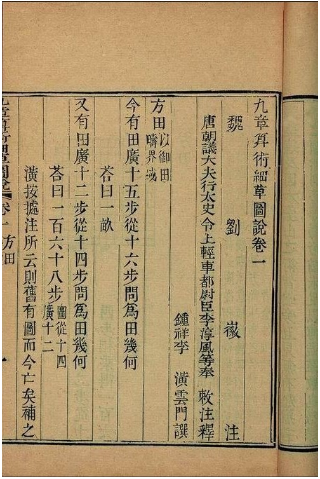
Metoda eliminacji Gaussa

dr Janusz Przewocki

Uniwersytet Gdański

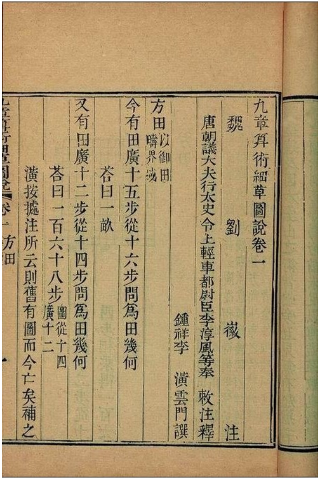
Rozwiązywanie układów równań metodą eliminacji Gaussa

- Metodę tę przypisuje się Karolowi Fryderykowi Gaussowi...
- jednakże wzmianki o niej znajdziemy już w starożytnej chińskiej matematyce...
- przykłady znajdziemy w tekście *Dziewięć rozdziałów sztuki matematycznej*



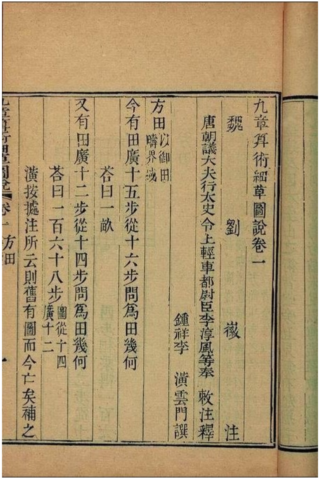
Rozwiązywanie układów równań metodą eliminacji Gaussa

- Metodę tę przypisuje się Karolowi Fryderykowi Gaussowi...
- jednakże wzmianki o niej znajdziemy już w starożytnej chińskiej matematyce...
- przykłady znajdziemy w tekście *Dziewięć rozdziałów sztuki matematycznej*


九章筭術細草圖說卷一
魏　劉　徽　注
唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉　敕注釋
鍾祥李　潢雲門譔
方田　以御田疇界域
今有田廣十五步從十六步問爲田幾何
荅曰一畝
又有田廣十二步從十四步問爲田幾何
荅曰一百六十八步　圖從十四　廣十二
潢按據注所云則舊有圖而今亡矣補之

Rozwiązywanie układów równań metodą eliminacji Gaussa

- Metodę tę przypisuje się Karolowi Fryderykowi Gaussowi...
- jednakże wzmianki o niej znajdziemy już w starożytnej chińskiej matematyce...
- przykłady znajdziemy w tekście *Dziewięć rozdziałów sztuki matematycznej*



九章算術細草圖說卷一
魏 劉 徽 注
唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉 敕注釋
鍾祥李 潢雲門譔
方田 以御田疇界域
今有田廣十五步從十六步問爲田幾何
荅曰一畝
又有田廣十二步從十四步問爲田幾何
荅曰一百六十八步 圖從十四廣十二
潢按據注所云則舊有圖而今亡矣補之

Przykład

Metodę przedstawimy na przykładzie. Rozważmy następujący układ równań

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_2 - 8x_3 & = & 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 & = & -9 \end{cases}$$

Współczynniki układu zapisujemy macierzy

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right]$$

Przykład

Metodę przedstawimy na przykładzie. Rozważmy następujący układ równań

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_2 - 8x_3 & = & 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 & = & -9 \end{cases}$$

Współczynniki układu zapisujemy macierzy

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right]$$

Przykład

W metodzie eliminacji celem jest sprowadzenie macierzy do postaci schodkowej (normalnej). Dopuszczalne są następujące operacje

- Zamiana wierszy miejscami
- Mnożenie wiersza przez daną liczbę
- Dodawanie wielokrotności pewnego wiersza do innego

Przykład

Rozważmy naszą macierz:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} \color{red}{1} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right]$$

Przykład

Dodajemy 4 razy pierwszy wiersz do trzeciego wiersza:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array}\right]$$

Przykład

Mnożymy drugi wiersz przez $\frac{1}{2}$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array}\right]$$

Przykład

Dodajemy 3 razy drugi wiersz do trzeciego

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Uwaga. Ta macierz jest już w postaci schodkowej.

