

Elementy algebry liniowej

Niniejsze zadania są oparte o tutorial: https://doc.sagemath.org/html/en/tutorial/tour_linalg.html. Przeczytaj go, a następnie stwórz plik notatnika Jupyter, zawierający rozwiązania wszystkich poniższych zadań. Zapisz plik pod nazwą: `5LinearAlgebraBasicsPrzewocki.ipynb`.

Uwaga! Zamiast mojego nazwiska, w nazwie pliku wpisz swoje!

Użyteczna może być również dokumentacja opisująca tworzenie macierzy wymiernych w SAGE: https://doc.sagemath.org/html/en/reference/matrices/sage/matrix/matrix_rational_dense.html

Zadanie 0.1. Rozważ następujący kod

```
v = vector([2, 0]); A = matrix([[1, 2], [3, 4]]);  
show(A*v); show(v*A)
```

Jak widać otrzymujemy różne wyniki. Jak to wyjaśnić?

A jak zadziała poniższy kod

```
B = matrix([[1, 1], [1, 1]]);  
show(A*v*B)
```

Jak wytłumaczyć działanie tego kodu?

Zadanie 0.2. Używając funkcji `solve_right()` znajdź macierz odwrotną do

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Podpowiedź: Funkcja `identity_matrix()` tworzy macierz jednostkową.

Jak inaczej można znaleźć macierz odwrotną? Użyj wyszukiwarki internetowej, albo dokumentacji.

Zadanie 0.3. Dla macierzy A z poprzedniego zadania oblicz wartości własne.

Wiemy, że macierz czwartego stopnia będzie mieć wielomian charakterystyczny czwartego stopnia. W związku z tym, jej własności własne powinny wyrażać się przez pierwiastniki. Wyświetl owe wartości własne wyrażone przez pierwiastniki.

Podpowiedź Możesz użyć funkcji `charpoly()` by znaleźć wielomian charakterystyczny. A następnie szukać jego rozwiązań za pomocą funkcji `solve()` z poprzednich zajęć.

Możesz też szukać od razu wartości własnych przy użyciu funkcji `eigenvalues()`, ale wtedy wyniki wyświetlone zostaną w postaci numerycznej. Użyj funkcji `radical_expression()` by wyświetlić wyniki w postaci pierwiastników.

Zadanie 0.4. Dla macierzy A oblicz wyznacznik sprowadzając A do postaci schodkowej (ang. echelon form).

Jak inaczej można znaleźć wyznacznik? Użyj wyszukiwarki internetowej, albo dokumentacji.

Zadanie 0.5. Dla macierzy A znajdź macierz odwrotną poprzez sprowadzenie do postaci schodkowej (ang. echelon form). Użyj funkcji `block_matrix()` aby połączyć macierze.

Zadanie 0.6. Niech

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Oblicz rząd tej macierzy, sprowadzając ją do postaci schodkowej.

Jak inaczej można znaleźć rząd? Użyj wyszukiwarki internetowej, albo dokumentacji.

Zadanie 0.7. Niech

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

O ile to możliwe rozwiąż równanie $Cx = c$: w pierścieniu liczb całkowitych, w ciele liczb wymiernych i w ciele $GF(2)$.