Powtórka z trygonometrii

1 Miara kąta

Kątem nazywamy obszar pomiędzy dwiema półprostymi wychodzącymi ze wspólnego wierzchołka (patrz Rysunek 1). Potrzeba mierzenia kątów (czyli przypisania im pewnej liczby w zależności od ich rozwartości) wynika niewątpliwie ze względów praktycznych i zaprzątała głowę inżynierom już w czasach starożytności. Obecnie najczęściej używaną miarą kąta są stopnie, gdzie kąt prosty składa się z 90 stopni, natomiast cztery kąty proste składają się na kąt pełny (odpowiadający całej płaszczyźnie), którego miara wynosi, rzecz jasna, 360 stopni. Warto wiedzieć, iż miara ta pochodzi z Babilonii, a liczba 360 została wybrana jako podzielna przez 60[1].

W matematyce teoretycznej i w fizyce posługujemy się zazwyczaj inną miarą kąta, zwaną *radianami*. Okazuje się ona być nieco wygodniejsza w pewnych zastosowaniach; na przykład wtedy, gdy rozpatrujemy zagadnienie ruchu po okręgu[2]. Miarę kąta przedstawionego na Rysunku 2 definiuje się według wzoru

$$\alpha = \frac{L}{R}.$$

Innymi słowy, miara kąta jest równa proporcji długości łuku kąta, do promienia tego łuku. Na przykład, przypomnijmy sobie, że długość okręgu o

[1] Tak jak my posługujemy się najczęściej systemem dziesiętnym, tak Babilończycy posługiwali się systemem sześćdziesiątkowym. Można powiedzieć, że w spadku po tej kulturze nadal posługujemy się miarą czasu, jednej godzinie odpowiada 60 minut, a jednej minucie 60 sekund.

[2] Na przykład, kąt pełny ma miarę 2π, co odpowiada drodze pokonanej przez ciało po obiegnięciu całego okręgu o promieniu równym 1.

promieniu R wynosi $2\pi R$. Natomiast kąt prosty dzieli płaszczyznę na cztery równe kawałki, w związku z czym długość jego łuku będzie równa 1/4 długości okręgu. Stąd, mamy $L = \frac{1}{4} 2\pi R = \frac{\pi}{2} R$. Zatem otrzymujemy:

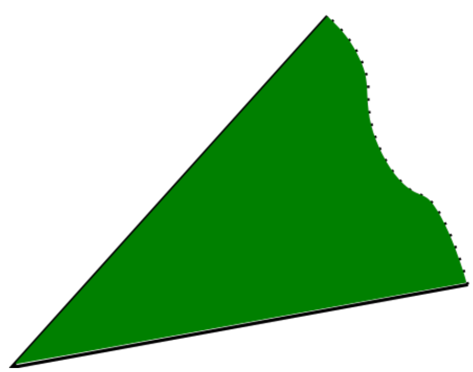
$$\text{Miara kąta } [90^\circ] = \frac{(\pi/2)R}{R} = \frac{\pi}{2}.$$

Stąd widzimy, że miara kąta pełnego wynosi 2π (gdyż są to 4 kąty proste), a miara kąta półpełnego jest równa π.

