

Postać trygonometryczna liczb zespolonych

1 Postać trygonometryczna

Zadanie 1.1. Przedstaw następujące liczby w postaci trygonometrycznej

- $1 + i$,
- $1 - i$,
- $\sqrt{3} - i$,
- -10 ,
- $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$,
- $-12i$,
- $-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Zadanie 1.2. Rozważmy dwie liczby zespolone z_1, z_2 w postaci trygonometrycznej:

$$z_1 = r_1(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2).$$

Jak będzie wyglądała postać trygonometryczna liczby $z_1 \cdot z_2$?

Zadanie 1.3. Oblicz

- $(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3})^7$,
- $(3 + 3i)^8$,
- $(1 + i + i^2 + \dots + i^{100})^{50}$,
- $(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^{10}$

2 Pierwiastki zespolone

Zadanie 2.1. Jakie liczby są dobrymi kandydatami na $\sqrt[n]{1}$?

Zadanie 2.2. Znajdź jeden z pierwiastków n -tego stopnia z liczby 1.

Zadanie 2.3. Znajdź jeden z pierwiastków n -tego stopnia z liczby 1, który jest różny od 1.

Zadanie 2.4. Niech z_0 i z_1 będą dwoma (być może różnymi) pierwiastkami $\sqrt[n]{1}$. Co można powiedzieć o $z_1 \cdot z_2$ oraz $\frac{z_1}{z_2}$?

Zadanie 2.5. Znajdź wszystkie:

- $\sqrt{1}$,
- $\sqrt[3]{1}$,
- $\sqrt[4]{1}$,
- $\sqrt[n]{1}$.

Zadanie 2.6. Niech z_0 i z_1 będą dwoma (być może różnymi) pierwiastkami $\sqrt[n]{z_0}$. Co można powiedzieć o $\frac{z_1}{z_2}$?

Zadanie 2.7. Udowodnij wzór

$$\sqrt[n]{z_0} = \sqrt[n]{|z_0|} \left(\cos \frac{\arg(z_0) + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\arg(z_0) + 2k\pi}{n} \right), \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots, n-1$$

Zadanie 2.8. Oblicz

1. $\sqrt[2]{i}$,
2. $\sqrt[3]{i}$,
3. $\sqrt[5]{1+i}$,
4. $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}$,
5. $\sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}$,
6. $\sqrt[4]{-1}$.