

Algebra liniowa

Domowe IX

1. Wyznaczyć macierz odwrotną do danej, wykorzystując macierz dołączoną do niej. Sprawdzić otrzymany wynik.

(a) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ nad ciałem \mathbb{Z}_5

2. Wykazać, że macierz kwadratowa A stopnia 2 jest rozwiązaniem równania

$$X^2 - (\text{tr } A)X + \det A = 0$$

3. Wykazać, że wyznacznik macierzy antysymetrycznej nieparzystego stopnia jest równy 0. Czy założenie nieparzystości stopnia jest potrzebne?
4. Wykazać, że wyznacznik macierzy ortogonalnej jest równy ± 1 (macierz A nazywamy ortogonalną, jeżeli $A^t = A^{-1}$).
5. Czy układ wektorów

(a) $(1, 1, 0), (1, 2, -3), (2, 4, 1)$ jest bazą przestrzeni \mathbb{R}^3 ?

(b) $(3, 1, 0, -2), (5, 2, 2, -1), (1, -1, 0, -2), (5, 1, 1, -3)$ jest bazą przestrzeni \mathbb{R}^4 ?

6. Oblicz rząd macierzy używając wyznaczników

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Rozwiązać, korzystając ze wzorów Cramera, układ równań

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

8. Wyznaczyć taki wielomian $f(x)$ trzeciego stopnia, że $f(-2) = 1, f(-1) = 3, f(1) = 13, f(2) = 33$.

9. Rozwiązanie układu równań

$$ay + bx = c$$

$$cx + az = b$$

$$bz + cy = a$$

jest zbiorem jednoelementowym. Wykazać, że $abc \neq 0$ i znaleźć to rozwiązanie.

10. Dla jakich wartości parametrów a i b rozwiązanie układu

$$3x - 2y + z = b$$

$$5x - 8y + 9z = 3$$

$$2x + y + az = -1$$

jest zbiorem: a) jednoelementowym, b) nieskończonym, c) pustym?

11. Rozwiązać podany układ równań nad ciałem \mathbb{Z}_{17}

$$3x + 2y + 5z = 1$$

$$2x + 5y + 3z = 2$$

$$5x + 3y + 2z = 4$$