Zadania przygotowawcze do kolokwium

1 Listy

Zadanie 1.1. Wypisz listę wartości funkcji $i \mapsto i^2 + i + 1$ dla $i \in \mathbb{Z}, -5 \leqslant i \leqslant 5$.

Zadanie 1.2. Wypisz listę trzecich potęg pierwszych dziesięciu naturalnych liczb nieparzystych.

Zadanie 1.3. Wypisz wartości 2^k w $\mathbb{Z}/7$ dla $k = 0, 1, ...10$.

2 Równania, pochodne i całki

Zadanie 2.1. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x + y & = & 1 \\ 2x^2 + 2y & = & 2 \end{cases}$$

Zadanie 2.2. Oblicz całkę

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx$$

Jaką wartość powinna mieć stała całkowania, aby powyższa całka przyjmowała wartość zero dla $x = 0$?

Zadanie 2.3. Rozwiąż równanie

$$\frac{d^5}{dx^5} e^{x^2} = 0$$

3 Pierścienie

Zadanie 3.1. Dokonaj faktoryzacji wielomianu

$$f = x^9 - x \in GF(3).$$

Rozważ następujący kod

```
K.<z> = GF(9)
```

Sprawdź czy utworzona w ten sposób zmienna z jest pierwiastkiem jednego z wielomianów powstałych w wyniku faktoryzacji f. Na koniec dokonaj faktoryzacji f nad ciałem $GF(9)$.

Zadanie 3.2. Niech

$$f = x^5 + x^2 + 4x + 1, g = x^2 + 1.$$

Oblicz $\frac{f}{g}$ nad ciałem $GF(5)$. Czy wielomian f jest podzielny przez g nad ciałem liczb wymiernych? A nad ciałem liczb rzeczywistych?

4 Elementy algebry liniowej

Zadanie 4.1. Rozwiąż poniższy układ równań

$$\begin{cases} x - y + z - 2s + t &= 0 \\ 3x + 4y - z + s + 3t &= 1 \\ x - 8y + 5z + 9s + t &= -1 \end{cases}$$

Użyj co najmniej dwóch metod.

Zadanie 4.2. Dla układu z poprzedniego zadania sprawdź twierdzenie Kroneckera-Capellego.

Zadanie 4.3. Dla układu

$$\begin{cases} x + 2y + z + t &= 7 \\ 2x - y - z + 4t &= 2 \\ 5x + 5y + 2z + 7t &= 1 \end{cases}$$

Sprawdź twierdzenie Kroneckera-Capellego.

Zadanie 4.4. Oblicz wyznacznik macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

nad ciałem liczb wymiernych i nad ciałem $\mathbb{Z}/2$ (czyli $GF(2)$). Co te wyniki mówią o odwracalności owej macierzy?

Zadanie 4.5. Znajdź jądro macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 8 & 5 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 4.6. Znajdź wymiar i bazę podprzestrzeni generowanej przez wektory:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$