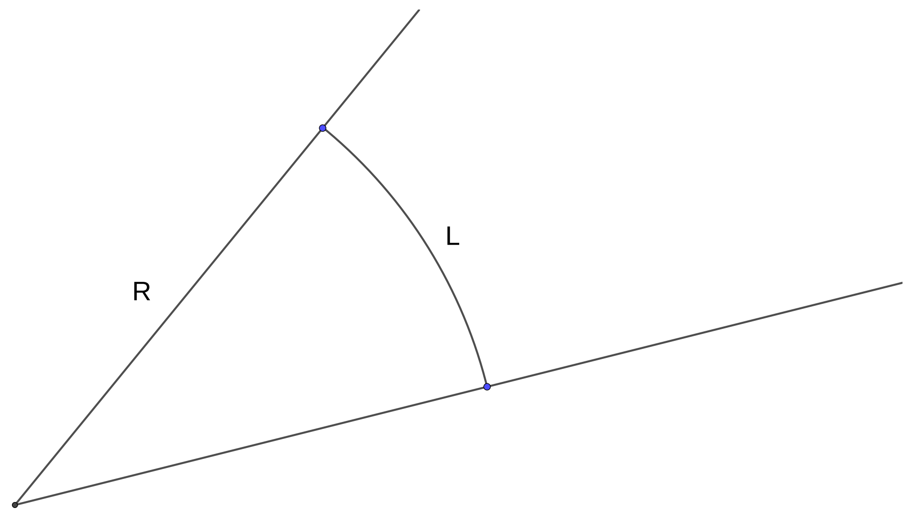
Problem 1.1. *Oblicz ile wynoszą miary kątów* 30°*,* 60° *i* 270°*.* Podpowiedź: Trzy kąty o mierze 30° dają kąt prosty.

W typowych zadaniach matematycznych spotykamy się z kątami, które „zawierają" w sobie liczbę π. Jest tak dlatego, że funkcje trygonometryczne (sinus, cosinus, itp.) można „na palcach" policzyć tylko dla wielokrotności kąta 30°. Nic dziwnego, że inżynierowie, w przeciwieństwie do matematyków i fizyków, preferują używanie stopni zamiast radianów. Niemniej jednak, jest sensowne mówić o kątach, których miara w radianach nie zawiera liczby π, i o tym stanowi kolejny problem.

Problem 1.2. *Rozważmy kąt, którego miara w radianach wynosi 1. Czy jest on większy, czy mniejszy od kątów o miarach:* $30^\circ, 60^\circ$ *i* 90°*? Odpowiedzi udziel bez używania kalkulatora. Spróbuj naszkicować wszystkie cztery kąty.*



Rysunek 1: Kąt pomiędzy dwiema półprostymi



Rysunek 2: Kąt z zaznaczoną długością łuku (L) i promieniem tego łuku (R)

Problem 1.3. *Użyj kalkulatora lub komputera by przeliczyć na stopnie miarę kąta, o którym mowa w poprzednim problemie (pamiętaj, że komputer podaje tylko wartość przybliżoną).*

Poniższy wzór pozwala przeliczyć kąty o miarach podanych w radianach $\alpha[\mathrm{rad}]$, na miary podane w stopniach $\alpha[\mathrm{st}]$:

$$\alpha[\mathrm{st}] = \alpha[\mathrm{rad}] \cdot \frac{360^\circ}{2\pi}.$$

Problem 1.4. *Sprawdź czy powyższy wzór działa dla kątów rozważanych w poprzednich problemach. W szczególności, czy zgadza się on z komputerowym przybliżeniem dla kąta o mierze 1 radianów.*

Problem 1.5. *Uzasadnij powyższy wzór.*

W dalszej części tego tekstu będziemy się posługiwać tylko i wyłącznie miarami kątów wyrażonymi w radianach. Dlatego osoby, które czują się nieobyte z tym tematem proszę o zwrócenie szczególnej uwagi na powyższe problemy.

2 Funkcje trygonometryczne w trójkącie prostokątnym

Zachodni matematycy już w starożytności zdawali sobie sprawę, że istnieją relacje pomiędzy miarami kątów w trójkącie, a długościami jego boków. Jedną z przesłanek są Stwierdzenia 12 i 13 z drugiej księgi słynnych *Elementów* napisanych przez Euklidesa. Odkryte prawidłowiści stanowią niedojrzałą wersję tego co nazywamy dzisiaj *twierdzeniem kosinusów*. Trzeba jednak zauważyć, że Euklides nie posługiwał się takimi miarami kątów, których używamy obecnie (stopnie, tudzież radiany), a funkcje trygonometryczne wówczas jeszcze nie istniały.

