzenie 13])

$$\pi_* : Hom_{\mathbb{Z}G}(M, ind_C^G \mathbb{Z}) \to Hom_{\mathbb{Z}C}(res_C^G M, \mathbb{Z}),$$

gdzie $\pi : ind_C^G \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ jest rzutowaniem opisanym poniżej. Niech $\mathcal{X}$ będzie zbiorem klas sprzężoności podgrup cyklicznych rzędu p grupy G, gdzie p jest liczbą pierwszą. Niech $C \in \mathcal{X}$ i niech $\Sigma_{g \in G/C} n_g gC \in ind_C^G \mathbb{Z}$. Definiujemy

$$\pi(\Sigma_{g \in G/C} n_g gC) = n_1.$$

Ćwiczenie 3.6 Udowodnić, że dowolna grupa skończona jest grupą holonomii, pewnej beztorsyjnej grupy krystalograficznej.

Ćwiczenie 3.7 Uzupełnić szczegóły dowodu stwierdzenia 3.4.

Ćwiczenie 3.8 (ograniczenie krystalograficzne) Opisać podgrupy skończone grupy $GL(2, \mathbb{Z})$.

Wskazówka: Każda taka grupa jest podgrupą $O(2)$.

Ćwiczenie 3.9 (lemat Lagrange'a) Niech $L \subset \mathbb{R}^2$ będzie dyskretną i kozwartą podgrupą (kratą). Wybierzmy element $a \in L \setminus \{0\}$ o minimalnej długości i element $b \in L \setminus \mathbb{R}a$ o minimalnej długości. Udowodnić, że zbiór $\{a, b\}$ generuje L.

Ćwiczenie 3.10 Udowodnić, że $H^2(D_2, \mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ i $H^2(D_4, \mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}_2$.

4. Grupy automorfizmów zewnętrznych

Niech Γ będzie dowolną grupą krystalograficzną. Jak dobrze wiemy, definiuje ona krótki ciąg dokładny

$$0 \to \mathbb{Z}^n \to \Gamma \xrightarrow{p} G \to 0,$$

gdzie $\mathbb{Z}^n$ jest wolną grupą abelową, a G jest grupą skończoną. Przypomnijmy, że powyższy ciąg definiuje tak zwaną reprezentację holonomii

$$h_\Gamma : G \to GL(n, \mathbb{Z}).$$

Jest ona dana wzorem

$$\forall g \in G, h_\Gamma(g)(e_i) = \bar{g} e_i \bar{g}^{-1},$$

gdzie $e_i \in \mathbb{Z}^n, i = 1, 2, \ldots, n$, jest standardową bazą, a $p(\bar{g}) = g$. Zobaczymy, że wiele własności grupy krystalograficznej Γ jest związanych z własnościami powyższej reprezentacji. Ponieważ $\mathbb{Z}^n$ jest maksymalną podgrupą abelową, więc reprezentacja holonomii jest wierna. Ponadto mamy oczywiste zawieranie grup

$$GL(n, \mathbb{Z}) \subset GL(n, \mathbb{Q}) \subset GL(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{C}).$$

Stąd reprezentacja holonomii jest także reprezentacją odpowiednio wymierną, rzeczywistą i zespoloną.

Przypomnijmy kilka faktów z teorii reprezentacji grup skończonych [48]. Każdą reprezentację możemy traktować jako odpowiedni G-moduł. Reprezentacja jest *nieprzywiedlna*, jeżeli jedynymi jej podreprezentacjami są ona sama i reprezentacja *zerowa*. Jeżeli rozpatrujemy reprezentację nad ciałem liczb zespolonych, to zachodzi poniższy lemat.

Lemat 4.1 (Schura) *Niech V będzie skończenie wymiarową nieprzywiedlną reprezentacją grupy skończonej nad ciałem liczb zespolonych. Niech $f : V \to V$ będzie niezerowym G-homomorfizmem reprezentacji. Wówczas f jest homotetią (mnożeniem przez skalar).*

Dowód: Niech λ oznacza pierwiastek wielomianu charakterystycznego odwzorowania f. Zbiór

$$\{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$$

jest niezerową G-podprzestrzenią przestrzeni V. Z założenia jest ona równa V. Stąd f jest homotetią.

$\square$

Dowolna reprezentacja, nad ciałem o charakterystyce zero, jest sumą prostą reprezentacji nieprzywiedlnych.

Definicja 4.1 [21], [48, s. 121] Niech T będzie $\mathbb{Q}$-nieprzywiedlną reprezentacją grupy skończonej. Z definicji wynika, że T jest sumą prostą $\mathbb{C}$-nieprzywiedlnych reprezentacji. Okazuje się, że każda z nich występuje z tą samą krotnością $m_{\mathbb{Q}}(T)$. Liczbę $m_{\mathbb{Q}}(T)$ nazywamy indeksem Schura reprezentacji T.

Przez $(Z^n)^G$ będziemy oznaczali G-podmoduł

$$\{x \in \mathbb{Z}^n \mid gx = h_\Gamma(g)x = x\}.$$

W przypadku reprezentacji nad ciałem k, $(k \otimes \mathbb{Z}^n)^G$ jest nie tylko podmodułem, ale także składnikiem prostym kG-modułu $k \otimes \mathbb{Z}^n$. Oznacza to istnienie pewnego kG-podmodułu $N \subset k \otimes \mathbb{Z}^n$, takiego że $k \otimes \mathbb{Z}^n = (k \otimes \mathbb{Z}^n)^G \oplus N$. Niestety, nie jest to na ogół prawdą w przypadku G-modułu $\mathbb{Z}^n$. Badanie grup krystalograficznych jest ściśle związane z teorią reprezentacji nad pierścieniem liczb całkowitych $\mathbb{Z}$.

Przykład 4.1 Niech $G = \mathbb{Z}_2$; rozpatrzmy jej całkowitoliczbową reprezentację $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Łatwo pokazać, że $(\mathbb{Z}^2)^{\mathbb{Z}_2}$ nie jest składnikiem prostym $\mathbb{Z}^2$.

Niech N oznacza normalizator obrazu $h_\Gamma(G)$ w grupie $GL(n, \mathbb{Z})$. Z definicji

$$N = \{X \in GL(n.\mathbb{Z}) \mid \forall f \in h_\Gamma(G) \quad XfX^{-1} \in h_\Gamma(G)\}.$$

Działa on na grupie $H^2(G, \mathbb{Z}^n)$ za pomocą następującego wzoru

$$n * [c](g_1, g_2) = n^{-1}[c(ng_1n^{-1}, ng_2n^{-1})],$$

gdzie $[c] \in H^2(G, \mathbb{Z}^n), n \in N, g_1, g_2 \in G$. Element $[c]$ jest reprezentantem klasy abstrakcji kocyklu $c : G \times G \to \mathbb{Z}^n$ [5]. Można udowodnić (zob. [17]), że powyższe działanie jest poprawnie zdefiniowane, to znaczy nie zależy od wyboru reprezentanta kocyklu.

Dla $\alpha \in H^2(G, \mathbb{Z}^n)$, niech

$$N_\alpha = \{n \in N \mid n * \alpha = \alpha\}.$$

Przez $F : Aut(\Gamma) \to Aut(\mathbb{Z}^n)$ rozumiemy homomorfizm „obcięcia”. Łatwo zobaczyć, na podstawie definicji grupy krystalograficznej, że jest on dobrze zdefiniowany. W tym celu wystarczy skorzystać z własności, że $\mathbb{Z}^n$ jest podgrupą maksymalnie abelową. Niech $Aut^0(\Gamma) = kerF$. Głównym narzędziem tej części wykładu będzie poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 4.1 [17, twierdzenie 1.1, s. 172] *Niech* Γ *będzie grupą krystalograficzną. Wówczas diagram 4.1 jest przemienny i jego wszystkie wiersze i kolumny są dokładne.*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathbb{Z}^n/(\mathbb{Z}^n)^G & \to & Inn(\Gamma) & \to & G & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & Aut^0(\Gamma) & \to & Aut(\Gamma) & \xrightarrow{F} & N_\alpha & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & H^1(G, \mathbb{Z}^n) & \to & Out(\Gamma) & \to & N_\alpha/G & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0. & &
\end{array}$$

Diagram 4.1

Dowód: Przemienność jest oczywista. Dokładność środkowej kolumny i wiersza wynika z definicji. Dowód dokładności pozostałych wierszy i kolumn znajduje się w [17, s. 172].

□

Niech $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ będą płaskimi rozmaitościami wymiaru n. Jeżeli dyfeomorfizm $f : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ zachowuje koneksje Riemanna, to nazywamy go afinicznym. Przez $Aff(\mathcal{M}_1)$ będziemy oznaczali grupę afinicznych dyfeomorfizmów rozmaitości $\mathcal{M}_1$. Jest to grupa Liego (zob. [17]). W przypadku gdy $\mathcal{M}_1 = \mathbb{R}^n, Aff(\mathbb{R}^n) = A(n)$. Stąd mamy następującą równość

$$Aff(\mathcal{M}_1) = \{f : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_1 \mid \tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \in A(n)\}.$$

Tutaj $\tilde{f}$ oznacza „podniesienie" odwzorowania f do nakrycia uniwersalnego (zob. dowód następnego stwierdzenia). Naszym celem jest pokazanie związków pomiędzy grupą $Aff(\mathcal{M}_1)$ a grupą $Out(\pi_1(\mathcal{M}_1))$.

Stwierdzenie 4.1 *Oznaczmy przez Γ grupę podstawową rozmaitości $\mathcal{M}_1$.*

1. Niech

$$N(\Gamma) = \{n \in A(n) \mid \forall \gamma \in \Gamma, n\gamma n^{-1} \in \Gamma\}$$

oznacza normalizator grupy Γ w grupie $A(n) = GL(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$. Wówczas następujący ciąg grup

$$1 \to \Gamma \to N(\Gamma) \xrightarrow{\bar{f}} Aff(\mathcal{M}_1) \to 1$$

jest dokładny.

2. Niech

$$C(\Gamma) = \{c \in A(n) \mid \forall \gamma \in \Gamma, c\gamma = \gamma c\}$$

oznacza centralizator grupy Γ w grupie $A(n)$. Wówczas następujący ciąg grup

$$1 \to C(\Gamma) \to N(\Gamma) \xrightarrow{g} Aut(\Gamma) \to 1$$

jest dokładny.

Dowód: Funkcję $\bar{f}$ definiujemy wykorzystując nakrycie uniwersalne rozmaitości $\mathcal{M}_1$ *. W celu pokazania, że $\bar{f}$ jest surjekcją, wybierzmy $\phi \in Aff(\mathcal{M}_1)$. Z definicji nakrycia uniwersalnego wynika istnienie podniesienia $\bar{\phi} \in A(n)$ odwzorowania ϕ. Jest jasne, że $\bar{f}(\bar{\phi}) = \phi$. Musimy jeszcze pokazać, że $\bar{\phi} \in N(\Gamma)$. Niech $p : \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}_1$ oznacza nakrycie uniwersalne, $\sigma \in \Gamma$, a $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Mamy

$$p[\bar{\phi}(\sigma x_0)] = \phi[p(\sigma x_0)] = \phi[p(x_0)] = p[\bar{\phi}(x_0)].$$

* $x \in \mathcal{M}_1$ jest „podnoszony" do uniwersalnego nakrycia $\mathbb{R}^n$, następnie odwzorowywany przez odpowiedni element z $N(\Gamma)$ i rzutowany na $\mathcal{M}_1$.

Zatem $\bar{\phi}(\sigma x_0)$ i $\bar{\phi}(x_0)$ są w tej samej orbicie $\exists \sigma' \in \Gamma$, takie że $\bar{\phi}(\sigma x_0) = \sigma' \bar{\phi}(x_0)$. Podsumowując widzimy, że odwzorowania $\bar{\phi}\sigma$ i $\sigma'\bar{\phi}$ są podniesieniami (nakryciami) ϕ i są równe w punkcie x_0. Stąd są równe i $\bar{\phi} \in N(\Gamma)$. W celu zakończenia dowodu musimy pokazać, że $ker \bar{f} = \Gamma$. Niech $\bar{\phi} \in N(\Gamma)$ indukuje identyczność na $\mathcal{M}_1$. Z teorii nakryć wiemy, że $\bar{\phi} \in \Gamma$. Zawieranie odwrotne jest oczywiste.

Punkt 2 stwierdzenia wynika z trzeciego twierdzenia Bieberbacha.

□

Do dowodu głównego rezultatu będzie nam potrzebny poniższy lemat.

Lemat 4.2 *Niech Γ będzie powyższą grupą Bieberbacha i niech $\mathcal{Z}$ oznacza jej centrum, G – grupę holonomii, a $\mathbb{Z}^n$ – podgrupę translacji. Wówczas*

1. $C(\Gamma) \subset \mathbb{R}^n$,
2. $C(\Gamma) = (\mathbb{R}^n)^G$,
3. $\mathcal{Z} = C(\Gamma) \cap \Gamma = (\mathbb{Z}^n)^G$.

