

# Liczby zespolone

## 1 Liczba $\sqrt{-1}$

**Zadanie 1.1.** Rozważmy następujące równanie:

$$x^3 = x,$$

Znajdź wszystkie rozwiązania tego równania

W XVI wieku udowodniono, że równanie sześciennego  $x^3 = px + q$  ma rozwiązanie postaci (tzw. wzór Cardano)

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

**Zadanie 1.2.** Rozważmy następujące równanie:

$$x^3 = x,$$

Znajdź formalne rozwiązanie tego równania posługując się wzorem Cardano.

**Zadanie 1.3.** Uzasadnij, że liczby  $z_1, z_2$  oraz  $z_3$  stanowią kandydatów na  $\sqrt[3]{\sqrt{-1}}$

- $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{-1}}{2},$
- $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{-1}}{2},$
- $z_3 = -\sqrt{-1}.$

## 2 Liczby zespolone

**Zadanie 2.1.** Znajdź sumę, różnicę, iloczyn i iloraz liczb  $z_1$  i  $z_2$ :

1.  $z_1 = 1 + 3i, z_2 = 1 + i$
2.  $z_1 = -2i, z_2 = 2 - i$
3.  $z_1 = 2 - 3i, z_2 = -1 + i$
4.  $z_1 = -1 + 5i, z_2 = 6i$

**Zadanie 2.2.** Oblicz

1.  $i^7$
2.  $i^{17}$
3.  $(1 + i)^2$
4.  $(2 - i)^3$
5.  $\frac{1+i}{1-i}$

**Zadanie 2.3.** Znajdź  $|z|$ ,  $\bar{z}$ ,  $\operatorname{Re}z$ ,  $\operatorname{Im}z$ .

1.  $z = 3 + 4i$ ,
2.  $z = 12 - 5i$ ,
3.  $z = -1 + i$
4.  $z = -1 + 5i$

**Zadanie 2.4.** Oblicz

1.  $\frac{1+i}{1-i} - (1 + 2i)(2 + 2i) + \frac{3-i}{1+i}$ ,
2.  $2i(i - 1) + (\sqrt{3} + i)^3 + (1 + i)(\overline{1 + i})$ .

**Zadanie 2.5.** Rozwiąż równania

1.  $\bar{z} = i(z - 1)$ ,
2.  $z^2\bar{z} = z$ ,
3.  $|z + 3i| = 3|z|$ ,
4.  $\operatorname{Re}(z(1 + i)) + z\bar{z} = 0$ ,
5.  $\operatorname{Re}(z^2) + i\operatorname{Im}(\bar{z}(1 + 2i)) = -3$ ,
6.  $\operatorname{Im}((2 - i)z) = 1$ .