Algebra liniowa

Domowe I

1. Przedstawić w postaci $a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$ podane liczby zespolone:
   (a) $(x+yi)(x-yi)$, $x,y\in\mathbb{R}$
   (b) $\frac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}$
   (c) $(2+i)^3+(2-i)^3$
2. Obliczyć i^{98}, i^n, $(1+i)^{4n}$ dla $n\in\mathbb{Z}$.
3. Wyznaczyć liczby rzeczywiste x i y spełniające równanie:
$$(3+2i)x+(1+3i)y=4-9i$$
4. Wyznaczyć wszystkie liczby zespolone z spełniające równanie:
$$iz+(2-10i)z=3z+2i$$
5. Rozwiązać układ równań:
$$\begin{cases}2z_1-(2+i)z_2=-i\\(4-2i)z_1-5z_2=-1-2i\end{cases}$$
6. Obliczyć $|z|$ dla $z=\frac{(1+i)^4}{(1+6i)(2-7i)}$
7. Podać interpretację geometryczną następujących zbiorów liczb zespolonych:
   (a) $\{z\in\mathbb{C}\mid 1\leqslant|z|<2\}$
   (b) $\{z\in\mathbb{C}\mid 4<|z-z_0|<5\}$, gdzie $z_0=5i-1$
   (c) $\{z\in\mathbb{C}\mid |z-a|=|z-b|\}$, $a\neq b$ ustalone liczby zespolone
8. Niech $|\alpha|=1$. Podać interpretację geometryczną następujących funkcji zespolonych:
   (a) $f(z)=\alpha z$
   (b) $f(z)=\alpha^2\overline{z}$
9. Udowodnić, że
   (a) liczba zespolona jest liczbą rzeczywistą wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{z}=z$;
   (b) liczba zespolona jest liczbą czysto urojoną wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{z}=-z$.
10. Przedstawić w postaci trygonometrycznej liczby:
   (a) -2
   (b) $3i$
   (c) $\sqrt{3}+i$
   (d) $1+i\sqrt{3}/3$
   (e) $1-i$
   (f) $-\sqrt{3}+i$
   (g) $-\sqrt{3}-i$
   (h) $(1+i)(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)$
   (i) $\frac{(1+i)^5(1-i\sqrt{3})^5}{(\sqrt{3}+i)^4}$
   (j) $\sin\alpha+i\cos\alpha$
11. Obliczyć wyrażenia:
   (a) $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{3n}$, $n\in\mathbb{Z}$
   (b) $\left(\frac{1+i\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-i\,\mathrm{tg}\,\alpha}\right)^{n}$, $n\in\mathbb{Z}$
   (c) $(1+\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})^6$
   (d) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{-30}$
12. Przedstawić w postaci $a+bi$ liczbę:
$$1+(1+i)+(1+i)^2+\ldots+(1+i)^{99}$$
13. Wyrazić w postaci wielomianów od $\sin x$ i $\cos x$ funkcje:
   (a) $\cos 3x$
   (b) $\sin 4x$
14. Obliczyć:
   (a) $\sqrt{3+4i}$
   (b) $\sqrt{1+i}$
   (c) $\sqrt[3]{i}$
   (d) $\sqrt[6]{-27}$
   (e) $\sqrt[4]{8\sqrt{3}i-8}$
   (f) $\sqrt[3]{2-2i}$
15. Znaleźć wszystkie pierwiastki równań:
   (a) $z^4-i=0$
   (b) $z^6+64=0$
   (c) $z^3+8=0$
   (d) $z^2-3z+3+i=0$
   (e) $z^4-2z^2+4=0$
   (f) $z^2+2(1+i)z+2i=0$
   (g) $z^3-3z-18=0$
   (h) $z^5-3z^4+2z^3-6z^2+z-3=0$
   (i) $z^6+9z^4-16z^2-144=0$
16. Niech $a+bi$ będzie jedną spośród dwóch wartości pierwiastka $\sqrt{z}$. Znaleźć wartości następujących pierwiastków:
$$\sqrt{\overline{z}},\quad \sqrt{-z},\quad \sqrt{-\overline{z}}$$
17. Wykazać, że jeżeli równanie $az^2+bz+c=0$, gdzie $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$ ma pierwiastek rzeczywisty, to drugi pierwiastek też jest rzeczywisty.