Dowód: Niech $(A, t) \in C(\Gamma)$ i $(I, s) \in \mathbb{Z}^n \subset \Gamma$. Z definicji centralizatora $C(\Gamma)$ wynika

$$(A, As + t) = (A, t)(I, s) = (I, s)(A, t) = (A, t + s).$$

Ponieważ $\mathbb{Z}^n$ generuje $\mathbb{R}^n$ jako przestrzeń liniową, z pierwszego twierdzenia Bieberbacha, więc A musi być identycznością. To dowodzi punktu 1. Dowód punktów 2 i 3 pozostawiamy jako ćwiczenie.

□

Niech G będzie dowolną grupą. Przez $Out(G)$ będziemy rozumieli grupę ilorazową $Aut(G)/Inn(G)$, gdzie $Inn(G)$ oznacza podgrupę automorfizmów wewnętrznych.

Twierdzenie 4.2 [17, cz. V] *Niech $\mathcal{M}_1$ będzie rozmaitością płaską wymiaru n, wówczas $Aff_0(\mathcal{M}_1) = \bar{f}((\mathbb{R}^n)^G)$ i*

$$Aff(\mathcal{M}_1)/Aff_0(\mathcal{M}_1) \simeq Out(\Gamma).$$

$$
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & \mathcal{Z} \arrow[r] \arrow[d] & C(\Gamma) = (\mathbb{R}^n)^G \arrow[r] \arrow[d] & f((\mathbb{R}^n)^G) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \Gamma \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "g"'] & Aff(\mathcal{M}_1) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & g(\Gamma) \arrow[r] \arrow[d] & Aut(\Gamma) \arrow[r] \arrow[d] & Out(\Gamma) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 &
\end{tikzcd}
$$

Diagram 4.2

Dowód: Mamy diagram 4.2. Odwzorowania $\bar{f}$ i g zostały zdefiniowane w stwierdzeniu 4.1. Ponieważ $g(\Gamma) = Inn(\Gamma)$, więc łatwo można zobaczyć, że diagram 4.2 jest przemienny i ma dokładne wiersze i kolumny. Pozostało do pokazania, że $Aff_0(\mathcal{M}_1) = f((\mathbb{R}^n)^G)$. Jest jasne, że $f((\mathbb{R}^n)^G)$ jest zbiorem spójnym, zawierającym identyczność. Stąd jest on zawarty w składowej spójności $Aff_0(\mathcal{M}_1)$. Aby udowodnić równość, odwołamy się do teorii grup Liego [17, s. 214].

$\square$

Wykorzystując twierdzenie 4.1, przystąpmy do opisu grup automorfizmów zewnętrznych grup krystalograficznych. Podstawą będzie następujący krótki ciąg dokładny grup (por. diagram 4.1)

$$0 \;\rightarrow\; H^1(G, \mathbb{Z}^n) \rightarrow\; Out(\Gamma) \;\;\rightarrow\;\; N_\alpha/G \;\;\rightarrow\;\; 0.$$

Wynika z niego, że dla danej grupy Γ, $Out(\Gamma)$ jest nieskończona wtedy i tylko wtedy, gdy grupa N_α jest nieskończona. Ponieważ α ma rząd skończony, więc nieskończoność grupy N_α jest równoważna nieskończoności grupy N.

Stwierdzenie 4.2 *Jeżeli $G \subset GL(n, \mathbb{Z})$ jest grupą skończoną, to jej centralizator*

$$C_{GL(n,\mathbb{Z})}(G) = \{c \in GL(n, \mathbb{Z}) \mid \forall g \in G \;\; cgc^{-1} = g\}$$

jest podgrupą normalną w jej normalizatorze

$$N_{GL(n,\mathbb{Z})}(G) = \{d \in GL(n,\mathbb{Z}) \mid \forall g \in G \;\; dgd^{-1} \in G\}.$$

Ponadto $C_{GL(n,\mathbb{Z})}(G)$ *jest nieskończony wtedy i tylko wtedy, gdy* $N_{GL(n,\mathbb{Z})}(G)$ *jest nieskończony.*

Dowód: Jest konsekwencją obserwacji, że skończona wielokrotność dowolnego elementu z normalizatora jest elementem centralizatora. Jest to oczywisty wniosek ze skończoności grupy G.

□

Kryterium (nie)skończoności centralizatora podgrupy skończonej w grupie $GL(n,\mathbb{Z})$ było już znane C. S. Siegelowi w latach czterdziestych XX wieku (zob. [49]). Potem było na nowo dowodzone wielokrotnie. W naszym dowodzie, pochodzącym z pracy [54], wykorzystano twierdzenie Dirichleta o grupie elementów odwracalnych. Niech L będzie skończonym rozszerzeniem ciała liczb wymiernych $\mathbb{Q}$. Niech $R \subset L$ będzie podpierścieniem elementów całkowicie algebraicznych ciała L [*].

Twierdzenie (Dirichleta o elementach odwracalnych [50]): *Grupa* R^* *elementów odwracalnych pierścienia* R *jest izomorficzna z grupą* $W \times \mathbb{Z}^r$, *gdzie* W *jest cykliczną grupą pierwiatków z jedynki ciała* L, *a* r *jest liczbą naturalną. W przypadku gdy* $L = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, d *jest liczbą naturalną,* $r = 0$. *Ciało* $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ *nazywamy zespolonym kwadratowym rozszerzeniem ciała* $\mathbb{Q}$.

Twierdzenie 4.3 *Niech* Γ *będzie beztorsyjną grupą krystalograficzną. Następujące warunki są równoważne:*

(i) grupa $Out(\Gamma)$ *jest nieskończona,*

(ii) rozkład reprezentacji holonomii h_Γ *na elementy* $\mathbb{Q}$*-nieprzywiedlne ma czynniki podwójne albo, w przypadku gdy wszystkie są różne, istnieje składnik* $\mathbb{R}$*-przywiedlny.*

Dowód [54]: Niech $S \subset GL(m,\mathbb{Q})$ oznacza grupę skończoną macierzy o współczynnikach wymiernych. Będzie nam potrzebny poniższy lemat.

---

[*] Element $r \in R \subset L$ jest całkowicie algebraiczny wtedy i tylko wtedy, gdy jest pierwiastkiem wielomianu $w \in \mathbb{Z}[X]$, mającego współczynnik jeden przy najwyższej potędze.

Lemat 4.3 *Nieskończony element $M \in GL(m,\mathbb{Z})$ jest przemienny z dowolną macierzą $s \in S$ wtedy i tylko wtedy, gdy dowolny $s \in S$ jest przemienny z pewną macierzą $M_1 \in GL(m,\mathbb{Q})$, która ma nieskończony rząd i jej wielomian charakterystyczny należy do $\mathbb{Z}[X]$ i ma wyraz wolny równy ± 1.*

Dowód lematu: Istnienie M automatycznie zapewnia istnienie M_1. Niech macierz M_1 spełnia powyższe warunki. Istnieją

$$R \in GL(m,\mathbb{Z}), P_1 \in GL(m,\mathbb{Q}),$$

takie że $R = P_1^{-1} M_1 P_1$. Macierz całkowitoliczbowa R jest tak zwaną kanoniczną wymierną formą (*rational canonical form*) macierzy M_1, której istnienie wynika z własności wielomianu charakterystycznego macierzy M_1 oraz z twierdzenia o postaci skończenie generowanych modułów nad pierścieniem ideałów głównych $\mathbb{Q}[X]$ (zob. [38, twierdzenie 6, s. 426, i twierdzenie 4, s. 421]). Tutaj skończenie generowanym modułem jest m-wymiarowa przestrzeń liniowa, która poprzez działanie macierzy M_1, staje się $\mathbb{Q}[X]$-modułem. Niech h będzie iloczynem wszystkich mianowników macierzy P_1 i P_1^{-1}. Stąd istnieje $l \geq 1$, taka że h dzieli wszystkie współczynniki macierzy $R^l - I$ * i macierz M_1^l jest szukaną macierzą M.

□

Zacznijmy dowód implikacji $(i) \Rightarrow (ii)$. Jeżeli grupa $\mathrm{Out}(\Gamma)$ jest nieskończona, to centralizator $C_{GL(n,\mathbb{Z})}(h_\Gamma(G))$ jest nieskończony. Niech

$$h_\Gamma \simeq (h_\Gamma)_1 \oplus (h_\Gamma)_2 \oplus \cdots \oplus (h_\Gamma)_k,$$

gdzie $(h_\Gamma)_i$ są $\mathbb{Q}$-nieprzywiedlnymi reprezentacjami dla $i = 1, 2, \ldots, k$. Załóżmy, że dla każdego $i = 1, 2, \ldots, k$ reprezentacje $(h_\Gamma)_i$ są $\mathbb{R}$-nieprzywiedlne oraz parami nieizomorficzne. Udowodnimy, że w tym przypadku centralizator $C_{GL(n,\mathbb{Z})}(h_\Gamma(G))$ jest grupą skończoną. Niech $H \in C_{GL(n,\mathbb{Z})}(h_\Gamma(G))$. Z definicji wynika, że istnieje taka baza (nad $\mathbb{Q}$), w której macierz H można zapisać jako macierz, w grupie $GL(n,\mathbb{Q})$, składającą się z k mniejszych macierzy kwadratowych, znajdujących się na przekątnej macierzy H. Oznaczmy je przez H_i. Jest jasne, że macierze te należą do grupy $C_{GL(n_i,\mathbb{Q})}((h_\Gamma)_i(G))$ dla odpowiednich liczb n_i, gdzie $i = 1, 2, \ldots, k$. Stąd, na podstawie lematu 4.3

*Wystarczy rozpatrzyć odwzorowanie $q : GL(m,\mathbb{Z}) \to GL(m,\mathbb{Z}_h)$.

dla $M_1 = H_i$, możemy założyć, że reprezentacja h_Γ jest $\mathbb{Q}$-nieprzywiedlna i $\mathbb{R}$-nieprzywiedlna. Mogą zajść trzy przypadki:

1. h_Γ jest absolutnie nieprzywiedlna. Z lematu Schura wynika, że macierze przemienne z reprezentacją h_Γ to macierze postaci λI, gdzie I jest macierzą jednostkową. Ponieważ jej wyznacznik jest równy ± 1, więc λ jest pierwiastkiem z jedynki i macierz ta ma skończony rząd.

2. h_Γ rozkłada się nad $\mathbb{C}$ i ma indeks Schura jeden. Stąd, w odpowiedniej bazie nad minimalnym ciałem rozkładu K reprezentacji h_Γ, ma ona postać

$$\begin{pmatrix} (h_\Gamma)_1 & 0 \\ 0 & \overline{(h_\Gamma)_1} \end{pmatrix},$$

gdzie $(h_\Gamma)_1$ jest $\mathbb{C}$-nieprzywiedlną reprezentacją. Ponieważ założyliśmy, że indeks Schura jest jeden, więc $(h_\Gamma)_1$ i $\overline{(h_\Gamma)_1}$ nie są izomorficzne. Na podstawie lematu Schura macierze przemienne z powyższą macierzą, ,,pochodzące" od macierzy wymiernej, mają postać

$$\begin{pmatrix} \lambda I & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} I \end{pmatrix},$$

gdzie $\lambda \in K$. Z założenia wyznacznik rozważanej macierzy jest równy ± 1. Stąd $\mid \lambda\bar{\lambda} \mid = 1$ i λ jest elementem okręgu jednostkowego. Z drugiej strony, jako element ciała K, które jest zespolonym, kwadratowym rozszerzeniem ciała $\mathbb{Q}$, z twierdzenia Dirichleta o jednościach wynika, że λ musi być pierwiastkiem z jedynki. Stąd nasza macierz, element centralizatora, ma skończony rząd.