Trygonometria jaką znamy zaczęła się kształtować dopiero wtedy, gdy pałeczkę przejęli matematycy arabscy,[3] a jednym z głównych jej zastosowań była astronomia. Uświadomiono sobie wówczas, że zamiast rozważać trójkąty o dowolnych kształtach, warto skupić się na pewnym szczególnym przypadku: na trójkącie prostokątnym. Relacje pomiędzy długościami boków i kątami w trójkącie prostokątnym, zwane obecne funkcjami trygonometycznymi, pozwalają następnie opisać zależności pomiędzy bokami i kątami dla dowolnego trójkąta[4].

Na Rysunku 3 przedstawiono trójkąt prostokątny z zaznaczonymi dłgościami boków a, b i c oraz kątem α. Funkcje trygonometryczne sinus i kosinus są definiowane w następujący sposób

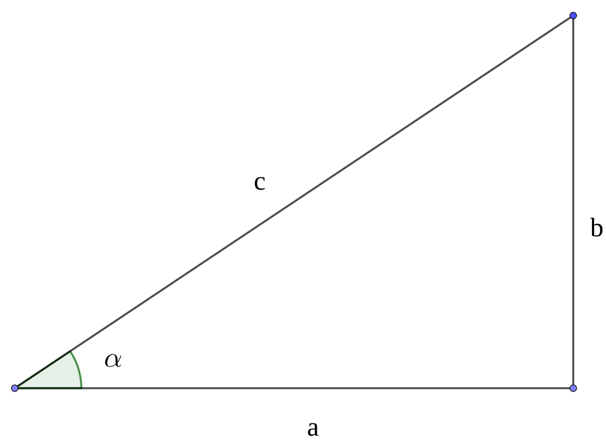
$$\sin\alpha = \frac{b}{c}, \qquad \cos\alpha = \frac{a}{c}.$$

Z jednego z praw geometrii Euklidesowej[5] wynika, że powyższe funkcje sinus i kosinus zależą tylko i wyłącznie od miary kąta α, a nie od tego, jaki dokładnie trójkąt prostokątny używaliśmy w definicji. Z reguły trudno jest podać dokładne wartości sinusów i kosinusów dla danych kątów (niegdyś uży-

[3]Warto tu wspomnieć także o wpływach indyjskich.

[4]Osoby bardziej zainteresowane tematem odsyłam do przypomnienia sobie twierdzeń kosinusów i sinusów.

[5]Przypomnij sobie tzw. podobieńtwo trójkątów.



Rysunek 3: Trójkąt prostokątny z zaznaczonym kątem α i długościami boków a, b i c

wało się tablic trygonometrycznych, a obecnie kalkulatora by znaleźć przybliżone wartości).

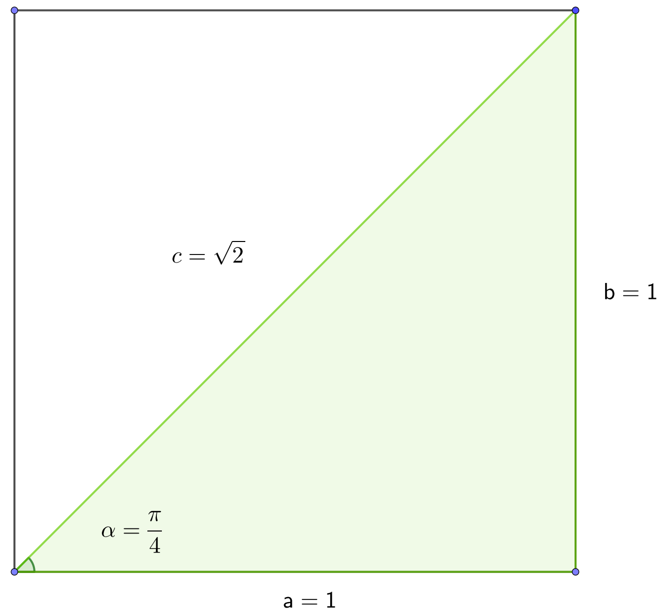
Spróbujmy obliczyć ile wynosi sinus kąta o mierze $\frac{\pi}{4}$. Zauważmy, że jest to połowa kąta prostego. Występuje on, na przykład, pomiędzy przekątną kwadratu o boku 1 a jednym z boków (patrz Rysunek 4). Trójkąt o zielonym kolorze na Rysunku 4 ma przyprostokątne o długości 1, a jego przeciwprostokątna ma długość $\sqrt{2}$.

