Wektory i wartości własne

1 Wektory i wartości własne

Zadanie 1.1. Udowodnij, że wartości własne λ macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ spełniają równanie:

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

gdzie I jest macierzą jednostkową wymiaru n.

Zadanie 1.2. Znajdź wektory i wartości własne

1. $$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},$$

2. $$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix},$$

3. $$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},$$

4. $$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \\ 6 & -6 & -6 \end{bmatrix},$$

5. $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -5 & 1 & 7 \end{bmatrix},$$

6.
$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix},$$

7.
$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 1.3. Znajdź wektory i wartości własne macierzy obrotu

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Zadanie 1.4. Znajdź wektory i wartości własne macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 1.5. Niech $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Załóżmy, że wektory własne $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ tej macierzy stanowią bazę.

1. Napisz macierz przejścia P z bazy wektorów własnych do bazy standardowej,

2. Pomnóż każda kolumnę macierzy P przez odpowiednią wartość własną. Tak otrzymaną macierz można zapisać jako iloczyn macierzy P przez macierz diagonalną. Zapisz to za pomocą wzoru.

3. Udowodnij, że $A = P\Lambda P^{-1}$, gdzie Λ jest macierzą diagonalną.

Zadanie 1.6. Dokonaj diagonalizacji macierzy

1.
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

Odpowiedź: $P = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

2.
$$\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix},$$

Odpowiedź: $P = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $\Lambda = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

3.
$$\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix},$$

Odpowiedź: Macierz nie jest diagonalizowalna

4.
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -5 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix},$$

Odpowiedź: $P = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,, $\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$,

5.
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

Odpowiedź: $P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,, $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$,

6.
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

Odpowiedź: Macierz nie jest diagonalizowalna