3. h_Γ rozkłada się nad $\mathbb{C}$ i ma indeks Schura dwa. Niech K będzie, jak poprzednio, minimalnym ciałem rozkładu reprezentacji. W odpowiedniej bazie reprezentacja h_Γ ma postać

$$\begin{pmatrix} (h_\Gamma)_1 & 0 \\ 0 & \overline{(h_\Gamma)_1} \end{pmatrix},$$

gdzie $(h_\Gamma)_1$ jest $\mathbb{C}$-nieprzywiedlną reprezentacją i $(h_\Gamma)_1, \overline{(h_\Gamma)_1}$ są izomorficzne. Niech $J \in GL(n/2, K)$ realizuje powyższy izomorfizm, czyli $J(h_\Gamma)_1 = \overline{(h_\Gamma)_1}J$. Stąd $\bar{J}J$ jest przemienna z $(h_\Gamma)_1$, a to oznacza, że $\bar{J}J = \kappa I$, gdzie $\kappa \in \mathbb{Q} = K \cap \mathbb{R}$. Jeżeli $\kappa > 0$, to macierz

$$\begin{pmatrix} 0 & \bar{J} \\ J & 0 \end{pmatrix},$$

której kwadrat jest równy κI, jest przemienna z h_Γ. Ponieważ jest ona $\mathbb{R}$-nieprzywiedlna, więc z lematu Schura wynika, że powinna być macierzą diagonalną. To oznacza, że $\kappa < 0$ i, znowu z lematu Schura, każda macierz przemienna z macierzą h_Γ i pochodząca z grupy $GL(n, \mathbb{Q})$ ma postać

$$\begin{pmatrix} \lambda I & \nu \bar{J} \\ \bar{\nu} J & \bar{\lambda} I \end{pmatrix}.$$

Wyznacznik tej macierzy jest równy $(\lambda\bar{\lambda} - \kappa\nu\bar{\nu})^{n/2}$. Z założenia $\lambda\bar{\lambda} - \kappa\nu\bar{\nu} = 1$. To nie może być -1, gdyż $\kappa < 0$. Stąd $\mid \lambda \mid \leq 1$ i $\mid \lambda + \bar{\lambda} \mid \leq 2$. Policzmy wielomian charkterystyczny powyższej macierzy. Mamy

$$\begin{pmatrix} (\lambda - x)I & \nu \bar{J} \\ \bar{\nu} J & (\bar{\lambda} - x)I \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} I & \nu(\bar{\lambda} - x)^{-1}\bar{J} \\ (\lambda - x)^{-1}\bar{\nu} J & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\lambda - x)I & 0 \\ 0 & (\bar{\lambda} - x)I \end{pmatrix}.$$

Korzystając z ćwiczenia 4.5, otrzymujemy, że wielomian charakterystyczny ma postać $(x^2 - (\lambda + \bar{\lambda})x + 1)^{n/2}$. Ponieważ dla $a = 0, \pm 1, \pm 2$ pierwiastki wielomianu $x^2 + ax + 1$ są pierwiastkami z jedynki, możemy założyć, że $(\lambda + \bar{\lambda}) = 2$ *. Stąd $\lambda = 1$. Ponieważ dowolna potęga powyższej macierzy ma te same własności wartości własnych, więc $\nu = 0$. Stąd znowu nasz element centralizatora ma skończony rząd. Aby zakończyć pierwszą część dowodu, wystarczy skorzystać z faktu, że rozpatrywany centralizator jest grupą, w której rząd dowolnego elementu jest mniejszy od pewnej stałej r. Jest to natychmiastowy wniosek z twierdzenia Dirichleta. Ponieważ centralizator jest podgrupą grupy $GL(n, \mathbb{Z})$, więc na podstawie twierdzenia Burnside'a [4, s. 119] jest skończony.

Przystąpmy teraz do dowodu implikacji $(ii) \Rightarrow (i)$. Niech reprezentacja h_Γ w rozkładzie na reprezentacje $\mathbb{Q}$-nieprzywiedlne ma dwa składniki izomorficzne. W przedstawieniu macierzowym oznacza to, że w odpowiedniej bazie ma ona postać

$$\begin{pmatrix} (h_\Gamma)_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0\dots & (h_\Gamma)_1 & 0\dots & \dots 0 \\ \dots & \dots & (h_\Gamma)_i & 0\dots 0 \\ 0\dots & \dots & \dots & (h_\Gamma)_n \end{pmatrix}.$$

Łatwo zobaczyć, że macierz

---

*Jeżeli λ jest wartością własną macierzy A, to λ^n jest wartością własną macierzy A^n.

$$H_1 = \begin{pmatrix} I & nI & \dots & 0 \\ 0 & I & 0 & \dots 0 \\ \dots & \dots & I & \dots \\ 0 & \dots & \dots & I \end{pmatrix},$$

gdzie I oznacza macierz jednostkową, a $n \in \mathbb{N}$ ma nieskończony rząd. Ponadto jest przemienna, nad $\mathbb{Q}$, z powyższą macierzą reprezentacji holonomii. Niech P oznacza macierz wymierną, przekształcającą powyższą reprezentację holonomii w reprezentację całkowitoliczbową. Z definicji wynika, że macierz PH_1P^{-1} spełnia założenia lematu 4.3. Rozważany centralizator jest więc nieskończony.

Pozostało do udowodnienia istnienie elementu nieskończonego rzędu, przemiennego z reprezentacją holonomii, w sytuacji gdy jedna z reprezentacji $(h_\Gamma)_i = h$ jest $\mathbb{R}$-przywiedlna. Niech $dim_{\mathbb{Q}} h = m$ i niech K oznacza minimalne ciało rozkładu reprezentacji holonomii. Możemy założyć, że K jest podciałem ciała $\mathbb{Q}(\zeta)$, gdzie ζ jest pierwotnym $\mid G \mid$-tym pierwiastkiem z jedynki. Stąd grupa Galoisa A rozszerzenia $(K : \mathbb{Q})$ jest abelowa. Niech

$$A = \{\sigma_i\}_{i=1,2,\dots,l}.$$

W odpowiedniej bazie przestrzeni liniowej K^m reprezentacja h jest sumą prostą reprezentacji $\mathbb{R}$-nieprzywiedlnych

$$h_i = h_1^{\sigma_i}, i = 1, 2, \dots, l.$$

Tutaj $h_1^{\sigma_i}$ oznacza sprzężenie Galoisa reprezentacji h_1 [22, s. 152]. Ciało K nie jest zespolonym i kwadratowym rozszerzeniem liczb wymiernych. Stąd, na podstawie twierdzenia Dirichleta o jednościach, istnieje element $\lambda \in K$, taki że żadne jego sprzężenie, w sensie Galoisa, nie jest pierwiastkiem z jedynki. Oznaczmy przez $\{\sigma_i(\lambda) = \lambda^{\sigma_i} = \lambda_i\}_{i=1,2,\dots,l}$ sprzężenia Galoisa elementu λ. Niech $D \in GL(m, K)$ będzie macierzą diagonalną o blokach $\lambda_i I_{dim_{\mathbb{Q}} h_1}$ na przekątnej. Jej wielomian charakterystyczny $f(X)$ jest równy

$$((X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \dots (X - \lambda_l))^{\frac{m}{l}}.$$

Ponieważ λ, jest całkowitym elementem algebraicznym, więc z teorii Galoisa $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$. Stąd istnieje macierz $C \in GL(m, \mathbb{Z})$, mająca taki sam wielomian charakterystyczny jak macierz D.

Udowodnimy, że $hC = Ch$. Niech $e_i \in \mathbb{Q}^m, i = 1, 2, \ldots, m$ będzie bazą standardową, a $f_i \in K^m, i = 1, 2, \ldots, m$ bazą, w której reprezentacja h jest sumą reprezentacji $\mathbb{R}$-nieprzywiedlnych. Z konstrukcji wynika, że każdy element bazy f_i jest wektorem własnym endomorfizmu $c : K^m \to K^m$, wyznaczonego przez macierz C. Stąd, po ewentualnej permutacji bazy f_i, macierzą homomorfizmu c, w tej bazie, jest macierz D. Ponieważ $Dh = hD$ w bazie f_i, więc $hC = Ch$ w bazie e_i. Z własności λ wynika, że C spełnia założenia lematu 4.3, z definicji – że ma rząd nieskończony, a z konstrukcji – że jest elementem badanego centralizatora.

$\square$

Przedstawimy obecnie pewne wnioski i konsekwencje twierdzenia 4.3. Niech $\mathcal{W}$ będzie zwartą rozmaitością Riemanna. Odwzorowanie gładkie

$$f : \mathcal{W} \to \mathcal{W}$$

nazywamy dyfeomorfizmem, jeżeli jest bijekcją i f^{-1} jest funkcją gładką.

Definicja 4.2 Funkcja f jest dyfeomorfizmem Anosowa ([56]), jeżeli istnieją stałe $c > 0$, $0 < \lambda < 1$, takie że dla każdego $w \in \mathcal{W}$, $T\mathcal{W}_w = E^s \oplus E^u$, a dla każdego $v \in E^s$, $t \in E^u$ i całkowitego $r > 0$

$$\|Tf^r v\| \leq c\lambda^r \|v\| \text{ i } \|Tf^{-r} t\| \leq c\lambda^r \|t\|.$$

Przykład 4.2 Niech

$$\varphi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

będzie algebraicznym automorfizmem torusa T^2 (tj. $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $det\varphi = \pm 1$). Jeżeli φ nie ma warości własnych o module jeden, to jest dyfeomorfizmem Anosowa na T^2.

Zaprezentujmy twierdzenie Porteousa [45]. Charakteryzuje ono dyfeomorfizmy Anosowa na płaskiej rozmaitości M o grupie podstawowej Γ.

Twierdzenie 4.4 [45, twierdzenie 6.1] *Następujące warunki są równoważne:*

(i) rozmaitość M ma dyfeomorfizm Anosowa,

(ii) każdy $\mathbb{Q}$-nieprzywiedlny składnik reprezentacji holonomii h_Γ o wielokrotności jeden jest $\mathbb{R}$-przywiedlny.

Dowód tego rezultatu jest bardzo podobny do dowodu twierdzenia 4.3 i pozostawiamy go jako ćwiczenie (por. [45]).

Uwaga: Z dyfeomorfizmami Anosowa jest związana hipoteza: jeżeli na zwartej rozmaitości W istnieje dyfeomorfizm Anosowa, to W jest skończenie nakrywana przez nilrozmaitość $\tilde{W}$ *. (W jest skończenie nakrywana przez nilrozmaitość wtedy i tylko wtedy, gdy $\pi_1(W)$ jest nieskończoną grupą beztorsyjną, która zawiera podgrupę nilpotentną o skończonym indeksie.)

Okazuje się, że można podać pełną charakterystykę grupy automorfizmów zewnętrznych jako podgrupy grupy liniowej. W roku 1972 J. Tits (zob. [57]) udowodnił, że dowolna, skończenie generowana podgrupa grupy liniowej $GL(n,\mathbb{Z})$ jest albo virtualnie rozwiązalna, albo zawiera, jako podgrupę, grupę wolną †. Należy dodać, że każda virtualnie rozwiązalna podgrupa grupy $GL(n,\mathbb{Z})$ jest virtualnie policykliczna [39]. Oznacza to, że zawiera podgrupę policykliczną o skończonym indeksie.

Definicja 4.3 Grupa G jest policykliczna, jeżeli posiada subnormalny ciąg podgrup

$$\{e\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_{k-1} \trianglelefteq G_k = G,$$

o takiej własności, że dla każdego $i = 0, 1, \ldots, k-1$, grupa G_{i+1}/G_i jest cykliczna.

Twierdzenie 4.5 *Niech Γ będzie beztorsyjną grupą krystalograficzną. Następujące warunki są równoważne:*

(i) grupa $Out(\Gamma)$ jest virtualnie-policykliczna,

(ii) reprezentacja holonomii h_Γ jest sumą prostą różnych, $\mathbb{Q}$-nieprzywiedlnych reprezentacji i każdy występujący, w tej sumie, czynnik $\mathbb{R}$-przywiedlny ma wymierny indeks Schura równy jeden.

Dowód tego twierdzenia można znaleźć w pracy [39].

*Niech N oznacza jednospójną, nilpotentną grupę Liego, a Γ – dyskretną, beztorsyjną, kozwartą podgrupą grupy Isom(N). Przestrzeń orbit N/Γ nazywamy nilrozmaitością.

†Grupa jest virtualnie rozwiązalna, jeżeli zawiera podgrupę rozwiązalną o skończonym indeksie.

Podamy teraz przykłady grup Bieberbacha ze skończonymi grupami automorfizmów zewnętrznych.

Dla $n \geq 3$ i nieparzystego, niech $\Gamma_n \subset \mathrm{E}(n)$ oznacza grupę generowaną przez zbiór $\{(B_i, s(B_i) = x_i) : 1 \leq i \leq n-1\}$. Tutaj B_i są $(n \times n)$-macierzami diagonalnymi

$$B_i := \mathrm{diag}(-1, \ldots, -1, \underbrace{1}_{i}, -1, \ldots, -1),$$

a $x_i = s(B_i) = e_i/2 + e_{i+1}/2, 1 \leq i \leq n-1$ ($e_i, i = 1, 2, \ldots, n$ oznacza standardową bazę przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$). Grupy Γ_n są szczególnym przypadkiem grup *Hantzsche-Wendta* [47]. Łatwo sprawdzić [54, s. 589], że jest to rodzina grup Bieberbacha o skończonej grupie automorfizmów zewnętrznych. Reprezentacja holonomii jest sumą prostą różnych reprezentacji $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$-nieprzewiedlnych.

Można spróbować sklasyfikować grupy Bieberbacha o skończonej grupie automorfizmów zewnętrznych. Pierwszym krokiem w tym kierunku jest (częściowy) opis grup holonomii grup Bieberbacha o skończonej grupie automorfizmów zewnętrznych. Oznaczmy klasę tych grup skończonych przez $\mathcal{R}_1$. W przypadku skończonych grup abelowych podano pełną charakteryzację takich grup.

Stwierdzenie 4.3 [33, twierdzenie 4.2] *Jeżeli G jest skończoną grupą abelową, to $G \in \mathcal{R}_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy G jest produktem prostym grup cyklicznych rzędu co najwyżej cztery (tj. G ma eksponent dzielący 12).*

W przypadku p-grup, w pracy [33] udowodniono, że jeżeli należy ona do klasy $\mathcal{R}_1$, to $p = 2$ lub $p = 3$. Ponadto pokazano poniższe stwierdzenie.