Problem 2.1. *Uzasadnij dlaczego przekątna kwadratu o boku 1 ma długość* $\sqrt{2}$.

Teraz nietrudno zauważyć, że

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Zwróćmy uwagę, że obie przyprostokątne zielonego trójkąta są takie same, zatem kosinus będzie miał dokładnie tę samą wartość!



Rysunek 4: Kwadrat o boku długości 1

W poniższej tabelce przedstawiamy wartości funkcji sinus i kosinus dla typowych kątów:

Kąt	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Tabela 1: Wartości funkcji sinus i kosinus dla typowych kątów

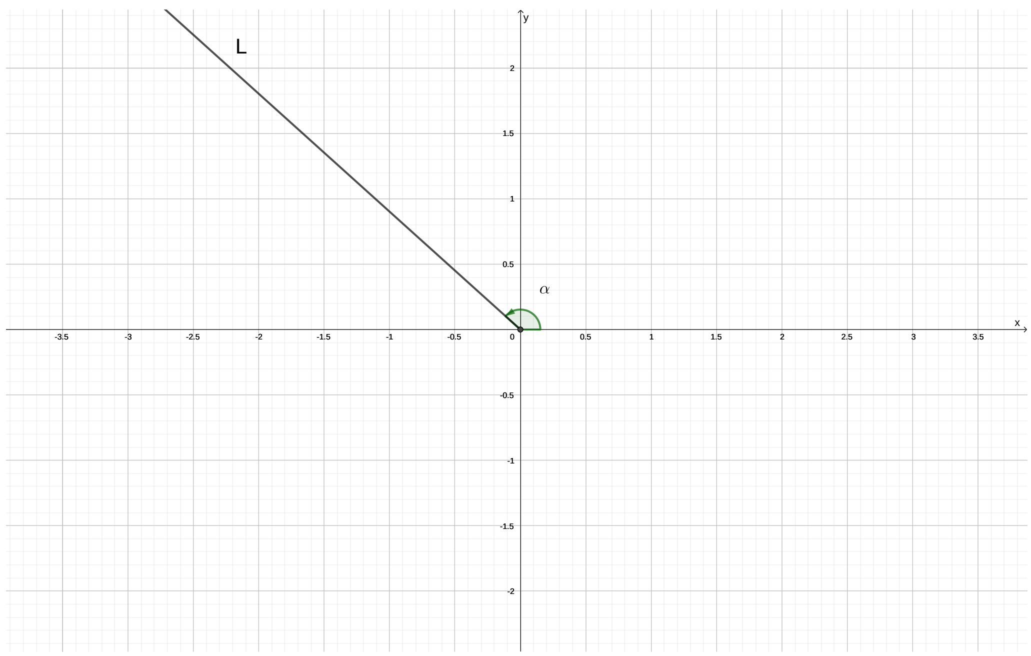
Problem 2.2. *Oblicz trzy wybrane przez siebie wartości funkcji sinus lub kosinus spośród przedstawionych w Tabeli 1.* Podpowiedź: Wykorzystaj fakt, że trójkąt równoboczny ma wszystkie kąty równe $\frac{\pi}{3}$.

Problem 2.3. *Zauważ, że dla kątów α z Tabeli 1 zachodzi następujący wzór (tzw. jedynka trygonometryczna)*

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Udowodnij, że wzór ten jest prawdziwy dla dowolnego kąta α w trójkącie prostokątnym.

3 Funkcje trygonometryczne dla dowolnej liczby rzeczywistej



Rysunek 5: Układ współrzędnych z zaznaczonym kątem α

Ze źródeł historycznych wiemy, że już średniowieczni arabowie tworzyli tabele znanych nam funkcji trygonometrycznych. Jednakże samo pojęcie funkcji pojawiło się dużo później, mianowicie w XVII wieku, gdy zaczęła się kształtować analiza matematyczna[6] – dziedzina matematyki, u której podstaw leży potrzeba stworzenia teorii opisującej ruch.