Przykład

Dodajemy 4 razy trzeci wiersz do drugiego

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Przykład

Dodajemy -1 razy trzeci wiersz do pierwszego

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Przykład

Dodajemy 2 razy drugi wiersz do pierwszego

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Zatem $x_1 = 29, x_2 = 16, x_3 = 3$.

Przykład

Rozważmy teraz układ, który ma więcej niewiadomych niż równań

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 7 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 & = & 12 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_4 & = & 4 \end{cases}$$

Po zapisaniu w macierzy dostajemy:

$$\left[\begin{array}{cccr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 4 \end{array}\right]$$

Przykład

Dodajemy -1 razy pierwszy wiersz do drugiego

$$\left[\begin{array}{cccr|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 4 \end{array}\right]$$

Przykład

Dodajemy -2 razy pierwszy wiersz do trzeciego

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -10 \end{array}\right]$$

Przykład

Dodajemy -1 razy drugi wiersz do pierwszego

$$\left[\begin{array}{cccr|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Uwaga. To jest już postać schodkowa normalna.

Zamieniamy z powrotem na układ równań

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 & = & 2 \\ x_3 - 2x_4 & = & 5 \end{cases}$$

Przykład

Dodajemy -1 razy drugi wiersz do pierwszego

$$\left[\begin{array}{cccr|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Uwaga. To jest już postać schodkowa normalna.
Zamieniamy z powrotem na układ równań

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 & = & 2 \\ x_3 - 2x_4 & = & 5 \end{cases}$$

Przykład

Dodajemy -1 razy drugi wiersz do pierwszego

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Uwaga. To jest już postać schodkowa normalna.
Zamieniamy z powrotem na układ równań

$$\begin{cases} x_1 \quad +2x_2 + 3x_4 & = \quad 2 \\ x_3 \quad -2x_4 & = \quad 5 \end{cases}$$

Podstawiamy $x_2 = s, x_4 = t$.

Przykład

Dostajemy

$$\begin{cases} x_1 + 2s + 3t &= 2 \\ x_3 - 2t &= 5 \end{cases}$$

Zatem:

$$\begin{cases} x_1 &= 2 - 2s - 3t \\ x_3 &= 5 + 2t \end{cases}$$

Przykład

Dostajemy

$$\begin{cases} x_1 + 2s + 3t & = & 2 \\ x_3 - 2t & = & 5 \end{cases}$$

Zatem:

$$\begin{cases} x_1 & = & 2 - 2s - 3t \\ x_3 & = & 5 + 2t \end{cases}$$

Przykład

Rozwiązanie

$$\begin{cases} x_1 & = & 2 - 2s - 3t \\ x_2 & = & s \\ x_3 & = & 5 + 2t \\ x_4 & = & t \end{cases}$$

Mamy nieskończenie wiele rozwiązań uzależnionych od parametrów s **i** t!

Przykład

Rozważmy teraz układ, który ma więcej równań niż niewiadomych

$$\begin{cases} 3x_1 + 10x_2 + 2x_3 & = & -3 \\ -x_1 - 4x_2 + 5x_3 & = & 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 & = & -1 \\ -x_1 + -7x_2 + 5x_3 & = & 2 \end{cases}$$

Po zapisaniu w macierzy dostajemy:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 10 & 2 & -3 \\ -1 & -4 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -7 & 5 & 2 \end{array}\right]$$

Przykład

Zamieniamy pierwszy i trzeci wiersz

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & 10 & 2 & -3 \\ -1 & -7 & 5 & 2 \end{array}\right]$$

Przykład

Dodajemy pierwszy wiersz do drugiego

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 6 & 2 \\ 3 & 10 & 2 & -3 \\ -1 & -7 & 5 & 2 \end{array}\right]$$

Przykład

Dodajemy -3 razy pierwszy wiersz do trzeciego

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -7 & 5 & 2 \end{array}\right]$$

Przykład

Dodajemy pierwszy wiersz do czwartego

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & 1 \end{array}\right]$$

Przykład

Mnożymy drugi wiersz przez -1

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & 1 \end{array}\right]$$

Przykład

Dodajemy -1 razy drugi wiersz do trzeciego

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & 6 & 1 \end{array}\right]$$

Przykład

Dodajemy 4 razy drugi wiersz do czwartego

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -18 & -7 \end{array}\right]$$

Przykład

Mnożymy trzeci wiersz przez $\frac{1}{5}$

$$\left[\begin{array}{ccr|r} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & -18 & -7 \end{array}\right]$$

Przykład

Dodajemy 18 razy trzeci wiersz do czwartego

$$\left[\begin{array}{ccr|r} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

Widzimy, że układ jest sprzeczny!