Stwierdzenie 4.4 [33, stwierdzenie 3.3] *Niech G będzie nieabelową p-grupą rzędu $p^\alpha (\alpha \geq 3)$, mającą cykliczną normalną podgrupę indeksu p. Wówczas $G \in \mathcal{R}_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy G jest grupą rzędu 8, 27 lub 16 i w tym ostatnim przypadku jest grupą o prezentacji $\langle a, b \mid a^8 = b^2 = 1, bab = a^{4\pm1} \rangle$.*

Okazuje się (por. [32, stwierdzenie 4.1]), że także pewna nieskończona rodzina 2-grup ekstraspecjalnych ma tę własność.

Definicja 4.4 Grupa $\mathcal{G}_n$ rzędu 2^{n+1} nazywa się ekstraspecjalną, jeżeli jej komutator $[\mathcal{G}_n, \mathcal{G}_n]$ jest równy jej centrum $Z(\mathcal{G}_n)$, a $\mathcal{G}_n/Z(\mathcal{G}_n) \simeq (\mathbb{Z}_2)^n$.

W przypadku grup skończonych, nieabelowych, rozwiązalnych i nie będących p-grupami, dotychczas udało się podać pełną listę grup o powyższej własności tylko w klasie grup dihedralnych rzędu $2n$ (są trzy) [33, stwierdzenie 5.1] oraz w klasie nieabelowych grup $C_{p,q}$ rzędu pq, gdzie p, q są nieparzystymi liczbami pierwszymi. Jest tylko jedna równa grupie $C_{7,3}$ [33, stwierdzenie 5.2]. Tutaj $C_{p,q}$ (zob. [12]), dla p, q będących nieparzystymi liczbami pierwszymi, oznacza nieabelową grupę występującą w krótkim ciągu dokładnym grup

$$1 \to \mathbb{Z}_p \to C_{p,q} \to \mathbb{Z}_q \to 1.$$

Wszystkie powyższe stwierdzenia są konsekwencją między innymi faktu z teorii reprezentacji, że dla $p \geq 5$ każda $\mathbb{Q}$-nieprzywiedlna reprezentacja p-grupy skończonej jest $\mathbb{R}$-przywiedlna. Trzeba zaznaczyć, że pełna klasyfikacja grup $\mathcal{R}_1$ jest daleka od zakończenia. Znacznie by ją przybliżyło udowodnienie poniższej hipotezy, która sprowadziłaby opis grup klasy $\mathcal{R}_1$ do problemu z teorii reprezentacji.

Hipoteza: *Niech G będzie dowolną grupą skończoną. Wówczas istnieje grupa Bieberbacha Γ o własnościach:*

1. G jest grupą holonomii grupy Γ,

2. reprezentacja holonomii h_Γ w rozkładzie na sumę reprezentacji $\mathbb{Q}$-nieprzywiedlnych nie ma składników izomorficznych.

Uwaga: Jest oczywiste, że dla grup z klasy $\mathcal{R}_1$ hipoteza jest prawdziwa.

Wykorzystując komputer, dla prostych grup nieabelowych udowodniono kolejne stwierdzenie.

Stwierdzenie 4.5 [33, stwierdzenia 6.1, 6.2] *Jeżeli $G = PSL(2, p)$, to $G \in \mathcal{R}_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p \in \{2, 3, 7\}$. Ponadto sporadyczna grupa prosta Mathieu M_{11} jest taką grupą.*

Wykorzystując podobne metody, w roku 2003 podano przykład grupy Bieberbacha z trywialnym centrum i trywialną grupą automorfizmów zewnętrznych. Jej wymiar to 146, a grupą holonomii jest grupa M_{11} [59]. Z twierdzenia 4.2 wynika, że rozmaitość płaska wyznaczona przez tę grupę nie ma żadnych symetrii.

Ćwiczenie 4.1 Uzasadnić konkluzję z przykładu 4.1.

Ćwiczenie 4.2 Udowodnić punkty 2 i 3 z lematu 4.2.

Ćwiczenie 4.3 Niech $\mathcal{M}$ będzie rozmaitością płaską. Udowodnić, że

$$Aff_0(\mathcal{M}) \simeq (S^1)^{b_1},$$

gdzie b_1 jest pierwszą liczbą Bettiego rozmaitości $\mathcal{M}$.

Ćwiczenie 4.4 Udowodnić, że dowolna podgrupa skończona w $GL(m, \mathbb{Q})$ jest sprzężona z podgrupą macierzy całkowito liczbowych.

Ćwiczenie 4.5 Niech I będzie macierzą jednostkową stopnia n. Udowodnić, że dla dowolnych macierzy $A, B \in GL(n, K)$, wyznacznik macierzy

$$\begin{pmatrix} I & B \\ A & I \end{pmatrix}$$

jest równy wyznacznikowi macierzy $(I - AB)$. K oznacza dowolne ciało o charakterystyce zero.

Ćwiczenie 4.6 Udowodnić, że centralizator $C_{GL(n,\mathbb{Z})}(F)$ grupy skończonej $F \subset GL(n, \mathbb{Z})$ jest skończenie generowany.

Ćwiczenie 4.7 Niech $f \in \mathbb{Z}[X]$ będzie dowolnym wielomianem, którego ciało rozkładu jest podciałem ciała $\mathbb{Q}(\zeta)$, gdzie ζ jest pierwotnym pierwiastkiem z jedynki. Ponadto załóżmy, że jego wyraz wolny jest równy ± 1. Udowodnić, że istnieje macierz o współczynnikach całkowitych, której wielomian charakterystyczny jest równy f.

Ćwiczenie 4.8 Bazując na przykładzie 4.2, opisać dyfeomorfizmy Anosowa na torusie.

Ćwiczenie 4.9 Wzorując się na dowodzie twierdzenia 4.3, udowodnić twierdzenie 4.4.

Ćwiczenie 4.10 Podać dowody stwierdzenia 4.3 i 4.4.

Wskazówka: Skorzystać z orginalnej pracy [33].

5. Spin struktury i operator Diraca

Niech C_n oznacza algebrę Clifforda nad ciałem liczb rzeczywistych. Jest to łączna algebra z jedynką, generowana przez elementy

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$$

spełniające relacje

$$\forall i, e_i^2 = -1,$$

$$\forall i, j, e_i e_j = -e_j e_i,$$

gdzie $1 \leq i, j \leq n$. Z definicji $C_0 = \mathbb{R}$. Łatwo zobaczyć, że $C_1 = \mathbb{C}$ i $C_2 = \mathbb{H}$, gdzie $\mathbb{H}$ jest czterowymiarową algebrą kwaternionów. Ponadto $\mathbb{R}^n \subset C_n$ i $\dim_{\mathbb{R}} C_n = 2^n$, gdzie $\mathbb{R}^n$ oznacza n-wymiarową przestrzeń wektorową o bazie $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Zdefiniujmy następujące homomorfizmy (inwolucje) na C_n :

(i) $^* : e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_k} \mapsto e_{i_k} e_{i_{k-1}} \ldots e_{i_2} e_{i_1}$,

(ii) $' : e_i \mapsto -e_i$,

(iii) $^- : a \mapsto (a')^*, a \in C_n$.

Niech $C_n^0 = \{x \in C_n \mid x' = x\}$. Łatwo zauważyć, że

$$\forall a, b \in C_n, (ab)^* = b^* a^*.$$

Zdefiniujmy podzbiory algebry C_n

$$Pin(n) = \{x_1 x_2 \ldots x_n \mid x_i \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \subset C_n, i = 1, 2, \ldots n\},$$

$$Spin(n) = Pin(n) \cap C_n^0.$$

Jest oczywiste, że są one grupami ze względu na mnożenie. Ponadto zachodzi poniższe stwierdzenie.

Stwierdzenie 5.1 *Niech* $u \in Spin(n), y \in \mathbb{R}^n$. *Odwzorowanie*

$$\lambda_n : Spin(n) \to O(n),$$

dane wzorem

$$\lambda_n(u)(y) = uyu^*$$

jest ciągłym epimorfizmem grup.

Dowód: Niech $u = u_1 u_2 \ldots u_{2k} \in Spin(n)$, gdzie $u_i \in S^{n-1}$ dla $i = 1, 2, \ldots, 2k$ i $k \in \mathbb{N}$. Pokażemy, że odwzorowanie

$$\lambda_n(u) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

jest liniową izometrią. Z definicji możemy założyć, że $u \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Niech $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$. Z definicji mamy

$$\lambda_n(u)(\alpha x_1) = \alpha \lambda_n(u)(x_1)$$

i

$$\lambda_n(u)(x_1 + x_2) = \lambda_n(u)(x_1) + \lambda_n(u)(x_2).$$

Z drugiej strony,

$$|| \lambda_n(u) x_1 ||^2 = -(u x_1 u^*)(u x_1 u^*) = u x_1^2 u^* =$$

$$-u || x_1 ||^2 u^* = || x_1 ||^2 .$$

W końcu, dla $u, v \in Spin(n)$,

$$\lambda_n(uv)(x_1) = uvx_1(uv)^* = u(vx_1v^*)u^* = \lambda_n(u)(\lambda_n(v)(x_1)).$$

Należy jeszcze pokazać, że λ_n jest ,,na". W tym celu pokażemy, że poprzednio już rozważane odwzorowanie

$$\lambda_n(u) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

jest odbiciem względem hiperpłaszczyzny prostopadłej do elementu u. Istotnie, wiadomo, że takie odbicie wyraża się wzorem

$$x \mapsto x - 2\langle x, u \rangle \frac{u}{|| u ||^2}.$$

Niech
$$x_1 = tu + u',$$
gdzie $\langle u, u' \rangle = 0$ i $t \in \mathbb{R}$. Stąd z powyższego wzoru
$$tu + u' \mapsto (tu + u') - 2\langle tu + u', u\rangle u \mapsto -tu + u'.$$
Z drugiej strony,
$$\lambda_n(u)(x_1) = ux_1u = -u\bar{x}_1 u'^{-1} = -u\bar{x}_1 u = x_1 - x_1\bar{u}u - u\bar{x}_1 u =$$
$$x_1 - (x_1\bar{u} + u\bar{x}_1)u = {}^* x_1 - 2\langle x_1, u\rangle u = -tu + u'.$$
Ponieważ grupa ortogonalna $O(n)$ jest generowana przez odbicia, więc λ_n jest epimorfizmem.

□

Podamy teraz przykład 2-grupy ekstraspecjalnej [†].

Przykład 5.1 [46] Rozpatrzmy podgrupę $H \subset SO(n)$, macierzy diagonalnych, składających sie tylko z ± 1, na głównej przekątnej. Okazuje się, że grupa $(\lambda_n)^{-1}(H) \subset Spin(n)$ jest 2-grupą ekstraspecjalną.

Zajmiemy się teraz operatorem Diraca na płaskich orientowalnych spin-rozmaitościach [26]. Będą nam potrzebne wiadomości o wiązkach wektorowych. Niech E, X, F będą przestrzeniami topologicznymi.

Definicja 5.1 Odwzorowanie $p : E \to X$ nazywamy lokalnie trywialnym rozwłóknieniem (E, p, X, F), z włóknem F, jeżeli spełniony jest następujący warunek: Dla dowolnego $x_0 \in X$ istnieje otoczenie $U(x_0) \subset X$ i homeomorfizm
$$\Phi_{U(x_0)} : p^{-1}(U(x_0)) \to U(x_0) \times F,$$
taki że diagram 5.1 jest przemienny. Odwzorowanie pr_1 oznacza rzutowanie na pierwszy czynnik.

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U(x_0)) \arrow[rr, "\Phi_{U(x_0)}"] \arrow[dr, "p"'] & & U(x_0) \times F \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U(x_0) & \end{tikzcd}$$

Diagram 5.1

[*]Korzystamy z ćwiczenia 5.2.
[†]Porównaj definicję 4.4.

Przykład 5.2 1. Niech $E = X \times F$ i $p : E \to X$ będzie rzutowaniem. Wówczas (E, p, X, F) jest lokalnie trywialnym rozwłóknieniem.

2. Niech $X = \mathcal{W}^n$ będzie gładką rozmaitością, $E = \cup_{x \in \mathcal{W}^n} T_x(\mathcal{W}^n)$, a $p : E \to X$ dane wzorem $p(w) = x, \forall w \in T_x(\mathcal{W}^n)$. Tutaj $T_x(\mathcal{W}^n)$ oznacza przestrzeń styczną do $\mathcal{W}^n$ w punkcie x. Wówczas $(E, p, \mathcal{W}^n, \mathbb{R}^n)$ jest lokalnie trywialnym rozwłóknieniem z włóknem $\mathbb{R}^n$.