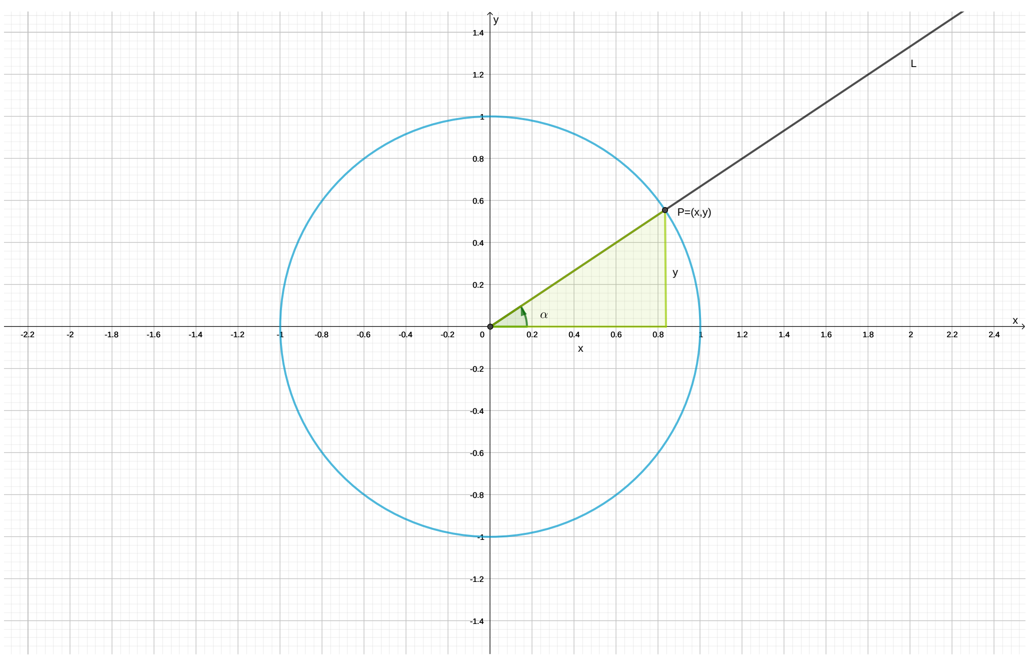
Aby opisać ruch punktu poruszającego się po okręgu wygodnie jest wprowadzić funkcje trygonometryczne argumentu, który jest dowolną liczbą rzeczywistą (a nie jedynie miarą kąta, która może zmieniać się od 0 do $\pi/2$). W

[6]Pojęcie funkcji pierwszy raz zostało użyte przez G. Leibniza.

tym celu umieśćmy dany kąt w układzie współrzędnych (patrz Rysunek 5). Jako dany kąt α będziemy teraz rozumieć, kąt pomiędzy osią Ox a daną półprostą L. Półprosta L może leżeć we wszystkich czterech ćwiartkach układu współrzędnych, dlatego kąt α może przyjmować wartości z przedziału $[0, 2\pi)$.

