Algebra liniowa z geometrią

Wielowymiarowość

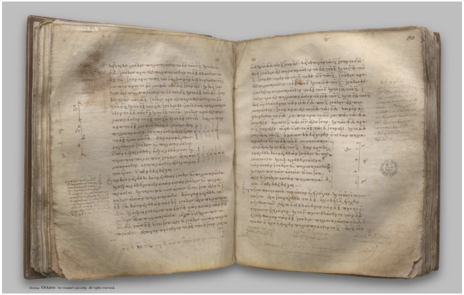
dr Janusz Przewocki

Uniwersytet Gdański

Czy może być więcej wymiarów niż trzy?

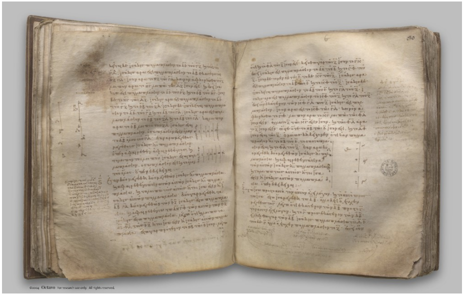
Przestrzeń trójwymiarowa w geometrii Euklidesa

- Definicja 1 w XI księdze *Elementów* Euklidesa powiada, że bryłą jest to co ma **wysokość, szerkość i głębokość**
- Jest to jedyne miejsce, gdzie Euklides wspomina, że istnieją trzy wymiary
- Czy definicje analogiczne do Euklidesowych dają się napisać dla przestrzeni o większej liczbie wymiarów?



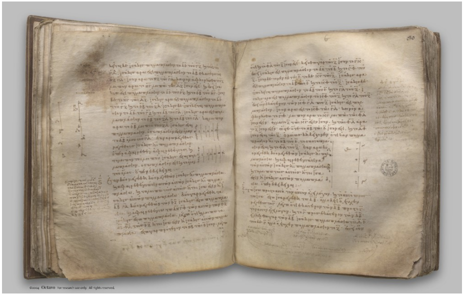
Przestrzeń trójwymiarowa w geometrii Euklidesa

- Definicja 1 w XI księdze *Elementów* Euklidesa powiada, że bryłą jest to co ma **wysokość, szerkość i głębokość**
- Jest to jedyne miejsce, gdzie Euklides wspomina, że istnieją trzy wymiary
- Czy definicje analogiczne do Euklidesowych dają się napisać dla przestrzeni o większej liczbie wymiarów?



Przestrzeń trójwymiarowa w geometrii Euklidesa

- Definicja 1 w XI księdze *Elementów* Euklidesa powiada, że bryłą jest to co ma **wysokość, szerkość i głębokość**
- Jest to jedyne miejsce, gdzie Euklides wspomina, że istnieją trzy wymiary
- Czy definicje analogiczne do Euklidesowych dają się napisać dla przestrzeni o większej liczbie wymiarów?



- Przestrzeń trójwymiarową możemy definiować: $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$
- Łatwo możemy uogólnić tę definicję, po prostu dopisując kolejne współrzędne...
- ... zatem: $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$

- Przestrzeń trójwymiarową możemy definiować: $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$
- Łatwo możemy uogólnić tę definicję, po prostu dopisując kolejne współrzędne...
- ... zatem: $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$

Algebraiczne podejście do wielowymiarowości

- Przestrzeń trójwymiarową możemy definiować: $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$
- Łatwo możemy uogólnić tę definicję, po prostu dopisując kolejne współrzędne...
- ... zatem: $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$

Algebraiczne podejście do wielowymiarowości

- Podobnie, przestrzeń wektorów $\mathbb{V}^n$ można utożsamiać z kolumnami

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

- Jeżeli $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$, wówczas

$$\vec{AB} = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{bmatrix}$$

Algebraiczne podejście do wielowymiarowości

- Podobnie, przestrzeń wektorów $\mathbb{V}^n$ można utożsamiać z kolumnami

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

- Jeżeli $A = (a_1, a_2, ..., a_n), B = (b_1, b_2, ..., b_n)$, wówczas

$$\vec{AB} = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{bmatrix}$$

Algebraiczne podejście do wielowymiarowości

- Przestrzeń wektorów $\mathbb{V}^n$ jest wyposażona w operacje dodawania wektorów i mnożenia przez skalary

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{bmatrix}$$

$$\alpha \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \vdots \\ \alpha v_n \end{bmatrix}$$

Algebraiczne podejście do wielowymiarowości

- Przestrzeń wektorów definiowana w powyższy sposób $\mathbb{V}^n$ stowarzyszona jest z tzw. *bazą standardową*

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Widzimy, że wektor $\vec{v}$ o współrzędnych v_i, dla $i = 1, \ldots n$ spełnia

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + \ldots + v_n\vec{e}_n = \sum_{i=1}^{n} v_i\vec{e}_i$$

Algebraiczne podejście do wielowymiarowości

- Przestrzeń wektorów definiowana w powyższy sposób $\mathbb{V}^n$ stoważyszona jest z tzw. *bazą standardową*

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Widzimy, że wektor $\vec{v}$ o współrzędnych v_i, dla $i = 1, \ldots n$ spełnia

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + \ldots + v_n\vec{e}_n = \sum_{i=1}^{n} v_i\vec{e}_i$$

Macierze

- Symbol $\mathbb{R}^{m\times n}$ oznacza zbiór macierzy o m wierszach i n kolumnach
- Podobnie jak w przypadku wektorów definiujemy operacje dodawania macierzy...

