Algebra liniowa

Ćwiczenia I

1. Przedstawić w postaci $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ podane liczby zespolone:
   (a) $(2+i)(3-i) + (2+3i)(3+4i)$
   (b) $\frac{(3-i)(1-4i)}{2i-1}$
   (c) $\frac{1}{(1-i)^4}$
2. Obliczyć i^{77}, i^{-57}.
3. Wyznaczyć liczby rzeczywiste x i y spełniające równanie:
$$(2+i)x + (1+2i)y = 1-4i$$
4. Rozwiązać układ równań:
$$\begin{cases} iz_1 + (1+i)z_2 = 2+2i \\ 2iz_1 + (3+2i)z_2 = 5+3i \end{cases}$$
5. Obliczyć $|z|$ dla $z = \frac{(1+2i)^2(3-4i)}{(7-i)^2}$
6. Podać interpretację geometryczną następujących zbiorów liczb zespolonych:
   (a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$
   (b) $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > 1\}$, gdzie $z_0 = -2 + 3i$
   (c) $\{t\omega \in \mathbb{C} : t \in \mathbb{R}\}$, gdzie $\omega = 1 + i$
7. Niech α i β będą ustalonymi liczbami zespolonymi, $|\alpha| = 1$, $\beta \neq 0$. Podać interpretację geometryczną następujących funkcji zespolonych:
   (a) $f(z) = z + \beta$
   (b) $f(z) = \frac{z}{\alpha}$
   (c) $f(z) = \alpha z + \beta$
   (d) $f(z) = \overline{z}$
8. Wykazać tożsamość
$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$
i podać jej interpretację geometryczną.
9. Przedstawić w postaci trygonometrycznej liczby:
   (a) 5
   (b) $-3i$
   (c) $3 + 3i$
   (d) $\sqrt{3} - i$
   (e) $\cos\alpha - i\sin\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$
10. Przedstawić w postaci trygonometrycznej liczbę:
$$\frac{1 + i\operatorname{tg}\alpha}{1 - i\operatorname{tg}\alpha}$$
gdzie α jest ustaloną liczbą rzeczywistą.
11. Obliczyć wyrażenia:
   (a) $(1 + i\sqrt{3})^{150}$
   (b) $(1+i)^{4n}$, $n \in \mathbb{Z}$
   (c) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}$
12. Wyrazić w postaci wielomianu od $\sin x$ i $\cos x$ funkcję $\sin 3x$.
13. Obliczyć:
   (a) $\sqrt{i}$
   (b) $\sqrt[3]{1}$
   (c) $\sqrt[3]{-1+i}$
   (d) $\sqrt{5-12i}$
14. Znaleźć wszystkie pierwiastki równań:
   (a) $z^4 = 1$
   (b) $2z^2 + 2z + 5 = 0$
   (c) $z^2 - (3+i)z + 4 + 3i = 0$
   (d) $z^3 + 8z^2 + 4z + 32 = 0$
   (e) $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$
15. Rozłożyć wielomian $x^4 + 1$ na iloczyn dwóch wielomianów stopnia 2 o współczynnikach rzeczywistych.