Algebra liniowa

Ćwiczenia VII

1. Sprawdzić czy podane układy wektorów są liniowo niezależne.
   (a) $a_1 = (4, -12)$ i $a_2 = (-2, 6)$
   (b) $a_1 = (1, 2, 3)$ i $a_2 = (3, 6, 7)$
   (c) $a_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (3, 1, 1)$ i $a_3 = (2, -1, -2)$
2. Pokazać, że wektory $a_1 = (1, 2)$ i $a_2 = (3, 1)$ przestrzeni $\mathbb{Z}_5^2$ są liniowo zależne (nad $\mathbb{Z}_5$).
3. Załóżmy, że układ wektorów (a_1, a_2, a_3) jest liniowo niezależny. Czy układ (b_1, b_2), gdzie
$$b_1 = 3a_1 + 2a_2 + a_3$$
$$b_2 = 2a_1 + 5a_2 + 3a_3$$
   jest liniowo zależny?
4. Wykazać, że jeśli wektory $a_1, \ldots, a_n$ są liniowo niezależne, a wektory $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ są liniowo zależne, to wektor b jest kombinacją linową wektorów $a_1, \ldots, a_n$.
5. Wyznaczyć rząd macierzy:
$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$
   Niech $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ dane wzorem
$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 \\ x_1 + 7x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 \end{bmatrix}$$
   Jaki jest związek rzędu macierzy A z własnościami f?
6. Wyznaczyć rząd macierzy zespolonej
$$\begin{bmatrix} i & 1 & -i \\ i-1 & i+1 & 1-i \\ 1 & i & -1 \\ i+1 & i+1 & -1-i \end{bmatrix}$$
7. Obliczyć rząd macierzy o współczynnikach w $\mathbb{Z}_7$
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$
8. Rozwiązać zadanie 1 używając rzędu.
9. Rozwiązać zadanie 6 z kartki V przy użyciu rzędu.
10. Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ układ
$$(0, 1, 2, a), (1, 1, 3, 1), (2, 1, 4, 1)$$
    jest liniowo niezależny?
11. Wyznaczyć bazę i wymiar przestrzeni
$$\operatorname{lin}\{(1, 2, 0, 1), (2, 1, 3, 3), (0, -3, 3, 1), (3, 4, 3, 4)\}$$
12. Wyznacz współrzędne wektora $(3, 0)$ w bazie $(2, 1)$,$(-1, -2)$. Narysuj tę sytuację.
13. Podaj przykład takiej bazy przestrzeni $\mathbb{R}^3$, że wektor $(1, 2, 3)$ ma w tej bazie współrzędne
    (a) $(3, 1, 2)$.
    (b) $(\frac{1}{2}, 2, 3)$.
    (c) $(5, 6, 7)$.
14. Wykazać, że następujące zbiory wektorów $\mathbb{R}^5$ są podprzestrzeniami, wyznaczyć bazę i wymiar:
    (a) wektory, których pierwsza i ostatnia współrzędna są równe;
    (b) wektory, których współrzędne o parzystych indeksach są równe zeru.
15. Wyznaczyć bazę i wymiar $\mathbb{C}$ jako przestrzeni liniowej nad
    (a) $\mathbb{R}$
    (b) $\mathbb{C}$
16. Wykazać, że wymiar przestrzeni $\mathbb{R}^\infty$ ciągów o wyrazach rzeczywistych jest nieskończony.
17. Wyznacz wymiar przestrzeni rozwiązań układu równań
    (a) $\begin{cases} x - y + 2z + t = 1 \\ 3x + y + z - t = 2 \\ 5x - y + 5z + t = 4 \end{cases}$
    (b) $\begin{cases} 3x - 3y + 5z = 4 \\ 3x - 4y + 7z = 3 \\ 6x - 5y + 7z = 4 \end{cases}$
18. Wykazać, że jeżeli $n > k$, to jednorodny układ k równań liniowych z n niewiadomymi ma niezerowe rozwiązanie.