Odwzorowania liniowe

1 Odwzorowania liniowe

Zadanie 1.1. Niech $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ i $E' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$ będą dwiema bazami. Jak wygląda relacja pomiędzy wektorami tych baz? A jak wygląda relacja pomiędzy współczynnikami wektorów w tych bazach? (*Podpowiedź:* Wyraź wektory bazy E jako kombinacje liniowe wektorów bazy E').

Zadanie 1.2. Niech $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ i $E' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$ $E'' = \{\vec{e}''_1, \vec{e}''_2\}$ będą trzema bazami. Niech $T_{E',E}, T_{E'',E'}$ i $T_{E'',E}$ będą odpowiednimi macierzami przejścia. Jaka jest relacja pomiędzy ich współczynnikami?

Zadanie 1.3. Oblicz iloczyn i sumę macierzy A i B oraz $2A$

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$

   Odpowiedź: $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 11 & -2 \end{bmatrix}$, $AB = \begin{bmatrix} 20 & -3 \\ -11 & 1 \end{bmatrix}$, $2A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

   Odpowiedź: $A + B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $AB = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 8 & -8 \end{bmatrix}$, $2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

   Odpowiedź: $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$, $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 27 & 19 \end{bmatrix}$, $2A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

   Odpowiedź: $A + B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{8}{15} \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $AB = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{13}{30} \\ 4 & \frac{21}{5} \end{bmatrix}$, $2A = \begin{bmatrix} \frac{2}{2} & \frac{2}{3} \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

   Odpowiedź: $A + B = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $2A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Zadanie 1.4. Znajdź macierz $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^{2\times 2}$, taką że dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mamy $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$.

Zadanie 1.5. Znajdź macierz $I \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, taką że dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mamy $AI = IA = A$.

Zadanie 1.6. Udowodnij, że dla dowolnych $A, B, C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ oraz dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mamy własności

1. Istnieje $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^{2\times 2}$, taka że dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mamy $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$,
2. $A + B = B + A$,
3. $(A + B) + C = A + (B + C)$,
4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta B$,
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$,
6. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$,
7. Istnieje $\mathbf{I} \in \mathbf{R}^{2\times 2}$, taka że dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mamy $AI = IA = A$,
8. $(AB)C = A(BC)$,
9. $A(B + C) = AB + AC$,

10. $(\alpha A)B = \alpha(AB)$.

Zadanie 1.7. Niech $T : \mathbb{V}^2 \to \mathbb{V}^2$ będzie odwzorowaniem liniowym. Udowodnij, że jego wartość dla dowolnego wektora jest określona tylko przez wartość na wektorach bazowych. Napisz macierz tego odwzorowania.

Zadanie 1.8. Niech $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Znajdź macierz B taką, że $AB = BA = I$.

Zadanie 1.9. Wykaż, że istnienie macierzy odwrotnej do $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ jest równoważne z rozwiązalnością dowolnego układu równań:

$$Ax = b,$$

gdzie $a, x \in \mathbb{R}^{2\times 1}$.

Zadanie 1.10. Niech R_x będzie odbiciem względem osi Ox. Napisz macierz tego odwzorowania.

Zadanie 1.11. Niech R_y będzie odbiciem względem osi Oy. Napisz macierz tego odwzorowania.

Zadanie 1.12. Niech $\mathrm{Rot}_\phi : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ obrotem o kąt ϕ wokół początku układu współrzędnych. Udowodnij, że Rot_ϕ jest odwzorowaniem liniowym. Znajdź jego macierz.

Zadanie 1.13. Udowodnij wzory:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Zadanie 1.14. Niech R_L będzie odbiciem względem prostej $L : Ax+By = 0$. Napisz macierz tego odwzorowania.

Zadanie 1.15. Niech P_L rzutem prostopadłym na prostą $L : Ax + By = 0$. Napisz macierz tego odwzorowania.