Wektory na płaszczyźnie

dr Janusz Przewocki

Uniwersytet Gdański

Kwaterniony

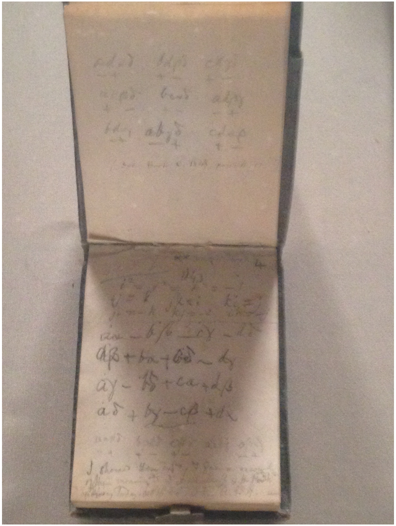
- W XIX wieku irlandzki matematyk William Rowan Hamilton starał się zrozumieć obroty przestrzeni trójwymiarowej
- Wieloletnie rozważania doprowadziły go do uogólnienia liczb zespolonych: kwaternionów
- Kwaterniony mają trzy „jednostki urojone”: i, j, k.

Kwaterniony

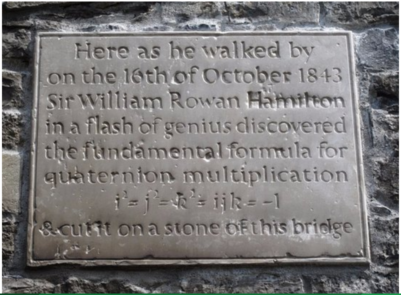
- W XIX wieku irlandzki matematyk William Rowan Hamilton starał się zrozumieć obroty przestrzeni trójwymiarowej
- Wieloletnie rozważania doprowadziły go do uogólnienia liczb zespolonych: kwaternionów
- Kwaterniony mają trzy „jednostki urojone": i, j, k.

Kwaterniony

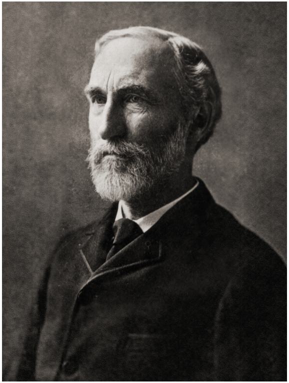
- W XIX wieku irlandzki matematyk William Rowan Hamilton starał się zrozumieć obroty przestrzeni trójwymiarowej
- Wieloletnie rozważania doprowadziły go do uogólnienia liczb zespolonych: kwaternionów
- Kwaterniony mają trzy „jednostki urojone": i, j, k.



Kwaterniony

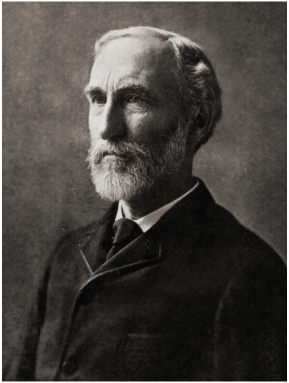


- Niedługo po odkryciu Hamiltona kwaterniony znalazły zastosowanie w fizyce
- Josiah Willard Gibbs zaproponował podzielić kwaterniony na część wektorową i skalarną
- Niezależnie Oliver Heaviside zapisał równania Maxwella w postaci wektorowej

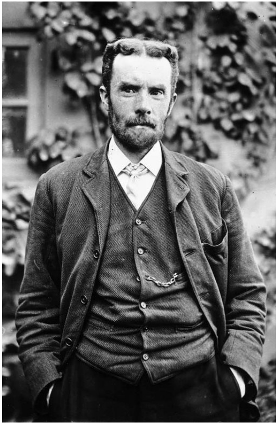


Wektory i skalary

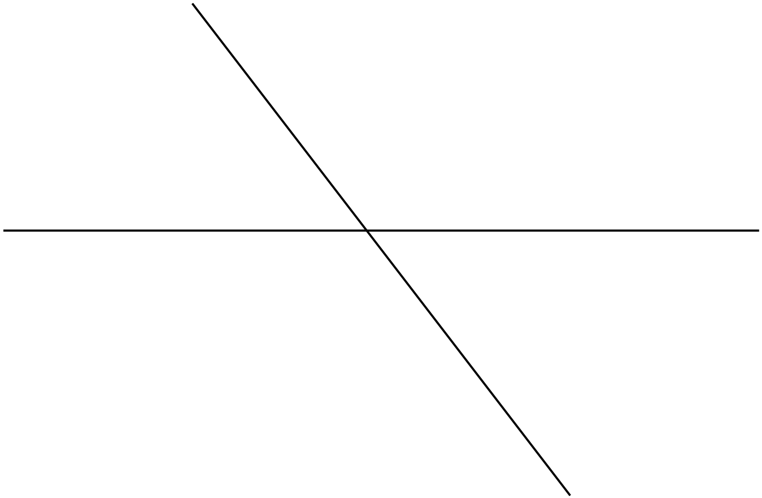
- Niedługo po odkryciu Hamiltona kwaterniony znalazły zastosowanie w fizyce
- Josiah Willard Gibbs zaproponował podzielić kwaterniony na część wektorową i skalarną
- Niezależnie Oliver Heaviside zapisał równania Maxwella w postaci wektorowej



