Podprzestrzenie i odwzorowania liniowe

1 Podprzestrzenie liniowe

Zadanie 1.1. Niech $W \subset \mathbb{V}^n$ będzie podprzestrzenią liniową. Udowodnij, że wektor zerowy należy do W.

Zadanie 1.2. Które proste i płaszczyzny możemy uważać za podprzestrzenie liniowe. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 1.3. Niech $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m\} \subset \mathbb{V}^n$ będzie układem wektorów. Udowodnij, że zbiór kombinacji liniowych

$$\{\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + ... + \alpha_m\vec{v}_m \mid \alpha_i \in \mathbb{R}, \text{dla } i = 1, 2, ...m\}$$

jest podprzestrzenią liniową.

Zadanie 1.4. Rozważmy podprzestrzeń $\langle\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\rangle$ generowaną przez wektory

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Ile wektorów wystarczy, żeby wygenerować tą podprzestrzeń (innymi słowy, ile elementów ma jej baza)?

Zadanie 1.5. Z podanego zbioru wektorów, wybierz maksymalny podzbiór liniowo niezależny.

1.
$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ -18 \end{bmatrix},$$

   Odpowiedź: wystarczą wektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2$,

2.
$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 10 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 12 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix},$$

   Odpowiedź: wystarczą wektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$,

3.
$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 11 \\ -2 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 19 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

   Odpowiedź: wystarczą wektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2$.

2 Odwzorowania liniowe

Zadanie 2.1. Niech $L : \mathbb{V}^m \to \mathbb{V}^n$ będzie odwzorowaniem liniowym. Jakie wymiary ma macierz tego odwzorowania?

Zadanie 2.2. Niech $L : \mathbb{V}^m \to \mathbb{V}^n$ będzie odwzorowaniem liniowym. Udowodnij, że poniższe zbiory

$$\{\vec{v} \in \mathbb{V}^m \mid L(\vec{v}) = 0\},$$

$$\{\vec{v} \in \mathbb{V}^n \mid \text{istnieje } \vec{w} \in \mathbb{V}^m \text{ taki, że } L(\vec{w}) = \vec{v}\}.$$

Są podprzestrzeniami liniowymi.

Zadanie 2.3. Niech $L : \mathbb{V}^m \to \mathbb{V}^n$ oraz $m > n$. Udowodnij, że L ma nietrywialne jądro.

Zadanie 2.4. Niech W będzie podprzestrzenią liniową. Rozważmy jej dwie bazy $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_k\}, F = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_l\}$. Jakie wymiary mają macierze przejścia pomiędzy tymi bazami? Jaki wniosek na temat liczebności tych baz można wyciągnąć?

Zadanie 2.5. Znajdź jądro i bazę obrazu macierzy A. Jaki jest rząd macierzy A?

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

   Odpowiedź: $\dim\ker A = 1, \operatorname{rank}(A) = 2$

2. $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -9 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

   Odpowiedź: $\dim\ker A = 1, \operatorname{rank}(A) = 3$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   Odpowiedź: $\dim\ker A = 0, \operatorname{rank}(A) = 3$

4. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

   Odpowiedź: $\dim\ker A = 2, \operatorname{rank}(A) = 2$