Algebra liniowa

Domowe VII

1. Załóżmy, że układ wektorów a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 jest liniowo niezależny. Czy układ

$$\begin{aligned} b_1 &= 3a_1 + 4a_2 - 5a_3 - 2a_4 + 4a_5, \\ b_2 &= 8a_1 + 7a_2 - 2a_3 + 5a_4 - 10a_5, \\ b_3 &= 2a_1 - a_2 + 8a_3 - a_4 + 2a_5 \end{aligned}$$

jest liniowo zależny?

2. Wyznaczyć rząd macierzy

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 7 & 9 \\ 7 & 5 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} i+1 & 1 & -i & 2i & 3 \\ i & -2 & i & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2i & 2i-1 & 4 \\ i+3 & 7 & -5i & 6i-2 & 11 \end{bmatrix}$

(e) Wyznaczyć rząd macierzy w zależności od wartości parametru λ:

i. $\begin{bmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{bmatrix}$

ii. $\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -\lambda & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -\lambda & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -\lambda & 1 \end{bmatrix}$

3. Sprawdzić czy podane układy wektorów są liniowo niezależne (można rzędem). Wyznacz wymiary i bazy popdprzestrzeni liniowych rozpiętych przez te wektory.

(a) $a_1 = (4, -2, 6)$, $a_2 = (6, -3, 9)$;

(b) $a_1 = (4, -2, 6)$, $a_2 = (6, 3, 9)$;

(c) $a_1 = (2, -3, 1)$, $a_2 = (3, -1, 5)$, $a_3 = (1, -4, 3)$;

(d) $a_1 = (1, 1, 0)$, $a_2 = (1, 2, -3)$, $a_3 = (2, 4, 1)$;

(e) $a_1 = (1, 2, 1, 1)$, $a_2 = (2, -1, -1, 4)$, $a_3 = (5, 5, 2, 7)$;

(f) $a_1 = (3, 2, 1, -1)$, $a_2 = (5, -1, 1, 2)$, $a_3 = (7, 8, 1, -7)$, $a_4 = (1, -1, 1, 2)$;

(g) $a_1 = (1, 0, 0, -1)$, $a_2 = (2, 1, 1, 0)$, $a_3 = (1, 1, 1, 1)$, $a_4 = (1, 2, 3, 4)$, $a_5 = (0, 1, 2, 3)$;

4. Rozwiązać zadanie 13 z domowej kartki V przy użyciu rzędu.

5. Dla jakich wartości parametru $c \in \mathbb{R}$ wektor $(1, 1, c)$ jest kombinacją liniową wektorów

$$(2, 1, 3), (1, 2, 4), (3, 0, 2), (2, -2, -2)?$$

6. Sprawdzić czy podane układy wektorów są liniowo niezależne (nad podanym ciałem)

(a) $a_1 = (1, 3, 2)$, $a_2 = (2, 4, 3)$, $a_3 = (3, 2, 1)$ nad $\mathbb{Z}_5$

(b) $a_1 = (1, 3, 2)$, $a_2 = (2, 4, 3)$, $a_3 = (3, 2, 1)$ nad $\mathbb{Z}_3$

(c) $a_1 = (1, 2, 3, 1)$, $a_2 = (0, 3, 1, 2)$, $a_3 = (1, 6, 2, 6)$ nad $\mathbb{Z}_7$

7. Niech wektory e_1, e_2, e_3 i x będą zadane za pomocą współrzędnych w pewnej bazie: $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 1, 2)$, $e_3 = (1, 2, 3)$, $x = (6, 9, 14)$. Wykazać, że (e_1, e_2, e_3) jest także bazą przestrzeni i wyznaczyć współrzędne wektora x w tej bazie.

8. Wyznacz współrzędne wektora $(1, 8, 10)$ w bazie

(a) $(1, 2, 3), (2, 1, 3), (-1, 1, 0)$

(b) $(-1, 1, 0), (1, 2, 3), (2, 1, 3)$

9. Podaj przykład takiej bazy przestrzeni $\mathbb{R}^4$, że wektor $(5, 6, 7, 8)$ ma w tej bazie współrzędne $(1, -2, 3, -5)$.

10. Wykazać, że następujące zbiory wektorów $\mathbb{R}^5$ są podprzestrzeniami, wyznaczyć bazę i wymiar:

(a) wektory, których współrzędne o parzystych indeksach są równe;

(b) wektory postaci $(\alpha, \beta, \alpha, \beta, \alpha)$.

(c) rozwiązania równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$.

11. Niech $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$. Pokazać, że

$$\text{lin}\{v_1, v_2, v_3\} = \text{lin}\{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$$

12. Wyznacz wymiar przestrzeni rozwiązań układu równań

(a) $\begin{cases} 10x + 5y + 4z + 3t = 1 \\ 11x + y - z + 15t = 2 \\ 15x + 5y + 3z + 11t = 2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y + z + 3t = 0 \\ 2x + y - z - 3t = 2 \\ x - 2y + z + 2t = -1 \\ 2x + 3y + z + 3t = 1 \end{cases}$