Algebra liniowa

Domowe VI

1. Które z podanych zbiorów liczbowych wraz ze zwykłymi działaniami dodawania i mnożenia są ciałami:
   (a) zbiór $n\mathbb{Z}$, $n > 1$;
   (b) zbiór nieujemnych liczb całkowitych;
   (c) zbiór liczb rzeczywistych postaci $x + y\sqrt{2}$, gdzie $x, y \in \mathbb{Q}$;
   (d) zbiór liczb rzeczywistych postaci $x + y\sqrt[3]{2}$, gdzie $x, y \in \mathbb{Q}$;
   (e) zbiór liczb zespolonych postaci $x + yi$, gdzie $x, y \in \mathbb{Z}$;
   (f) zbiór liczb zespolonych postaci $x + yi$, gdzie $x, y \in \mathbb{Q}$;

2. Udowodnić, że jeżeli n nie jest liczbą pierwszą to zbiór $\mathbb{Z}_n$ nie jest ciałem

3. Wyznaczyć element odwrotny do
   (a) 7 w ciele $\mathbb{Z}_{17}$
   (b) 11 w ciele $\mathbb{Z}_{23}$
   (c) 13 w ciele $\mathbb{Z}_{31}$

4. Dla każdego z poniższych podzbiorów w $\mathbb{R}^2$ sprawdzić, czy spełnia on warunek (1) oraz czy spełnia on warunek (2) z definicji podprzestrzeni liniowej.
   (a) $\{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2$ są liczbami całkowitymi$\}$
   (b) $\{(x_1, x_2) \mid x_1 = 0$ lub $x_2 = 0\}$
   (c) $\{(x_1, x_2) \mid |x_1| - |x_2| = 1\}$
   (d) $\{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 2x_1x_2\}$

5. Podaj przykład dwóch podprzestrzeni liniowych $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^2$, dla których $V_1 \cup V_2$ nie jest podprzestrzenią liniową.

6. Udowodnij, że jeżeli $V_1, V_2 \subseteq V$ są podprzestrzeniami liniowymi, to $V_1 \cap V_2$ też jest podprzestrzenią liniową.

7. Dla jakich wartości parametru $s \in \mathbb{R}$ następujący podzbiór przestrzeni $\mathbb{R}^4$ jest podprzestrzenią liniową
$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = s^2 - 1 \text{ oraz } x_1 + x_2 + sx_4^2 = x_4^2\}$$

8. Niech K^∞ oznacza przestrzeń nieskończonych ciągów o elementach z ciała K. Zbadać, które z podanych zbiorów stanowią podprzestrzeń w K^∞:
   (a) ciągi, które mają skończoną liczbę elementów różnych od zera;
   (b) ciągi, które mają skończoną liczbę elementów równych zeru;
   (c) ciągi, których wszystkie elementy są różne od 1;
   (d) ciągi ograniczone dla $K = \mathbb{R}$;

9. Niech $R[x]_n$ oznacza przestrzeń wielomianów o współczynnikach rzeczywistych stopnia co najwyżej n. Wyjaśnić, które z następujących zbiorów wielomianów stanowią podprzestrzeń w $R[x]_n$:
   (a) wielomiany, dla których dane $a \in \mathbb{R}$ jest pierwiastkiem;
   (b) wielomiany, dla których dane $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ jest pierwiastkiem;
   (c) wielomiany, dla których dane $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ są pierwiastkami;
   (d) wielomiany dla których dane $a \in \mathbb{R}$ jest pierwiastkiem pojedynczym.

10. Niech $C(\mathbb{R})$ będzie przestrzenią liniową funckcji ciągłych $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ z działaniem dodawania i mnozeniem przez stalą. Ktore podzbiory $C(\mathbb{R})$ sa podprzestrzeniami liniowymi?
    (a) wielomiany?
    (b) funkcje spełniające $f(0) = 1$?
    (c) funkcje spełniające $f(1) = 0$?
    (d) funkcje spełniające $f(x) = f(-x)$, dla kazdego $x \in \mathbb{R}$?
    (e) funkcje spełniające $f(x) > 0$ dla $x > 0$?
    (f) funkcje spełniające: f jest dwukrotnie rozniczkowalna i $f = -f''$?
    (g) funkcje okresowe?
    (h) funkcje okresowe o okresie T?

11. Ile jest podprzestrzeni liniowych w $\mathbb{Z}_2^4$? Opisać je równaniami.

12. Ile jest podprzestrzeni liniowych w $\mathbb{Z}_3^2$? Opisać je równaniami.

13. Czy wektor $(1, 1, 1, 1)$ należy do podprzestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$ rozpiętej przez $(1, 2, 4, 3)$, $(0, 1, 3, 3)$, $(1, 2, 1, 5)$. A wektor $(0, 1, 6, 1)$?

14. Udowodnić, że każdy wektor przestrzeni $\mathbb{C}^4$ rozpiętej na wektorach
$$(i, 1, -i, -1), (i, -i, 1, -1), (1, 0, 0, -1)$$
    spełnia warunek $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Natomiast nie każdy spełnia $x_4 = -1$.

15. Opisać równaniami podprzestrzenie liniowe rozpięte przez wektory
    (a) $\{(1, -1, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (2, 0, 1, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$
    (b) $\{(1, -1, 1, -1, 1), (1, 1, 0, 0, 3), (3, 1, 1, -1, 7), (0, 2, -1, 1, 2)\} \subseteq \mathbb{R}^5$