Dwa rozwłóknienia, (E, p, X, F) i (E', p', X, F'), nazywamy równoważnymi, jeżeli istnieje homeomorfizm $f : E \to E'$, taki że diagram 5.2 jest przemienny. Lokalne rozwłóknienie (E, X, p, F) nazywamy trywialnym, jeżeli jest równoważne z rozwłóknieniem $(X \times F, X, pr, F)$. Niech $p : E \to X$ będzie rozwłóknieniem. Odwzorowanie $s : X \to E$ nazywane jest jego *przekrojem*, jeżeli $ps = 1_X$. Gdy s jest zdefiniowane tylko lokalnie, na podzbiorze otwartym bazy, wówczas mówimy o *lokalnym przekroju.*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ p \searrow & & \swarrow p' \\ & X & \end{array}$$

Diagram 5.2

Wprowadzimy jeszcze ważne pojęcie rozwłóknienie indukowanego. Niech $f : Y \to X$ będzie funkcją ciągłą. Zdefiniujmy przestrzeń topologiczną

$$f^*E = \{(y, e) \in Y \times E : f(y) = p(e)\}.$$

Stąd rzutowanie na pierwszą współrzędną p^* określa tak zwane *rozwłóknienie indukowane*

$$p^* : f^*E \to Y.$$

Definicja 5.2 Niech G będzie grupą topologiczną. Czwórkę (P, π, X, G) nazywamy G-wiązką główną, jeżeli spełnione są następujące warunki:

1. P jest przestrzenią topologiczną z wolnym, prawostronnym działaniem grupy G.

2. $\pi : P \to X$ jest ciągłą surjekcją i $\pi(p_1) = \pi(p_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\exists g \in G$, takie że $p_1 g = p_2$.

3. Dla dowolnego $x \in X$ istnieje jego otoczenie $U \subset X$ i odwzorowanie $\Phi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times G$, takie że

$$\Phi_U(p) = (\pi(p), \phi_U(p)).$$

Ponadto $\phi_U : \pi^{-1}(U) \to G$ spełnia warunek

$$\phi_U(pg) = \phi_U(p)g.$$

Uwaga: 1. Analogiczną definicję można sformułować dla lewostronnego, wolnego działania grupy G na przestrzeni P.

2. Każda G-wiązka główna jest lokalnie trywialnym rozwłóknieniem z włóknem $F = G$.

3. Jeżeli (E, p, X, G) jest G-wiązką główną i $f : Y \to X$ ciągłym odwzorowaniem, to (f^*E, p^*, Y, G) jest wiązką główną.

Definicja 5.3 Niech (E, p, X, G) i (E_1, p_1, X, G) będą G-wiązkami głównymi o tej samej bazie X. Mówimy, że są one izomorficzne, jeżeli istnieje homeomorfizm $f : E \to E_1$ i spełnione są następujące warunki:

1. Diagram 5.3 jest przemienny.
2. $\forall e \in E, g \in G, f(eg) = f(e)g$.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E_1 \\ p \searrow & & \swarrow p_1 \\ & X & \end{array}$$

Diagram 5.3

Wprost z definicji mamy kolejne stwierdzenie.

Stwierdzenie 5.2 *Jeżeli G-wiązka główna (E, p, X, G) ma* przekrój*, to jest izomorficzna z trywialną G-wiązką główną $(E \times G, pr, X, G)$.*

Przykład 5.3 Niech G będzie grupą Liego, a H – jej domkniętą podgrupą. Niech $p : G \to G/H$ będzie naturalnym rzutowaniem. Wówczas

$$(G, p, G/H, H)$$

jest H-wiązką główną.

Przykład 5.4 Niech
$$X = S^2 = \mathbb{C}P^1$$
i
$$E = S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \mid z_1 \mid^2 + \mid z_2 \mid^2 = 1\}.$$
Zdefiniujmy
$$p : S^3 \to \mathbb{C}P^1$$
wzorem $p(z_1, z_2) = [z_1 : z_2]$, a działania S^1 na S^3

$$(z_1, z_2)z = (z_1 z, z_2 z),$$
$$(z_1, z_2)z = (z_1 z^{-1}, z_2 z^{-1}), \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^2, z \in \mathbb{C}.$$

W konsekwencji, możemy określić dwie S^1-wiązki główne

$$\psi_1 = (S^3, p, \mathbb{C}P^1, S^1)$$

i
$$\psi_2 = (S^3, p, \mathbb{C}P^1, S^1),$$
różniące się powyższymi działaniami S^1 na S^3. Można pokazać, że nie są one izomorficzne. ψ_1 jest nazywana wiązką Hopfa.

Rozpatrzymy teraz kluczowy dla wprowadzenie operatora Diraca przykład wiązki głównej.

Przykład 5.5 Niech $\mathcal{M}^n$ będzie gładką rozmaitość wymiaru n. Dla każdego $x \in \mathcal{M}^n$, niech

$$L_x(\mathcal{M}^n) = \{(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in T_x(\mathcal{M}^n) \mid det(v_1, v_2, \ldots, v_n) \neq 0\}.$$

Niech
$$L(\mathcal{M}^n) = \cup_{x \in \mathcal{M}^n} L_x(\mathcal{M}^n).$$

Zdefiniujmy *prawe* działanie $GL(n, \mathbb{R})$ na $L(\mathcal{M}^n)$ jako mnożenie macierzy. W konsekwencji otrzymaliśmy $GL(n, \mathbb{R})$-wiązkę główną

$$(L(\mathcal{M}^n), p, \mathcal{M}^n, GL(n, \mathbb{R})).$$

Możemy powyższą wiązkę rozpatrywać nad grupą ortogonalną. Opiszmy formalnie taką redukcję. Niech (P, π, X, G) będzie G-wiązką główną, a $\lambda : G_1 \to G$ – ciągłym homomorfizmem grup. G_1-wiązkę główną (Q, π, X, G_1) nazywamy λ-rozszerzeniem wiązki (P, π, X, G), jeżeli istnieje odwzorowanie $f : Q \to P$, takie że diagram 5.4 jest przemienny i dodatkowo $f(qg_1) = f(q)\lambda(g_1), \forall q \in Q, g_1 \in G_1$.

$$\begin{array}{c} Q \xrightarrow{f} P \\ \pi \downarrow \quad \swarrow \pi \\ X \end{array}$$

Diagram 5.4

Definicja 5.4 Niech $\mathcal{W}^n$ będzie orientowalną, zwartą rozmaitością wymiaru n. Spin-struktura na $\mathcal{W}^n$ oznacza możliwość λ_n-rozszerzenia, $SO(n)$-wiązki stycznej do $Spin(n)$-wiązki.

Uwaga: Jest to równoważne zerowaniu się drugiej klasy charakterystycznej Stiefela-Whitneya, $w_2 \in H^2(\mathcal{W}^n, \mathbb{Z}_2)$ [26, s. 40].

Przykład 5.6 Ponieważ wiązka styczna dowolnej 3-rozmaitości orientowalnej i zwartej $\mathcal{W}^3$ jest trywialna (zob. [40]), więc $\mathcal{W}^3$ ma spin-strukturę.

Omówimy teraz spin-struktury na orientowalnych, płaskich rozmaitościach. Niech $\mathcal{M}^n$ będzie taką rozmaitością wymiaru n. Oznaczmy przez $\Gamma \subset E(n)$ jej grupę podstawową. Następnie rozpatrzmy wiązkę główną

$$(L(\mathbb{R}^n), p, \mathbb{R}^n, SO(n)).$$

Jest oczywiste, że istnieje λ_n-rozszerzenie tej wiązki do

$$(\mathbb{R}^n \times Spin(n), p, \mathbb{R}^n, Spin(n)).$$

Zdefiniowaliśmy w ten sposób spin-strukturę na rozmaitości $\mathbb{R}^n$. Ponieważ jest to przestrzeń jednospójna, więc jest ona jedyna (zob. [26]). Działanie grupy izometrii Γ na przestrzeni $\mathbb{R}^n$ możemy „rozszerzyć" do działania na przestrzni $L(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \times SO(n)$. Niech $\gamma \in \Gamma$ i $(x, v) \in \mathbb{R}^n \times SO(n)$. Definiujemy

$$\gamma(x, v) = (\gamma x, pr(\gamma)v).$$

Tutaj $pr(\gamma)$ oznacza część liniową (pochodną) izometrii. Mamy $L(\mathcal{M}^n) = (\mathbb{R}^n \times SO(n))/\Gamma$. Z elementarnej teorii nakryć każda izometria $\gamma \in \Gamma$ ma dwa ,,podniesienia" $\gamma^{\pm}$, takie że diagram 5.5 jest przemienny.

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^n \times Spin(n) & \xrightarrow{\gamma^{\pm}} & \mathbb{R}^n \times Spin(n) \\
\downarrow (id \times \lambda_n) & & \downarrow (id \times \lambda_n) \\
\mathbb{R}^n \times SO(n) & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{R}^n \times SO(n).
\end{array}$$

Diagram 5.5

W ten sposób otrzymaliśmy poniższe stwierdzenie.

Stwierdzenie 5.3 *Istnieje wzajemna odpowiedniość pomiędzy spin-strukturami na rozmaitości $\mathcal{M}^n$ a działaniami α grupy Γ na przestrzeni $\mathbb{R}^n \times Spin(n)$, spełniającymi warunek*

$$\forall \gamma \in \Gamma, \quad \alpha(\gamma) \in \{\gamma^{\pm}\}.$$

Dowód: Wynika z definicji (por. [26, s. 43]).

□

Niech α będzie przyporządkowaniem z ostatniego stwierdzenia. Zauważmy, że $\gamma^{\pm}$ wyznacza element $A^{\pm} \in \lambda_n^{-1}(pr(\gamma))$, taki że

$$\forall (x, s) \in \mathbb{R}^n \times Spin(n), \gamma^{\pm}(x, s) = (\gamma x, A^{\pm} s).$$

Wniosek [42, stwierdzenie 3.2]: *M^n ma spin-strukturę wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje homomorfizm $\epsilon : \Gamma \to Spin(n)$, taki że $\lambda_n \epsilon = \Psi \mid_{\Gamma}$.*

□

Ponieważ, dla $n \geq 3$, $\ker \lambda_n = \mathbb{Z}_2$, więc każda rozmaitość płaska z grupą holonomii G rzędu nieparzystego ma spin-strukturę. Wynika to z faktu, że dowolny krótki ciąg dokładny grup skończonych

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to H \to G \to 0$$

jest rozszczepialny.

W dalszym ciągu zmierzamy w kierunku zdefiniowania operatora Diraca. Niech $C_n^{\mathbb{C}} = C_n \otimes \mathbb{C}$ oznacza kompleksyfikację algebry Clifforda C_n. Zdefiniujmy przestrzeń zespolonych n-spinorów Σ_n, jako przestrzeń liniową $\mathbb{C}^K$, wymiaru zespolonego $K = 2^{[\frac{n}{2}]}$, często nazywaną nieprzywiedlną reprezentacją algebry $C_n^{\mathbb{C}}$ (zob. [26, s. 13, 20]).

Niech $\Sigma_3 = \Sigma_2 = C_2^{\mathbb{C}} = M_2(\mathbb{C})$. Bazę tej ostatniej algebry zespolonej tworzy macierz jednostkowa I wraz z macierzami

$$g_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że [26, s. 13] jeżeli $n = 2k$, to

$$C_n^{\mathbb{C}} = \underbrace{M_2(\mathbb{C}) \otimes \cdots \otimes M_2(\mathbb{C})}_{k \text{ razy}} = \mathrm{End}(\underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^2}_{k \text{ razy}}) = \mathrm{End}(\Sigma_n).$$

Niech j oznacza liczbę naturalną. Połóżmy

$$\alpha(j) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } j \text{ jest nieparzyste,} \\ 2, & \text{jeśli } j \text{ jest parzyste.} \end{cases}$$

Niech $u = u_1 \otimes \cdots \otimes u_k \in \Sigma_n$, a $e_1, \ldots, e_n$ oznacza bazę $\mathbb{C}_n^{\mathbb{C}}$. Wówczas

$$e_j u = (I \otimes \cdots \otimes I \otimes g_{\alpha(j)} \otimes \underbrace{T \otimes \cdots \otimes T}_{[\frac{j-1}{2}] \text{ razy}})(u),$$

dla $j \leq n$. To definiuje na Σ_n strukturę $C_n^{\mathbb{C}}$-modułu.

Natomiast w sytuacji, gdy $n = 2k + 1$,

$$C_n^{\mathbb{C}} = \{M_2(\mathbb{C}) \otimes \cdots \otimes M_2(\mathbb{C})\} \oplus \{M_2(\mathbb{C}) \otimes \cdots \otimes M_2(\mathbb{C})\} =$$

$$= \mathrm{End}(\Sigma_n) \oplus \mathrm{End}(\Sigma_n).$$

Dla $j \leq 2k$,

$$e_j u = (I \otimes \cdots \otimes I \otimes g_{\alpha(j)} \otimes \underbrace{T \otimes \cdots \otimes T}_{[\frac{j-1}{2}] \text{ razy}})(u), (I \otimes \cdots \otimes I \otimes g_{\alpha(j)} \otimes \underbrace{T \otimes \cdots \otimes T}_{[\frac{j-1}{2}] \text{ razy}})(u)).$$

Wreszcie

$$e_n u = ((iT \otimes \cdots \otimes T(u), -iT \otimes \cdots \otimes T(u)).$$

Poprzez rzutowanie $\mathrm{End}(\Sigma_n) \oplus \mathrm{End}(\Sigma_n) \to \mathrm{End}(\Sigma_n)$ na pierwszy czynnik, definiuje się strukturę $C_n^{\mathbb{C}}$ modułu na Σ_n w przypadku n nieparzystego.

