

Algebra liniowa

Ćwiczenia VI

1. Które z podanych zbiorów liczbowych wraz ze zwykłymi działaniami dodawania i mnożenia są ciałami:

- (a) zbiór \mathbb{Z} ;
- (b) zbiór \mathbb{Q} ;
- (c) zbiór $\mathbb{Q}_+ \cup \{0\} = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq 0\}$;
- (d) zbiór liczb rzeczywistych postaci $x + y\sqrt{3}$, gdzie $x, y \in \mathbb{Q}$;

2. Wyznaczyć element odwrotny do 13 w ciele \mathbb{Z}_{23} .

3. Zbadać, które z podanych zbiorów wektorów są podprzestrzeniami odpowiedniej przestrzeni wektorowej:

- (a) wektory płaszczyzny o początku w punkcie $O = (0, 0)$, których końce leżą na jednej z dwóch różnych prostych przecinających się w punkcie O ;
- (b) wektory płaszczyzny o początku w punkcie O , których końce leżą na danej prostej;
- (c) wektory płaszczyzny, których końce leżą w pierwszej ćwiartce;
- (d) wektory przestrzeni \mathbb{R}^n , których współrzędne są liczbami całkowitymi;
- (e) wektory przestrzeni \mathbb{C}^n , których współrzędne spełniają równanie $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$;
- (f) wektory przestrzeni \mathbb{C}^n , będące kombinacjami liniowymi danych wektorów a_1, \dots, a_k ;
- (g) wektory przestrzeni \mathbb{R}^n będące rozwiązaniami danego układu równań liniowych;
- (h) ciągi zbieżne liczb rzeczywistych;
- (i) ciągi liczb rzeczywistych zbieżne do a ;
- (j) ciągi liczb rzeczywistych, które spełniają równanie rekurencyjne

$$u(n+2) + \alpha u(n+1) + \beta u(n) = f(n)$$

- (k) wielomiany czwartego stopnia.

4. Czy \mathbb{R}^n jest przestrzenią liniową nad \mathbb{C} ? Czy jest to przestrzeń liniowa nad \mathbb{Q} ?

5. Ile jest podprzestrzeni liniowych w \mathbb{Z}_2^3 ? Opisać je równaniami.

6. Czy wektor $(1, 1, 1)$ należy do podprzestrzeni liniowej \mathbb{R}^3 rozpiętej przez $(1, 3, 2)$, $(1, 2, 1)$, $(2, 5, 3)$. A wektor $(1, 4, 3)$?

7. Udowodnić, że każdy wektor przestrzeni \mathbb{C}^3 rozpiętej na wektorach

$$(i, 1, -1), (i, -i, i), (i, -1, 1)$$

spełnia warunek $x_2 + x_3 = 0$. Natomiast nie każdy spełnia $x_1 = i$.

8. Opisać podprzestrzeń

$$\text{lin}\{(1, 2, 1, 3), (2, 5, 2, 7), (1, 3, 1, 4)\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

układem równań liniowych.