Algebra liniowa

Domowe V

1. Obliczyć:

   (a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} +$
   $+ \begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & -2 \\ -3 & -3 & 8 \end{bmatrix}^t$

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^2$

   (c) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^n$, dla $n \in \mathbb{N}$

   (d) $f(A)$, gdzie $f(x) = x^3 - 3x + 2$,
   $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

2. Wykazać, że jeżeli C jest macierzą nieosobliwą (tzn. istnieje C^{-1}), to dla dowolnej macierzy kwadratowej A tego samego stopnia $\operatorname{tr}(CAC^{-1}) = \operatorname{tr} A$.

3. Wyznaczyć metodą „lusterko" macierz odwrotną do danej:

   (a) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

   (e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$

4. Rozwiązać równania macierzowe

   (a) $\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

   (b) $X \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

   (d) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

   (e) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

5. Podany układ równań zapisz w postaci macierzowej i rozwiąż go.

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

   Zapisz ten układ i jego rozwiązanie w terminach pewnego odwzorowania $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$. Podaj wzór tego odwzorowania.

6. Podane dwa układy równań zapisz jako jedno równanie macierzowe i rozwiąż je.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 10 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 18 \end{cases}$$

7. Macierz A nazywamy

   (a) *hermitowską* jeżeli $A^t = \overline{A}$

   (b) *antyhermitowską* jeżeli $A^t = -\overline{A}$

   Wykazać, że macierz odwrotna do macierzy symetrycznej, antysymetrycznej, hermitowskiej lub antyhermitowskiej jest odpowiednio macierzą symetryczną, antysymetryczną, hermitowską lub antyhermitowską.

8. (a) Udowodnić, że iloczyn macierzy symetrycznej i antysymetrycznej jest macierzą antysymetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy są one przemienne.

   (b) Udowodnić, że iloczyn dwóch macierzy antyhermitowskich jest macierzą hermitowską wtedy i tylko wtedy, gdy są one przemienne.

   (c) Wykazać, że jeżeli obie macierze A iB są symetryczne lub antysymetryczne, to $[A, B] = AB - BA$ jest macierzą antysymetryczną

9. (a) Wykazać, że jeśli macierze A i B są ortogonalne, to macierze A^{-1} i AB też są ortogonalne (macierz A nazywamy *ortogonalną*, jeżeli $A^t = A^{-1}$).

   (b) Wyznaczyć wszystkie macierze ortogonalne i antysymetryczne stopnia 2.