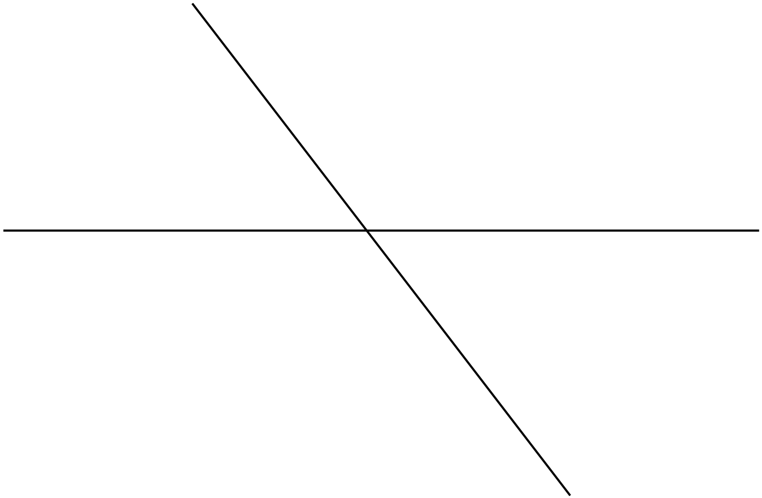
- Niedługo po odkryciu Hamiltona kwaterniony znalazły zastosowanie w fizyce
- Josiah Willard Gibbs zaproponował podzielić kwaterniony na część wektorową i skalarną
- Niezależnie Oliver Heaviside zapisał równania Maxwella w postaci wektorowej



Rozważmy dwie linie proste

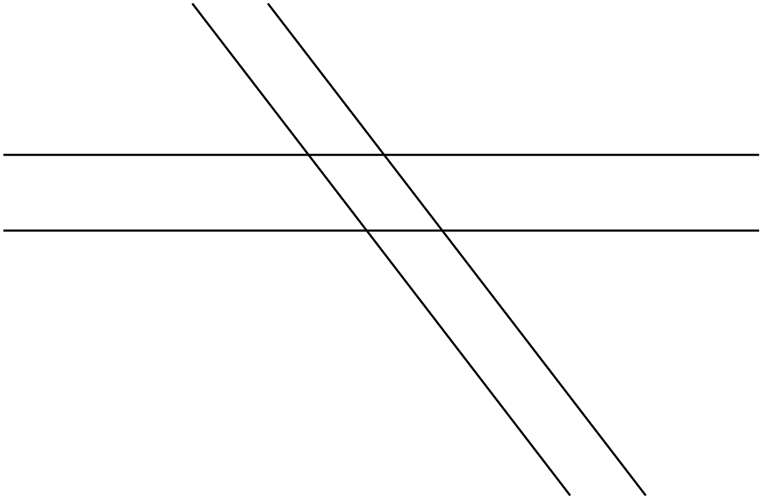


Rozważmy dwie linie proste



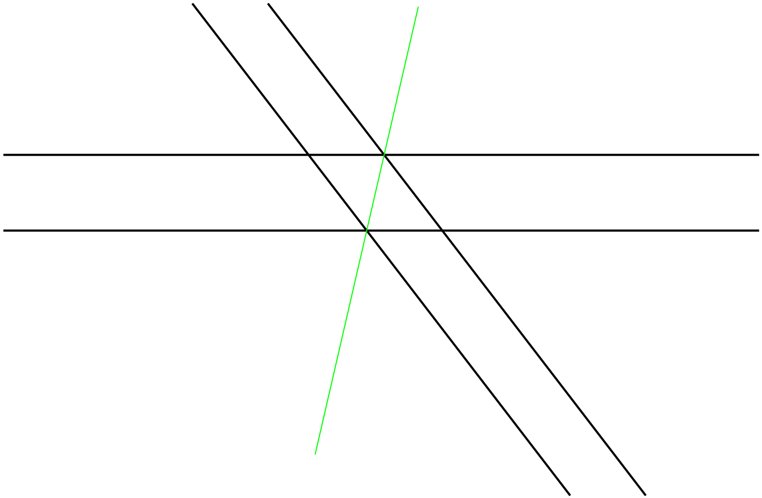
Jak opisać punkty na płaszczyźnie?

