

Geometria trójwymiarowa

1 Kosinusy kierunkowe

Zadanie 1.1. Udowodnij, że wektor \vec{v} można zapisać w postaci:

$$\vec{v} = |\vec{v}| \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix},$$

gdzie $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

2 Równanie płaszczyzny

Zadanie 2.1. Znajdź równania płaszczyzn prostopadłych do wektora $\vec{n} =$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}.$$

Zadanie 2.2. Zapisz równanie płaszczyzny w postaci macierzowej.

Zadanie 2.3. Znajdź równanie płaszczyzny prostopadłej do wektora \vec{n} , przechodzącej przez punkt P :

1. $\vec{n} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, P = (1, 1, 1),$

Odpowiedź: $3x - y + z - 3 = 0$

2. $\vec{n} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, P = (0, 2, 2),$

Odpowiedź: $-3x + y - 2 = 0$

$$3. \vec{n} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, P = (1, 0, 3),$$

$$\text{Odpowiedź: } 4x - y + 2z - 10 = 0$$

$$4. \vec{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, P = (-1, 3, 0),$$

$$\text{Odpowiedź: } 2x + 2y + z - 4 = 0$$

$$5. \vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, P = (1, -2, 4),$$

$$\text{Odpowiedź: } x - y + 5z - 23 = 0$$

Zadanie 2.4. Znajdź wektory równoległe do płaszczyzny P

$$1. P : 2x - 3y + z - 4 = 0,$$

$$2. P : 2x - 2y + z = 0,$$

$$3. P : -x - 2y - 2z - 1 = 0,$$

$$4. P : -2x - y + 8z - 4 = 0,$$

$$5. P : x - 3y + 5z + 6 = 0,$$

3 Równanie prostej

Zadanie 3.1. Znajdź równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkt (x_0, y_0, z_0) i równoległej do wektora $\vec{t} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$.

Zadanie 3.2. Znajdź równanie kanoniczne prostej przechodzącej przez punkt (x_0, y_0, z_0) i równoległej do wektora $\vec{t} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$.

Zadanie 3.3. Niech dane będą wektory \vec{v}_1, \vec{v}_2 . Udowodnij, że $\vec{v} = t\vec{v}_1 + (1-t)\vec{v}_2$ stanowi równanie prostej.

Zadanie 3.4. Napisz równanie prostej powstałej z przecięcia dwóch płaszczyzn w postaci kanonicznej

$$1. \begin{cases} 3x - y + 2z + 1 = 0 \\ x + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

Przykładowa odpowiedź: $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{-1}$

$$2. \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

Przykładowa odpowiedź: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-2}$

$$3. \begin{cases} 2x + 3z - 1 = 0 \\ 5x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

Przykładowa odpowiedź: $\frac{x-\frac{1}{2}}{6} = \frac{y+\frac{7}{4}}{-15} = \frac{z}{-4}$

$$4. \begin{cases} 2x + 3y + 3z + 1 = 0 \\ 4x - 2y + 4z + 2 = 0 \end{cases}$$

Przykładowa odpowiedź: $\frac{x+\frac{1}{2}}{9} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-8}$

Zadanie 3.5. Jak wyglądają równania kanoniczne prostych leżących na płaszczyznach prostopadłych do osi układu współrzędnych?

4 Przekształcenia liniowe w przestrzeni trójwymiarowej

Zadanie 4.1. Napisz macierz rzutu prostopadłego na płaszczyznę $Ax + By + Cz = 0$.

Zadanie 4.2. Napisz macierze obrotów względem osi układu współrzędnych.