

# Kolokwium z algebry liniowej: laboratorium

rząd a

**Zadanie 0.1.** Niech  $f(i) = i^{i+1}$ . Wygeneruj listę wartości funkcji  $f$  dla  $i = 5, \dots, 30$ .

**Zadanie 0.2.** Znajdź rząd i obraz macierzy  $A$  nad ciałem  $\mathbb{Z}/3$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

**Zadanie 0.3.** Rozwiąż równanie macierzowe  $AX = B$ , gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

**Zadanie 0.4.** Znajdź rozwiązanie układu równań

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ y^2 = x - 6 \end{cases}$$

**Zadanie 0.5.** Zespolony pierwiastek  $n$ -tego stopnia z liczby 1 nazywamy *pierwotnym*, jeżeli generuje całą grupę pierwiastków  $n$ -tego stopnia z 1. Nie trudno wykazać, że następujące własności są równoważne:

1.  $z$  jest pierwotnym pierwiastkiem  $n$ -tego stopnia z 1,
2.  $z$  jest pierwiastkiem  $n$ -tego stopnia z 1, ale nie jest pierwiastkiem z 1 stopnia mniejszego niż  $n$ ,
3.  $z = e^{\frac{2k\pi}{n}i}$ , gdzie  $i$  jest jednostką urojoną, a liczba  $k$  jest względnie pierwsza z  $n$  (tzn. największy wspólny dzielnik  $n$  i  $k$  wynosi 1).

Dla dowolnej liczby  $n$   $n$ -ty wielomian cyklotomiczny  $\Phi_n$  jest zdefiniowany jako wielomian, którego pierwiastkami są pierwotne pierwiastki stopnia  $n$  z 1, a współczynnik przy najwyższej potędze wynosi 1.

Znajdź szósty wielomian cyklotomiczny  $\Phi_6$  i zapisz go jako wielomian o współczynnikach całkowitych.

Uwaga: liczba 1 jest względnie pierwsza z dowolną liczbą całkowitą, wynika to bezpośrednio z przypomnianej powyżej definicji liczb względnie pierwszych.