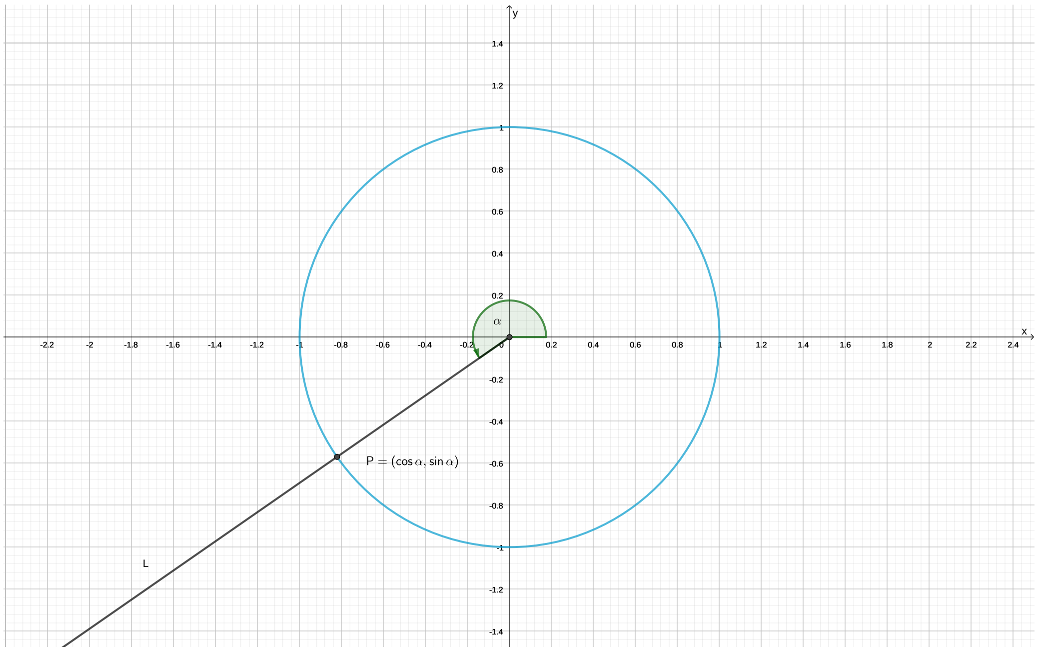
Na początek rozważmy prostą L leżącą w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych (a zatem $\alpha \in [0, \pi/2)$).

Problem 3.1. *Na Rysunku 6 zaznaczono półprostą L i okrąg o promieniu równym 1 i środku w początku układu współrzędnych (tzw. okrąg jednostkowy). Punkt P jest punktem przecięcia owego okręgu jednostkowego i półprostej L. Uzasadnij, że współrzędna x punktu P wynosi* $\cos\alpha$*, natomiast jego współrzędna y wynosi* $\sin\alpha$*. Wykorzystaj fakt, że jeden z kątów zielonego trójkąta na Rysunku 6 jest równy α.*



Rysunek 6: Punkt P leżący w pierwszej ćwiartce na okręgu jednostkowym

Z powyższego problemu wynika następująca obserwacja. Jeżeli punkt leży w pierwszej ćwiartce, na okręgu jednostkowym, to jego współrzędne są równe