Niech $\mathcal{M}^n = \mathbb{R}^n/\Gamma$ będzie płaską orientowalną rozmaitością ze spin-strukturą $\epsilon : \Gamma \to Spin(n)$. Rozważmy trywialną wiązkę spinorów

$$(\Sigma\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \Sigma_n, \pi, \mathbb{R}^n, \Sigma_n)$$

oraz wiązkę spinorów na rozmaitości $\mathcal{M}^n$

$$(\Sigma\mathcal{M}^n, \pi, \mathcal{M}^n, \Sigma_n).$$

Tutaj $\Sigma\mathcal{M}^n = \Sigma\mathbb{R}^n/\Gamma$, gdzie Γ działa na $\Sigma\mathbb{R}^n$ następująco

$$\forall (x, \sigma) \in \Sigma\mathbb{R}^n, \gamma \in \Gamma, \gamma(x, \sigma) = (\gamma x, \epsilon(\gamma)\sigma).$$

Przez spinory na rozmaitości $\mathcal{M}^n$ będziemy rozumieli odwzorowania

$$\Psi : \mathbb{R}^n \to \Sigma_n,$$

spełniające warunek

$$(*) \qquad \Psi = \epsilon(\gamma)\Psi \circ (\gamma)^{-1}, \forall \gamma \in \Gamma.$$

Koneksja Levi-Civita na wiązce $L(\mathcal{M}^n)$,,podnosi się" do wiązki ΣM^n i indukuje pochodną kowariantną ∇. Ponadto zanużenie $\mathbb{R}^n \subset C_n \subset C_n^{\mathbb{C}}$ i opisana powyżej struktura Σ_n jako $C_n^{\mathbb{C}}$-modułu definiują *mnożenie Clifforda*

$$\mu : T_p\mathcal{M}^n \otimes \Sigma_p\mathcal{M}^n \to \Sigma_p\mathcal{M}^n,$$

gdzie $p \in \mathcal{M}^n$ (zob. [26, s. 21] i [6, s. 19]).

Operator Diraca określamy lokalnie, w bazie ortonormalnej $e_1, e_2, \ldots, e_n \in T_p\mathcal{M}$, wzorem

$$(D\Psi)(p) = \mu(\Sigma_{i=1}^n e_i \otimes \nabla_{e_i}\Psi),$$

gdzie $p \in \mathcal{M}^n, \Psi \in \Sigma_p\mathcal{M}^n$.

Jeżeli przez $\Gamma(S)$ oznaczymy przekroje wiązki spinorów na rozmaitości $\mathcal{M}^n$, a przez $\Gamma(T \otimes S)$ – przekroje produktu tensorowego wiązki stycznej z wiązką S, to (zob. [26, s. 68])

$$D = \mu \circ \nabla : \Gamma(S) \to \Gamma(T \otimes S) \to \Gamma(S).$$

Tutaj μ jest *mnożeniem Clifforda.*

Formalnie jest to samosprzężony operator eliptyczny pierwszego rzędu *. Z ogólnej teori operatorów eliptycznych [6, s. 19], dla rozmaitości zwartych, wynika, że spectrum operatora Diraca jest dyskretne oraz spełnia asymptotyczną formułę Weyla

$$lim_{\lambda\to\infty}\frac{N(\lambda)}{\lambda^n}=\frac{2^{[\frac{n}{2}]}vol(\mathcal{M}^n)}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2}+1)},$$

gdzie $N(\lambda)$ oznacza liczbę wartości własnych o module $\leq\lambda$. Stąd szereg

$$\eta(s)=\sum_{\lambda\neq 0} sign(\lambda)\mid\lambda\mid^{-s}$$

jest zbieżny dla $s\in\mathbb{C}$, jeżeli część rzeczywista s jest dostatecznie duża. Można pokazać, że funkcja $\eta(s)$ rozszerza się do funkcji meromorficznej na całej płaszczyźnie zespolonej i nie ma bieguna w zerze.

Definicja 5.5 η-niezmiennikiem operatora Diraca D nazywamy liczbę $\eta(0)$.

† Niech $T^n=\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ oznacza płaski torus. Spin-struktury na T^n są zdefiniowane przez homomorfizmy $\epsilon:\mathbb{Z}^n\to\{\pm1\}\subset Spin(n)$. Oznaczmy przez $a_1^*,a_2^*,\ldots,a_n^*$ bazę grupy $(\mathbb{Z}^n)^*=\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^n,\mathbb{Z})$. Połóżmy

$$a_\epsilon:=\frac{1}{2}\sum_{\epsilon(a_l)=-1}a_l^*.$$

Niech $b\in(\mathbb{Z}^n)^*+a_\epsilon$, a zbiór

$$\{\sigma^j\mid j=1,2,3,\ldots,2^{[\frac{n}{2}]}\}$$

będzie standardową bazą przestrzeni zespolonej Σ_n. Można udowodnić (zob. [25, s. 61, twierdzenie 1]), że spinory $\Psi_b^j:\mathbb{R}^n\to\Sigma_n$, dane wzorem

$$x\mapsto e^{2\pi i<b,x>}\sigma^j,$$

są spinorami własnymi operatora D^2. Oznaczmy jako $E_b(D^2)$ przestrzeń generowaną przez spinory Ψ_b^j. Z definicji

$$D(\Phi)=2\pi ib\cdot\Phi,$$

*Więcej o historii oraz motywach zdefiniowania operatora Diraca można się dowiedzieć ze wstępu do książki T. Friedricha [26]. Zainteresowanym bardziej szczegółową teorią operatorów Diraca polecamy monografię N. Berline, E. Getzler i M. Vergne [7].

†Większość dalszego materiału pochodzi z pracy [42].

gdzie $\Phi \in E_b(D^2)$. Niech

$$E_{b\pm}(D) = \{\Psi \in E_b(D^2) \mid D\Psi = \pm 2\pi \mid b \mid \Psi\}.$$

Stąd $E_b(D^2) = E_{b+}(D) \oplus E_{b-}(D)$. Zdefiniujmy operator $F^{\pm} : E_b(D^2) \to E_{b\pm}(D)$ wzorem

$$F^{\pm}(\Psi) = (1 \pm \frac{1}{2\pi \mid b \mid} D)\Psi = (1 \pm i\frac{b}{\mid b \mid})\Psi.$$

Ponieważ $F^{\pm}$ jest surjekcją, więc spinory

$$\Phi^j_{b\pm} = F^{\pm}\Psi^j_b = (1 \pm i\frac{b}{\mid b \mid})\Psi^j_b$$

generują przestrzeń $E_{b\pm}(D)$, gdzie $j = 1, 2, \ldots, 2^{[\frac{n}{2}]}$. W przypadku $b = 0 \in (\mathbb{Z}^n)^* + a_\epsilon, E_0(D) = \Sigma_n$. Dla $b \neq 0$ mamy izomorfizm $E_{b+}(D) \simeq E_{b-}(D)$. Oznaczmy przez $c \in \mathbb{R}^n$ wektor prostopadły do b o normie jeden. Niech $M_c : E_b(D^2) \to E_b(D^2)$ będzie *mnożeniem Clifforda* przez c. Z definicji $M_c D\Phi = -DM_c\Phi$, dla $\Phi \in E_b(D^2)$. Stąd $M_c : E_{b\pm} \to E_{b\mp}$ i $(M_c)^2 = id$. W konsekwencji jest to izomorfizm i $\dim(E_{b\pm}) = \frac{1}{2}2^{[\frac{n}{2}]}$.

Przejdźmy teraz do przypadku ogólnego. Niech Γ będzie grupą podstawową orientowalnej rozmaitości płaskiej $\mathcal{M}^n$, ze spin-strukturą $\epsilon : \Gamma \to Spin(n)$. Jak dobrze wiemy, $\mathcal{M}^n$ ma skończone nakrycie $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, gdzie $\mathbb{Z}^n \subset \Gamma$ jest maksymalna. W związku z warunkiem $(*)$ z poprzedniego wykładu, połóżmy

$$A\Phi := \epsilon(\gamma)\Phi \circ \gamma^{-1},$$

gdzie A jest częścią liniową $\gamma \in \Gamma$, a Φ – spinorem na T^n. Niezmiennicze, ze względu na grupę holonomii, spinory torusa opisują spinory rozmaitości płaskiej $\mathcal{M}^n = \mathbb{R}^n/\Gamma$.

Lemat 5.1 [42, lemat 4.1] *Niech A będzie częścią liniową izometrii $\gamma = (A, a) \in \Gamma$. Wówczas dla $b \neq 0$ mamy*

$$A\Phi^j_{b\pm} = e^{-2\pi i < Ab, a >}(1 \pm \frac{Ab}{\mid Ab \mid})(\epsilon(\gamma)\Psi^j_{Ab}).$$

Dowód: Dla $x \in \mathbb{R}^n$ mamy

$$(\Psi^j_b \circ \gamma^{-1})(x) = e^{2\pi i < b, A^{-1}(x-a) >}\sigma^j$$

$$= e^{-2\pi i<Ab,a>}\Psi^j_{Ab}(x).$$

Z definicji

$$A\Phi^j_{b\pm} = \epsilon(\gamma)\Phi^j_{b\pm}\circ\gamma^{-1} = \epsilon(\gamma)(1 \pm i\frac{b}{\mid b\mid})\Psi^j_b\circ\gamma^{-1}$$

$$= (1 \pm i\frac{1}{\mid b\mid}\epsilon(\gamma)b\epsilon(\gamma)^{-1})\epsilon(\gamma)\Psi^j_b\circ\gamma^{-1}.$$

Ponieważ, z definicji spin-struktury, złożenie homomorfizmów $\lambda_n\epsilon$ jest rzutowaniem na pierwszą współrzędną, więc

$$\epsilon(\gamma)b\epsilon(\gamma)^{-1} = (\lambda_n\epsilon(\gamma))(b) = A(b).$$

Ponadto $\mid b\mid=\mid Ab\mid$ i stąd

$$A\Phi^j_{b\pm} = (1 \pm \frac{Ab}{\mid Ab\mid})(\epsilon(\gamma)e^{-2\pi i<Ab,a>}\Psi^j_{Ab}).$$

$\square$

Możemy napisać $A\Phi^j_{b\pm} = F^{\pm}(e^{-2\pi i<Ab,a>}\epsilon(\gamma)\Psi^j_{Ab})$. Stąd, dla wszystkich $\Phi \in E_{b\pm}(D)$, mamy $A\Phi \in E_{Ab\pm}(D)$. Niech H oznacza grupę $\Gamma/\mathbb{Z}^n$. Wiemy, że jest to grupa holonomii rozmaitości M^n i jest ona izomorficzna z podgrupą $SO(n)$.

Stwierdzenie 5.4 [42, twierdzenie 4.2] *Niech* $b \neq 0, \#H = \#(Hb)$ *i*

$$V = \oplus_{A\in H}E_{Ab}(D^2).$$

Wówczas wymiar podprzestrzeni K, D*-spinorów własnych rozmaitości* $\mathcal{M}^n$ *względem wartości własnych* $\pm 2\pi\mid b\mid$, *jest równy* $\frac{1}{2}2^{[\frac{n}{2}]}$.

Dowód: Założenie $k = \#H = \#(Hb)$ oznacza, że grupa H działa na H-orbity b bez punktów stałych. Oznacza to, że punkty $\{A_ib\}_{i=1,2,\ldots,k}$ są wszystkie różne, gdzie $A_i \in H$. Stąd przestrzenie $E_{A_jb}(D^2)$ są wzajemnie ortogonalne i

$$V^{\pm} = \oplus_{A\in H}E_{Ab\pm}(D).$$

Reprezentacja holonomii wyznacza reprezentację

$$\rho^{\pm} : H \to GL(V^{\pm}).$$

Oznaczmy jej charakter przez $\chi^{\pm}$. Z lematu 5.1 oraz z założenia, że przestrzeń liniowa $V^{\pm}$ zawiera wektory własne, wartości własnych $\pm 2\pi \mid b \mid$, wynika, że $\chi^{\pm}(A) = tr(\rho^{\pm}(A)) = 0$ dla $I \neq A \in H$. Podprzestrzeń K, D spinorów własnych jest równa podprzestrzeni $(V^{\pm})^H$. Stąd

$\dim K =< \chi^{\pm}, 1 >= \frac{1}{\# H} \Sigma_{A \in H} \chi^{\pm}(A) == \frac{1}{k}\chi^{\pm}(id) = \frac{1}{k}\dim(V^{\pm}) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2} \cdot k \cdot 2^{[\frac{2}{n}]}$.

