

Kolokwium z algebry liniowej: laboratorium

rząd b

Zadanie 0.1. Znajdź rozwiązanie układu równań

$$\begin{cases} x + y^2 + 1 = 0 \\ y = x + 6 \end{cases}$$

Zadanie 0.2. Rozwiąż równanie macierzowe $AX = B$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 0.3. Niech $f(i) = (i + 1)^i$. Wygeneruj listę wartości funkcji f dla $i = 10, \dots, 40$.

Zadanie 0.4. Znajdź rząd i obraz macierzy A nad ciałem $\mathbb{Z}/3$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Zadanie 0.5. Zespolony pierwiastek n -tego stopnia z liczby 1 nazywamy *pierwotnym*, jeżeli generuje całą grupę pierwiastków n -tego stopnia z 1. Nie trudno wykazać, że następujące własności są równoważne:

1. z jest pierwotnym pierwiastkiem n -tego stopnia z 1,
2. z jest pierwiastkiem n -tego stopnia z 1, ale nie jest pierwiastkiem z 1 stopnia mniejszego niż n ,
3. $z = e^{\frac{2k\pi}{n}i}$, gdzie i jest jednostką urojoną, a liczba k jest względnie pierwsza z n (tzn. największy wspólny dzielnik n i k wynosi 1).

Dla dowolnej liczby n n -ty wielomian cyklotomiczny Φ_n jest zdefiniowany jako wielomian, którego pierwiastkami są pierwotne pierwiastki stopnia n z 1, a współczynnik przy najwyższej potędze wynosi 1.

Znajdź szósty wielomian cyklotomiczny Φ_6 i zapisz go jako wielomian o współczynnikach całkowitych.

Uwaga: liczba 1 jest względnie pierwsza z dowolną liczbą całkowitą, wynika to bezpośrednio z przypomnianej powyżej definicji liczb względnie pierwszych.