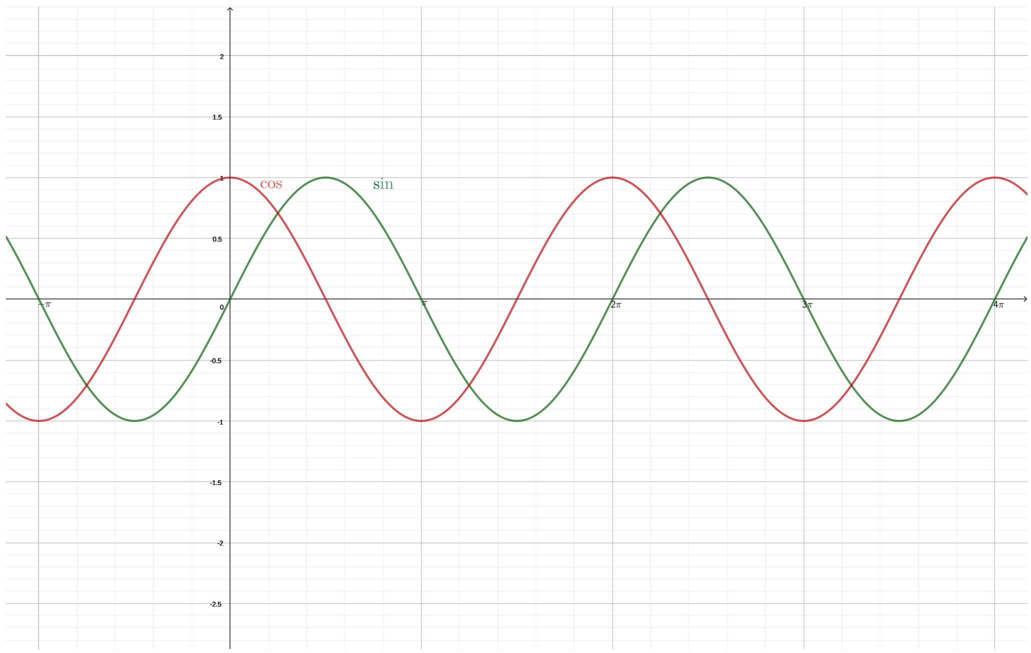


Rysunek 7: Definicja funkcji trygonometrycznych dla kąta $\alpha \in [0, 2\pi)$

odpowiednio kosinusowi i sinusowi kąta określonego przez półprostą przechodzącą przez ten punkt i wychodzącą z początku układu współrzędnych. Tę obserwację możemy wykorzystać do **zdefiniowania** tego, co właściwie oznaczają sinus lub kosinus kąta większego niż $\pi/2$.

Definicja 3.2. Sinusem kąta α nazywamy współrzędną y punktu P leżącego na przecięciu okręgu jednostkowego oraz półprostej L wyznaczającej kąt α (patrz Rysunek 7). Analogicznie, kosinusem kąta α nazywamy współrzędną x punktu P.

Problem 3.3. *Oblicz następujące wartości:* $\cos 0$, $\cos(\pi/2)$, $\sin(4\pi/3)$ *oraz* $\cos(4\pi/6)$. *Nie korzystaj z tablic trygonometrcznych, wzorów redukcyjnych, ani kalkulatora. Zamiast tego, naszkicuj kąt* α *w układzie wspórzędnych, znajdź punkt* P *i oblicz jego współrzędne.* Podpowiedź: możesz oczywiście wykorzystać wartości w Tabeli 1.



Rysunek 8: Wykres funkcji sinus i kosinus

Funkcje trygonometryczne zdefiniowane w powyższy sposób nie zawsze mają wartości dodatnie. Traktuje o tym następny problem.

Problem 3.4. *Ustal i naszkicuj jakie znaki mają funkcje sinus i kosinus w poszczególnych ćwiartkach układu współrzędnych.*

Na razie zdefiniowaliśmy funkcje sinus i kosinus dla kątów o wartościach z przedziału $[0, 2\pi)$. Aby otrzymać wartości tych funkcji dla dowolnych liczb rzeczywistych, wystarczy uświadomoć sobie, że o obrót wielokrotność kąta 2π wokół początku układu współrzędnych powoduje, że lądujemy z powrotem w tym samym miejscu. Zatem należy zdefiniować funkcje sinus i kosinus tak, aby powtarzały się okresowo co 2π. Wykresy owych funkcji przedstawiono na Rysunku 8.

Uwaga. W analizie matematycznej zwykło się oznaczać zmienną literą x, w związku z tym osoby, które miały już kurs analizy spotkały się z zapisem $\sin x$ lub $\cos x$. Niniejszy tekst ma naturę bardziej geometryczną, dlatego zamiast x używamy litery α. Niemniej sens jest dokładnie ten sam co w analizie: α oznacza dowolną liczbę rzeczywistą, którą możemy interpretować geometrycznie jako miarę pewnego kąta.

Zdefiniowane tutaj funkcje trygonometryczne spełniają szereg zależności, z których niektóre zostały już wspomniane (wzory redukcyjne, jedynka trygonometryczna). Nie będziemy tutaj skupiać się na tych wzorach, z łatwością mozna odnaleźć je w tablicach, natomiast pozwolimy sobie przytoczyć parę najciekawszych zależności

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Uwaga. W powyższych wzorach zastosowano konwencję, która pozwala pominąć nawiasy i znak mnożenia. Np. $\sin\alpha\cos\beta$ należy rozumieć jako $\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)$.

Powyższe wzory, zostaną uzasadnione na wykładzie. Można je natomiast wykorzystać do znajdowania innych, prostych zaleności trygonometrycznych

Problem 3.5. *Uzasadnij wzory*

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$