# Algebra liniowa

Ćwiczenia V

1. Oblicz

   (a) $3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}^2$

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}^t$

   (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^2$

   (d) $\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}^2$

   (e) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 10 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 8 \\ 3 & 2 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_{11}$

   (f) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$

2. Wykazać, że ślad iloczynu dwóch macierzy kwadratowych nie zależy od kolejności czynników.

3. Wykazać następujące własności operacji transponowania macierzy:

   (a) $(A+B)^t = A^t + B^t$

   (b) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$

   (c) $(AB)^t = B^t \cdot A^t$

   (d) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

4. Wyznaczyć metodą „lusterko" macierz odwrotną do danej:

   (a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

5. Podany układ równań zapisać w postaci macierzowej i go rozwiązać

   (a)
   $$\begin{cases} 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -4x_1 + 5x_2 + 10x_3 = -6 \end{cases}$$

   (b)
   $$\begin{cases} 2x_2 - 8x_3 = a \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = b \\ -4x_1 + 5x_2 + 10x_3 = c \end{cases}$$

   (c) Jeżeli $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dane wzorem
   $$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -8 \\ 1 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$
   to jaka jest interpretacja wzoru otrzymanego w podpunkcie (b)?

6. Rozwiązać równanie macierzowe
   $$XA + X = B,$$
   gdzie $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 5 \\ 2 & -5 & 7 \end{bmatrix}$

7. Wykazać, że macierze zespolone $A$ i $B$ spełniają

   (a) $\overline{A \cdot B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$.

   (b) $\left(\overline{A}\right)^{-1} = \overline{(A^{-1})}$

8. Wykazać, że każdą macierz kwadratową można jednoznacznie przedstawić w postaci sumy macierzy symetrycznej i antysymetrycznej.

9. Udowodnić, że iloczyn dwóch symetrycznych lub antysymetrycznych macierzy jest macierzą symetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy są one przemienne.