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & n_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Macierze

- Symbol $\mathbb{R}^{m\times n}$ oznacza zbiór macierzy o m wierszach i n kolumnach
- Podobnie jak w przypadku wektorów definiujemy operacje dodawania macierzy...

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & n_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Macierze

- Symbol $\mathbb{R}^{m\times n}$ oznacza zbiór macierzy o m wierszach i n kolumnach
- ... oraz mnożenia macierzy przez liczby

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

Macierze

- Macierze $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$ można pomnożyć, dostając macierz $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

gdzie $c_{ij} = \sum_{s=1}^{k} a_{is} b_{sj}$.

Macierze

Działania na macierzach mają szereg znanych nam już własności

- Istnieje $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, taka że dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mamy $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$,
- $A + B = B + A$,
- $(A + B) + C = A + (B + C)$,
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta B$,
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$,
- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$,
- Istnieje $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$, taka że dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mamy $AI = IA = A$,
- $(AB)C = A(BC)$,
- $A(B + C) = AB + AC$,
- $(\alpha A)B = \alpha(AB)$.

Macierze

Niech $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, czasami użyteczna jest operacja *transpozycji* A^T definiowana

$$A^T = (a_{ij})^T = (a_{ji}).$$

Operacja transpozycji ma następujące własności

- $(A^T)^T = A$,
- $(A + B)^T = A^T + B^T$,
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.

Macierze

Niech $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, czasami użyteczna jest operacja *transpozycji* A^T definiowana
$$A^T = (a_{ij})^T = (a_{ji}).$$

Operacja transpozycji ma następujące własności

- $(A^T)^T = A$,
- $(A + B)^T = A^T + B^T$,
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.

Macierze

Niech $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, czasami użyteczna jest operacja *transpozycji* A^T definiowana

$$A^T = (a_{ij})^T = (a_{ji}).$$

Operacja transpozycji ma następujące własności

- $(A^T)^T = A$,
- $(A + B)^T = A^T + B^T$,
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.

Macierze

Niech $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, czasami użyteczna jest operacja *transpozycji* A^T definiowana
$$A^T = (a_{ij})^T = (a_{ji}).$$

Operacja transpozycji ma następujące własności

- $(A^T)^T = A$,
- $(A + B)^T = A^T + B^T$,
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.

Macierze

Dla pewnych macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ istnieje macierz odwrotna A^{-1} o następującej własności:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I.$$

Macierz A, dla której A^{-1} istnieje nazywa się *odwracalną*, albo *nieosobliwą*
Operacja odwracania macierzy ma następujące własności

- $(A^{-1})^{-1} = A$,
- $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}, \quad \text{dla } \alpha \neq 0$,
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Macierze

Dla pewnych macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ istnieje macierz odwrotna A^{-1} o następującej własności:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I.$$

Macierz A, dla której A^{-1} istnieje nazywa się *odwracalną*, albo *nieosobliwą*
Operacja odwracania macierzy ma następujące własności

- $(A^{-1})^{-1} = A$,
- $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}, \quad \text{dla } \alpha \neq 0$,
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Macierze

Dla pewnych macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ istnieje macierz odwrotna A^{-1} o następującej własności:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I.$$

Macierz A, dla której A^{-1} istnieje nazywa się *odwracalną*, albo *nieosobliwą*
Operacja odwracania macierzy ma następujące własności

- $(A^{-1})^{-1} = A$,
- $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}, \quad \text{dla } \alpha \neq 0$,
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Macierze

Dla pewnych macierzy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ istnieje macierz odwrotna A^{-1} o następującej własności:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I.$$

Macierz A, dla której A^{-1} istnieje nazywa się *odwracalną*, albo *nieosobliwą*
Operacja odwracania macierzy ma następujące własności

- $(A^{-1})^{-1} = A$,
- $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}, \quad \text{dla } \alpha \neq 0$,
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Macierze

Niech $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, inną użyteczną operacją jest *ślad* $\mathrm{tr}(A)$ definiowany

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}.$$

Niektóre proste własności śladu:

- $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$,
- $\mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha\,\mathrm{tr}(A)$,
- $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Macierze

Niech $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, inną użyteczną operacją jest *ślad* $\mathrm{tr}(A)$ definiowany

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}.$$

Niektóre proste własności śladu:

- $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$,
- $\mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha\, \mathrm{tr}(A)$,
- $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Macierze

Niech $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, inną użyteczną operacją jest *ślad* $\mathrm{tr}(A)$ definiowany

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}.$$

Niektóre proste własności śladu:

- $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$,
- $\mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha\, \mathrm{tr}(A)$,
- $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Macierze

Niech $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, inną użyteczną operacją jest *ślad* $\mathrm{tr}(A)$ definiowany

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}.$$

Niektóre proste własności śladu:

- $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$,
- $\mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha\,\mathrm{tr}(A)$,
- $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.