□

Wniosek [42, wniosek 4.3]: *Jeżeli działanie grupy holonomii na zbiorze* $(\mathbb{Z}^n)^* + a_\epsilon$ *jest wolne, to spectrum operatora Diraca na rozmaitości* $\mathcal{M}^n$ *jest symetryczne.*

□

Wiadomo, że η-niezmiennik operatora eliptycznego mierzy symetryczność jego spektrum. Stąd dla operatora o symetrycznym spektrum η-niezmiennik jest równy zero. Dokładne wyliczenia η-niezmiennika dla rozmaitości płaskich wymiaru trzy można znaleźć w pracy [42].

Ćwiczenie 5.1 Udowodnić, że dla każdego $x \in \mathbb{R}^n, xx = - \mid\mid x \mid\mid^2$ i stąd $x^{-1} = \frac{-x}{||x||^2} = \frac{\bar{x}}{||x||^2}$.

Ćwiczenie 5.2 Niech $y \in \mathbb{R}^n \subset C_n$ i $x \in Pin(n)$. Udowodnić, że element $xyx^* \in \mathbb{R}^n$.

Ćwiczenie 5.3 Niech $x, y \in \mathbb{R}^n \subset C_n$. Udowodnić, że prawdziwy jest wzór

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x}).$$

Ćwiczenie 5.4 Udowodnić, że dla $n \geq 3$ grupa Spin(n) jest jednospójna, a λ_n jest nakryciem.

Ćwiczenie 5.5 Podać przykład nieizomorficznych wiązek głównych, które są izomorficzne jako rozwłóknienia (rozpatrzyć ostatni przykład).

Ćwiczenie 5.6 Udowodnić stwierdzenie 5.2.

Ćwiczenie 5.7 Udowodnić, że rozmaitości płaskie zdefiniowane przez grupy Hantzsche-Wendta nie mają spin-struktury.

Ćwiczenie 5.8 Uzupełnić dowód stwierdzenia 5.3.

Ćwiczenie 5.9 Znaleźć i opisać wszystkie spin-struktury na torusie.
W szczególności udowodnić, że spin-struktury na torusie T^n można interpretować jako zbiory ciągów $(\delta_{i_1}, \delta_{i_2}, \ldots, \delta_{i_n})$, gdzie $\delta_{i_j} \in \{0, 1\}$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$.

Ćwiczenie 5.10 Opisać izomorfizm $C_2^{\mathbb{C}}$ z $M_2(\mathbb{C})$. W szczególności pokazać, że macierze I, g_1, g_2, T stanowią bazę algebry zespolonej $M_2(\mathbb{C})$.

Ćwiczenie 5.11 Pokazać, że spinory Ψ_b^j są spinorami własnymi operatora D^2 (por. [25]).

Ćwiczenie 5.12 Udowodnić, że odwzorowanie M_c jest izomorfizmem.

Ćwiczenie 5.13 Obliczyć η-niezmiennik operatora Diraca trójwymiarowych, orientowalnych rozmaitości płaskich (zob. [42, twierdzenie 5.6]).

6. Płaskie rozmaitości ze strukturą zespoloną

W tej części zajmiemy się klasyfikacją płaskich rozmaitości ze strukturą zespoloną wymiaru sześć. Załóżmy, że n jest dodatnią liczbą parzystą, a Γ – n-wymiarową, beztorsyjną grupą krystalograficzną z grupą holonomii G.

Definicja 6.1 Reprezentacja holonomii $\Phi : G \to GL(n, \mathbb{Z})$ jest *właściwie zespolona*, jeżeli istnieje macierz $A \in GL(n, \mathbb{R})$, taka że

$$\forall g \in G, A\Phi(g)A^{-1} \in GL(\frac{n}{2}, \mathbb{C}).$$

Stwierdzenie 6.1 [36, twierdzenie 3.1] *Poniższe warunki są równoważne:*

(i) Γ *jest grupą podstawową płaskiej rozmaitości Kählera.*

(ii) Reprezentacja holonomii grupy Γ *jest* właściwie zespolona.

(iii) Γ *jest dyskretną i kozwartą podgrupą grupy* $U(\frac{n}{2}) \ltimes \mathbb{C}^{\frac{n}{2}}$.

Stwierdzenie 6.2 [36] *Niech* $h : G \to GL(m, \mathbb{R})$ *będzie wierną reprezentacją. Jest ona* właściwie zespolona *wtedy i tylko wtedy, gdy* m *jest liczbą parzystą i jej każdy* $\mathbb{R}$*-nieprzywiedlny składnik, który jest absolutnie nieprzywiedlny, występuje z parzystą wielokrotnością.*

Dowód: Niech W będzie lewym $\mathbb{R}[G]$-modułem zdefiniowanym przez reprezentację h, rozkładającym się na sumę prostą, $W = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$ $\mathbb{R}[G]$-modułów nieprzywiedlnych $V_i, i = 1, 2, \ldots, k$. Z twierdzenia o postaci $\mathbb{R}[G]$-nieprzywiedlnego modułu V (zob. [22, twierdzenie 73.9]) wynika, że może on być nieprzywiedlny na trzy różne sposoby. Co oznacza, że $End_{\mathbb{R}[G])}(V) = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, odpowiednio. Stąd mamy rozkład $W = W_{\mathbb{R}} \oplus W_{\mathbb{C}} \oplus W_{\mathbb{H}}$ na składniki ,,absolutnie nieprzywiedlne", ,,zespolone" i ,,kwaternionowe". Załóżmy, że $\mathbb{R}[G]$-moduł jest właściwie zespolony. Stąd otrzymujemy parzystość liczby m i przestrzeń

$$End_{\mathbb{R}[G]}(W_{\mathbb{R}}) \simeq M(n, \mathbb{R})$$

jest także właściwie zespolona wymiaru n^2, dla pewnej parzystej liczby naturalnej n. Łatwo można zobaczyć, że n jest liczbą absolutnie nieprzywiedlnych składników w powyższym rozkładzie modułu W. To dowodzi konieczności naszego warunku. Z drugiej strony, $V \otimes \mathbb{C}$ jest $\mathbb{C}[G]$-nieprzywiedlny, jest sumą prostą dwóch modułów *zespolono-sprzężonych* (przypadek ,,zespolony") i jest sumą prostą dwóch nieprzywiedlnych modułów (przypadek ,,kwaternionowy"). Dwa ostatnie przypadki są *właściwie zespolone* w sposób oczywisty. Natomiast z naszego założenia, o parzystej liczbie składników absolutnie nieprzywiedlnych, otrzymujemy, że można na niej zadać żądaną strukturę, utożsamiając $V \oplus V$ z $V \otimes \mathbb{C}$.

□

W ostatnich 20 latach, po rozwiązaniu przez S. T. Yau hipotezy E. Calabiego, bardzo wzrosło znaczenie rozmaitości zespolonych. Jedną z najważniejszych klas takich rozmaitości są rozmaitości Calabi-Yau. Definiujemy je jako Kählerowskie o płaskiej metryce Ricciego (zob. [53]) *. W sytuacji rozmaitości płaskich, warunek o posiadaniu płaskiej metryki Ricciego jest zawsze spełniony. Jednakże w tym przypadku obraz reprezentacji holonomii nie zawsze jest zawarty w grupie $SU(n)$ [8, stwierdzenie 10.29].

W tabeli 6.1 podana jest lista wszystkich grup podstawowych, płaskich rozmaitości ze strukturą zespoloną wymiaru sześć. Wykorzystano w niej klasyfikację grup Bieberbacha uzyskaną w programie CARAT [18]. Bardziej dokładne omówienie tabeli można znaleźć w pracy [53].

*Istnieją także inne definicje rozmaitości Calabi-Yau. W monografii [37, s. 123] jest podanych pięć nierównoważnych definicji.

Grupa holonomii	Liczba grup	Oznaczenia w CARAT i liczba Bettiego β_1
$\mathbb{Z}_2$	5	$\beta_1 = 2$, 174.1.1, 174.1.2, $\beta_1 = 4$, 173.1.1, 173.1.2, 173.1.3,
$\mathbb{Z}_3$	4	$\beta_1 = 2$, 291.1.1, 291.1.2, $\beta_1 = 4$, 311.1.1, 311.1.2,
$\mathbb{Z}_4$	22	$\beta_1 = 2$, 201.1.1, 202.1.2, 225.1.1., 225.1.10, 225.1.11, 225.1.12 (2 grupy), 225.1.13, 225.1.2, 225.1.3, 225.1.4 (2 grupy), 225.1.5, 225.1.6 (2 grupy), 225.1.7 (2 grupy), 225.1.8 (2 grupy), 225.1.9, $\beta_1 = 4$, 219.1.1, 219.1.2
$\mathbb{Z}_5$	2	$\beta_1 = 2$, 626.1.1, 626,1,2
$\mathbb{Z}_6$	14	$\beta_1 = 2$, 1611.1.1, 318.1.1, 318.1.2, 318.1.3, 318.1.5, 319.1.1, 319.1.2, 319.1.3, 319.1.5, 404.1.1, 404.1.2, 404.1.3, 404.1.4 $\beta_1 = 4$, 1694.1.1
$\mathbb{Z}_8$	1	$\beta_1 = 2$, 468.1.1
$\mathbb{Z}_{10}$	1	$\beta_1 = 2$, 7093.1.1
$\mathbb{Z}_{12}$	6	$\beta_1 = 2$, 359.1.1, 359.1.3, 359.1.4, 361.1.1, 361.1.2, 554.1.1
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	33	$\beta_1 = 0$, 185.1 (4 grupy), $\beta_1 = 2$, 186.1 (29 grup)
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$	45	$\beta_1 = 2$, 257.1 (19 grup), 1135.1 (26 grup)
$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$	13	$\beta_1 = 2$, 405.1.1 (5 grup), 405.1.2 (3 grupy), 405.1.3 (3 grupy), 405.1.4, 405.1.5
$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$	7	$\beta_1 = 2$, 1732.1 (5 grup), 2701.1 (2 grupy)
$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$	8	$\beta_1 = 2$, 1264.1 (8 grup)
$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3$	6	$\beta_1 = 2$, 2719.1 (2 grupy), 2720.1 (4 grupy)
$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_4$	4	$\beta_1 = 2$, 1920.1 (4 grupy)
$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$	1	$\beta_1 = 2$, 2752.1
D_4	1	$\beta_1 = 0$, 207.1.1

Tabela 6.1

Dodatek. Alternatywny dowód twierdzenia Bieberbacha

Przedstawiamy tutaj drugi dowód pierwszego twierdzenia Bieberbacha (twierdzenie 1.1) oparty na ideach M. Gromowa i pochodzący z pracy [14]. Niech Γ będzie grupą krystalograficzną wymiaru n. Mamy udowodnić, że jej podgrupa translacji zawiera n liniowo niezależnych elementów.

Niech $A \in O(n)$. Definiujemy

$$m(A) = max\{\mid Ax - x \mid / \mid x \mid \ \ |x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}.$$

Zauważmy, że zawsze mamy $\mid Ax - x \mid \leq m(A) \mid x \mid$, dla $x \in \mathbb{R}^n$. Ponadto zbiór

$$(i) \quad E_A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid\mid Ax - x \mid = m(A) \mid x \mid\}$$

jest nietrywialną A-niezmienniczą podprzestrzenią liniową. Wynika to z tzw. *warunku równoległoboku* i ciągu równości

$$2m^2(A)(\mid x \mid^2 + \mid y \mid^2) = 2(\mid Ax-x \mid^2 + \mid Ay-y \mid^2) = \mid A(x+y)-(x+y) \mid^2 +$$

$$+ \mid A(x-y)-(x-y) \mid^2 \leq m^2(A)(\mid x+y \mid^2 + \mid x-y \mid^2) = 2m^2(A)(\mid x \mid^2 + \mid y \mid^2),$$

gdzie $x, y \in E_A$. Niech $E_A^\perp$ będzie A-ortogonalnym dopełnieniem przestrzeni E_A. Definiujemy

$$(ii) \quad m^\perp(A) = max\{\mid ax - x \mid / \mid x \mid |x \in E_A^\perp \setminus \{0\}\},$$

jeżeli $E_A^\perp \neq 0$, i $m^\perp(A) = 0$ w przeciwnym wypadku. Stąd

$$(iii) \quad m^\perp(A) < m(A),$$

jeżeli $A \neq id$. Niech $x = x^E + x^\perp \in E_A \oplus E_A^\perp$. Wówczas

$$(iv) \quad \mid Ax^E - x^E \mid = m(A) \mid x^E \mid, \mid Ax^\perp - x^\perp \mid \leq m^\perp(A) \mid x^\perp \mid .$$

Na zakończenie tych elementarnych obserwacji zauważmy jeszcze, że $\forall A, B \in O(n)$ zachodzi

$$m([A,B]) \leq 2m(A)m(B).$$

Istotnie, mamy ciąg równości

$$[A,B] - id = (A - id)(B - id) - (B - id)(A - id)A^{-1}B^{-1}.$$

Ponieważ $\mid A^{-1}B^{-1}x \mid = \mid x \mid$, więc

$$\mid [A,B]x - x \mid \leq m(A)m(B) \mid x \mid + m(B)m(A) \mid x \mid,$$

dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^n$.

