Algebra liniowa

Domowe III

1. Wyznaczyć wektor x z równań
   (a) $a_1+2a_2+3a_3+4x=0$, gdzie $a_1=(5,-8,-1,2)$, $a_2=(2,-1,4,-3)$, $a_3=(-3,2,-5,4)$,
   (b) $3(a_1-x)+2(a_2+x)=5(a_3+x)$, gdzie $a_1=(2,5,1,3)$, $a_2=(10,1,5,10)$, $a_3=(4,1,-1,1)$.

2. Niech $P(2,3,1)$, $Q(3,1,-2)$, $R(1,4,0)$, $S(-5,1,5)$. Sprawdź, że $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{SR}$.

3. Wyznaczyć równania wektorowe i parametryczne prostej:
   (a) przechodzącej przez punkt $(4,0,1,5,-3)$ i równoległej do wektora $(-2,0,1,2,-1)$,
   (b) przechodzącej przez punkty $(1,0,-2,-5)$ i $(-3,2,-1,2)$.

4. Wyznacz punkt wspólny prostych (jeżeli istnieje)
   (a) $x=(1,2)+t(3,5)$ oraz $x=(3,-1)+s(4,1)$, $t,s\in\mathbb{R}$
   (b) $x=(1,0,1)+t(3,-1,2)$ oraz $x=(5,0,7)+s(-2,2,2)$, $t,s\in\mathbb{R}$

5. Wyznacz równania parametryczne i wektorowe prostej $2x+3y=5$.

6. (a) Wyznaczyć punkt, który dzieli odcinek o końcach A i B w stosunku $p:q$.
   (b) Wyznaczyć środek ciężkości trójkąta o wierzchołkach A,B,C.

7. Wyznaczyć punkty wspólne (jeżeli istnieją) prostych
   (a) $x=(1,2)+t(3,5),\ t\in\mathbb{R}$ oraz $x=(3,-1)+s(4,1),\ s\in\mathbb{R}$,
   (b) $x=(3,4,5)+t(1,1,1),\ t\in\mathbb{R}$ oraz $x=(2,4,1)+s(2,3,-1),\ s\in\mathbb{R}$.

8. Sprawdź czy podane punkty leżą na jednej prostej
   (a) $P=(1,2,2,1),\ Q=(4,1,4,2)$, $R=(-5,4,-2,-1)$,
   (b) $P=(1,0,1,2),\ Q=(3,-2,3,1)$, $R=(-3,4,-1,5)$,

9. Wykaż (używając rachunku wektorowego), że jeżeli punkty A,B,C,D są wierzchołkami takiego czworokąta na płaszczyźnie, że przekątne AC i BD dzielą się na połowy, to czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.

10. Wyznacz wektor długości 1 równoległy do wektora $(2,-1,3,1)$.

11. Sprawdź, czy podane wektory są ortogonalne
    (a) $(1,3,2),(2,-2,2)$
    (b) $(-3,1,7),(2,-1,2)$
    (c) $(4,1,0,-2),(-1,4,3,0)$

12. Wyznacz kąt między wektorami $(1,1,0,1)$ i $(2,2,2,2)$.

13. Podaj przykład niezerowych wektorów $a,b,c\in\mathbb{R}^2$ takich, że $b\neq c$, ale $a\circ b=a\circ c$.

14. (a) Uzasadnij, że $||a+b||^2+||a-b||^2=2(||a||^2+||b||^2)$.
    (b) Korzystając z (a) uzasadnij, że suma kwadratów przekątnych równoległoboku jest równa sumie kwadratów jego boków.

15. Wyznacz punkt wspólny płaszczyzny $3x_1-2x_2+5x_3=0$ i prostej $x=(2,3,1)+t(1,-2,-4)$, $t\in\mathbb{R}$.

16. Wyznacz równania wektorowe i parametryczne płaszczyzny przechodzącej przez punkty $(2,-1,-1),(5,1,2),(-3,1,0)$.

17. Wyznacz równanie parametryczne prostej będącej prostą wspólną płaszczyzn $-x+2y+z-5=0$ oraz $x-2y=0$.

18. Napisz równanie parametryczne prostej prostopadłej do płaszczyzny $x-4y+2z=1$ i przechodzącej przez punkt $(1,0,0)$.

19. Napisz ogólne równanie parametryczne prostej zawartej w płaszczyźnie $x-4y+2z=1$ i przechodzącej przez punkt $(1,0,0)$.

20. Czy płaszczyzna $x-4y+2z=1$ zawiera prostą równoległą do
    (a) osi Oz?
    (b) prostej $x=(0,2,1)+t(0,1,2)$, $t\in\mathbb{R}$?