Lemat A(tzw. mały Bieberbach) *Dla dowolnego elementu $u \in \mathbb{R}^n$, o długości jeden, i dla dowolnych liczb dodatnich ϵ, δ, istnieje element $\beta = (B, b) \in \Gamma$, taki że $b \neq 0, \quad \angle(u, b) \leq \delta, \quad m(B) \leq \epsilon$.*

Dowód: Z definicji grupy Γ wynika, że istnieje stała d oraz ciąg jej elementów β_k, spełniający, dla dowolnej liczby naturalnej k, nierówność

$$\mid b_k - ku \mid \leq d.$$

Ponadto $\mid b_k \mid \to \infty, \quad \angle(u, b_k) \to 0 \quad (k \to \infty)$. Ponieważ $O(n)$ jest zwarta, więc istnieje podciąg, taki że dla $i < j$ zachodzi

$$m(B_j B_i^{-1}) \leq \epsilon, \quad \angle(u, b_j) \leq \delta/2, \quad \mid b_i \mid \leq \frac{\delta}{4} \mid b_j \mid .$$

W konsekwencji element $\beta_j \beta_i^{-1}$ ma żądane własności.

□

Lemat B *Jeżeli $\alpha = (A, a) \in \Gamma$ i $m(A) \leq \frac{1}{2}$, to α jest translacją.*

Dowód: Wybierzmy element $\alpha = (A, a) \in \Gamma$, spełniający założenia i z $m(A) \neq 0$. Z dyskretności grupy Γ możemy go wybrać tak, aby liczba $\mid a \mid$ była minimalna. Z lematu A, dla $u \in E_A$, mamy element $\beta = (B, b)$, taki że

$$(*) \quad b \neq 0, \quad \mid b^{\perp} \mid \leq \mid b^E \mid, \quad m(B) \leq \frac{1}{8}(m(A) - m^{\perp}(A).$$

Pośród nich wybierzmy znowu taki, że $\mid b \mid$ jest minimalne, ale różne od zera. Oczywiście $\mid a \mid \leq \mid b \mid$, jeżeli β nie jest translacją *. Niech $\tilde{\beta} = [\alpha, \beta]$. Z obserwacji przed lematem A mamy

$$m(\tilde{B}) = m([A,B]) \leq 2m(A)m(B) \leq m(B)$$

*$m(A) \neq 0$.

i ponadto

$$(**) \qquad \tilde{b} = (A - id)b^E + (A - id)b^\perp + r,$$

gdzie

$$r = (id - \tilde{B})b + A(id - B)A^{-1}a.$$

Jeżeli β jest translacją, to $B = id = \tilde{B}$ i $r = 0$. Jak już stwierdziliśmy, z wyboru α, w sytuacji gdy β nie jest translacją, mamy nierówność

$$\mid a \mid \leq \mid b \mid .$$

Stąd

$$\mid r \mid \leq (m(\tilde{B}) + m(B)) \mid b \mid \leq 2m(B) \mid b \mid < 4m(B) \mid b^E \mid .$$

W obydwu przypadkach mamy

$$(***) \qquad \mid r \mid < \frac{1}{2}(m(A) - m^\perp(A)) \mid b^E \mid .$$

Z definicji i wzoru $(**)$ mamy równanie

$$\tilde{b^E} - (A - id)b^E - r^E = (A - id)b^\perp + r^\perp - \tilde{b^\perp} = 0.$$

Stąd, wykorzystując $(*)$ ortogonalność wektorów r^E i $r^\perp$, mamy

$$\mid \tilde{b^\perp} \mid \leq m^\perp(A) \mid b^\perp \mid + \mid r^\perp \mid < m^\perp(A) \mid b^E \mid + \mid r \mid .$$

W konsekwencji, wykorzystując $(***)$, otrzymujemy nierówność

$$\mid \tilde{b^\perp} \mid < \frac{1}{2}(m(A) + m^\perp(A)) \mid b^E \mid .$$

Z drugiej strony,

$$\mid \tilde{b^E} \mid = \mid (A - id)b^E + r^E \mid \geq m(A) \mid b^E \mid - \mid r^E \mid >$$

$$> m(A) \mid b^E \mid - \frac{1}{2}(m(A) - m^\perp(A)) \mid b^E \mid =$$

$$= \frac{1}{2}(m(A) + m^\perp(A)) \mid b^E \mid .$$

Wykorzystaliśmy tutaj nierówności $(***)$ i

$$\mid x + y \mid \geq \mid\mid x \mid - \mid y \mid\mid .$$

Podsumowując, widzimy, że $\tilde{\beta}$ także spełnia warunek $(*)$ i wobec

$$\mid \tilde{b} \mid \leq m(A) \mid b \mid + \mid r \mid < m(A) + \frac{1}{2}(m(A) - m^{\perp}(A)) \mid b^E \mid < \mid b \mid$$

otrzymaliśmy sprzeczność.

□

Z lematu A wynika, że istnieje n elementów grupy Γ, których translacje są liniowo niezależne, a obroty mają normę mniejszą od $\frac{1}{2}$. Na podstawie lematu B skonstruowaliśmy w naszej grupie n liniowo niezależnych translacji.

□

Bibliografia

[1] J. F. Adams, Lecture on Lie groups, Benjamin, New York, 1969

[2] L. Auslander, Bieberbach's theorems on space groups and discrete uniform subgroup of Lie groups I, Ann. of Math. **71**, 1960, 579-590

[3] L. Auslander, Bieberbach's theorems on space groups and discrete uniform subgroup of Lie groups II, Amer. J. Math. **83**, 1961, 276-280

[4] C. Bagiński, Wstęp do teorii grup, Script, Warszawa, 2002

[5] S. Balcerzyk, Wstęp do algebry homologicznej, PWN, Warszawa, 1972

[6] C. Bär, Dependence of the Dirac spectrum on the spin structure, Sęminaires et Congręs **4**, 2000, 17-33

[7] N. Berline, E. Getzler, M. Vergne, Heat kernels and Dirac operators, Springer, Berlin, 1992

[8] A. L. Besse, Einstein Manifolds, Springer, Berlin, 1987

[9] L. Bieberbach, Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume I, Math. Ann. **70**, 1911, 297-336

[10] L. Bieberbach, Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume II, Math. Ann. **72**, 1912, 400-412

[11] W. M. Boothby, An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry, Academic Press, Orlando, 1986

[12] K. S. Brown, Cohomology of groups, Springer, New York, 1982

[13] P. Buser, H. Karcher, The Bieberbach case in Gromov's almost flat manifold theorem, Global differential geometry and global analysis proceedings (Berlin 1979), Lecture Notes in Math. 838, Springer, Berlin, 1981, 82-93

[14] P. Buser, H. Karcher, A geometric proof of Bieberbach's theorems on crystallographic groups, L'enseignement Math. **31**, 1985, 137-145

[15] P. Buser, H. Karcher, Almost flat manifolds, Asterisque **81**, Paris, 1981

[16] E. Calabi, Closed, locally euclidean, 4-dimensional manifold, Bull. American Math. Soc. **63**, 1957, 135

[17] L. S. Charlap, Bieberbach groups and flat manifolds, Springer, New York, 1986

[18] C. Cid, T. Schulz, Computation of five and six dimensional Bieberbach groups, Exp. Math. **10**(1), 2001, 109-115

[19] G. Cliff, A. Weiss, Torsion free space groups and permutation lattices for finite groups, Contemp. Math. **93**, 1989, 123-132

[20] J. Conway, J. P. Rossetti, Describing the platycosms, preprint, Princeton University, arXive:math.DG/0311476

[21] W. C. Curtis, I. Reiner, Representation theory of finite groups and associative algebras, Wiley, New York, 1962

[22] W. C. Curtis, I. Reiner, Methods of representation theory, vol. 1, Wiley, New York, 1981

[23] R. Engelking, Topologia ogólna, PWN, Warszawa, 1975

[24] D. R. Farkas, Crystallographic groups and their mathematics, Rocky Mountains J. Math. **11**(8), 1981, 511-551

[25] T. Friedrich, Die Abhängigkeit des Dirac-Operators von der Spin-Struktur, Coll. Math. **47**, 1984, 57-62

[26] T. Friedrich, Dirac operators in Riemannian geometry, AMS, Graduate Studies in Mathematics, vol. 25, Providence, Rhode Island, 2000

[27] G. Frobenius, Über die unzerlegbaren diskreten Bewegungsgruppen, Sitz. ber. der Preuss. Acad. Wissen., Berlin (1911), 654-665

[28] A GAP package, http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/ gap

[29] M. Gromow, Almost flat manifolds, J. Differential Geometry **13**, 1978, 231-241

[30] H. Hiller, C. H. Sah, Holonomy of flat manifolds with $b_1 = 0$, Quartely J. Math. **37**, 1986, 177-187

[31] J. Hillmann, Flat 4-manifold groups, New Zealand, J. Math. **24**, 1995, 29-40

[32] G. Hiss, A. Szczepański, Flat manifolds with only finitely many affinities, Bull. Sci. Acad. Pol. Math. **45**, 1997, 349-357

[33] G. Hiss, A. Szczepański, Holonomy groups of Bieberbach groups with finite outer automorphism groups, Arch. Math. **65**, 1995, 8-14

[34] J. Hołdys, Twierdzenia Bieberbacha, Zapis referatu na seminarium, Uniwersytet Gdański, 1999/2000

[35] B. Iversen, Lectures on Crystallographic groups, Matematisk Institute Aarhus Universitet, Lectures Notes Series 60, 1990/1991 (Fall 1990)

[36] F. E. A. Johnson, E. G. Rees, Kähler groups and rigidity phenomena, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **109**, 1991, 31-44

[37] D. D. Joyce, Compact manifolds with special holonomy, Oxford Univ. Press, New York, 2000

[38] S. Lang, Algebra, PWN, Warszawa, 1973

[39] W. Malfait, A. Szczepański, The structure of the (outer) automorphism group of a Bieberbach group, Compositio Math. **136**, 2003, 89-101

[40] J. Milnor, J. D. Stasheff, Characteristic classes, Annals of Math. Studies 76, Princeton Univ. Press, Princeton, 1974

[41] J. Opgenorth, W. Plesken, T. Schulz, Crystallographic algorithms and tables, Acta Cryst. Sect A, **54**(5), 1998, 517-531

[42] F. Pfaffle, The Dirac spectrum of Bieberbach manifolds, J. Geom. Phys. **35**(4), 2000, 367-385

[43] W. Plesken, Kristallographische gruppen, group theory, algebra, and number theory, Colloquium in memory of Hans Zassenhaus, Saarbrucken, June 4-5, 1993, de Gruyter, Berlin, 1996, 75-96

[44] W. Plesken, Minimal dimensions for flat manifolds with prescribed holonomy, Math. Ann. **284**, 1989, 477-486

[45] H. L. Porteous, Anosov diffeomorphisms of flat manifolds, Topology **11**, 1972, 307-315

[46] D. Quillen, The mod 2 cohomology rings of extra-special 2-groups and the spinor groups, Math. Ann. **194**, 1971, 197-212

[47] J. P. Rossetti, A. Szczepański, Generalized Hantzsche-Wendt flat manifolds, Revista Iberoam. Mat. **21**(3), 2005, 1053-1079

[48] J. P. Serre, Reprezentacje liniowe grup skończonych, PWN, Warszawa, 1988

[49] C. L. Siegel, Discontinuous groups, Ann. of Math. **44**, 1943, 674-689

[50] I. Stewart, D. Tall, Algebraic number theory, Chapman and Hall, London, 1987

[51] A. Szczepański, Decomposition of flat manifolds, Mathematika **44**, 1997, 113-119

[52] A. Szczepański, Grupy krystalografii, Zapis referatu na seminarium z topologii algebraicznej, Uniwersytet Warszawski, październik 1980

[53] A. Szczepański, Kähler flat manifolds of low dimension, Preprint, IHES, M 43, 2005

[54] A. Szczepański, Outer automorphism groups of Bieberbach groups, Bull. Belgian Mathem. Soc. Simon Stevin, **3**, 1996, 585-593

[55] A. Szczepański, Zwarte płaskie rozmaitości z pierwszą liczbą Bettiego równą zero, Praca doktorska, Uniwersytet Warszawski, 1987

[56] W. Szlenk, Wstęp do teorii gładkich układów dynamicznych, PWN, Warszawa, 1982

[57] J. Tits, Free subgroups of linear groups, J. Algebra **20**, 1972, 250-270

[58] A. T. Vasquez, Flat Riemannian manifolds, J. Diff. Geom. **4**, 1970, 367-382

[59] R. Waldmüller, A flat manifold with no symmetries, Exp. Math. **12**, 2003, 71-77

[60] J. Wolf, Spaces of constant curvature, MacGrow Hill, New York, 1967

[61] H. Zassenhaus, Beweis eines Satzes über diskrete Gruppen, Abh. Math. Sem., Univ. Hamburg **12**, 1938, 289-312

[62] H. Zieschang, Cystallographic groups, Lecture Notes in Mathematics 875, Springer, Berlin, 1981, 101-133

Indeks