Rysujemy proste równoległe do danych

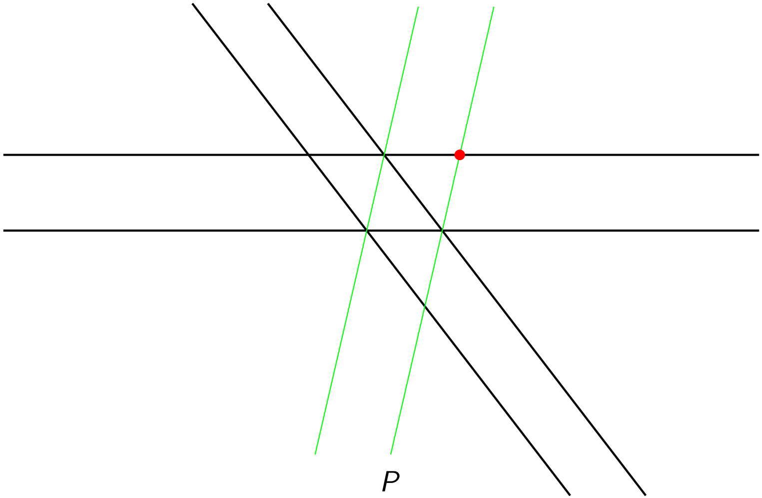


Jak opisać punkty na płaszczyźnie?

Prowadzimy przekątną równoległoboku

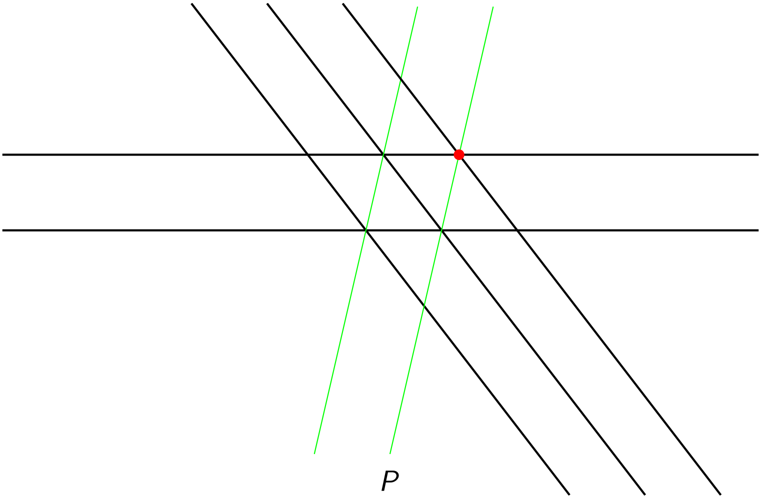


Prowadzimy prostą P przechodzącą przez wierzchołek



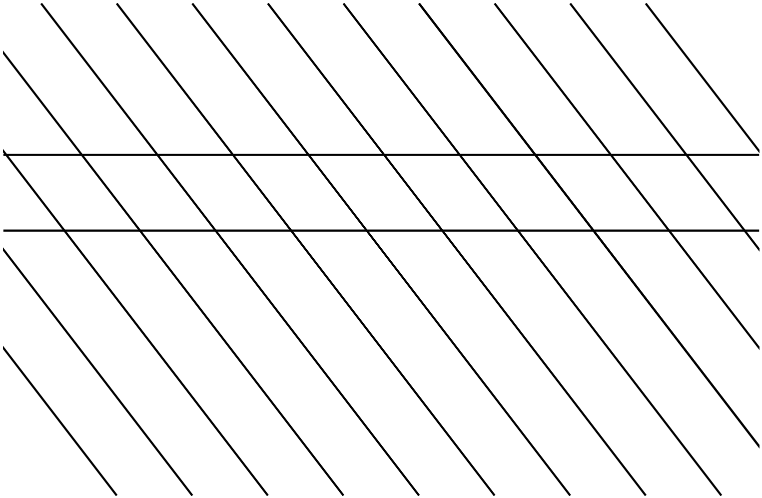
Jak opisać punkty na płaszczyźnie?

Dostajemy trzy równoodległe proste



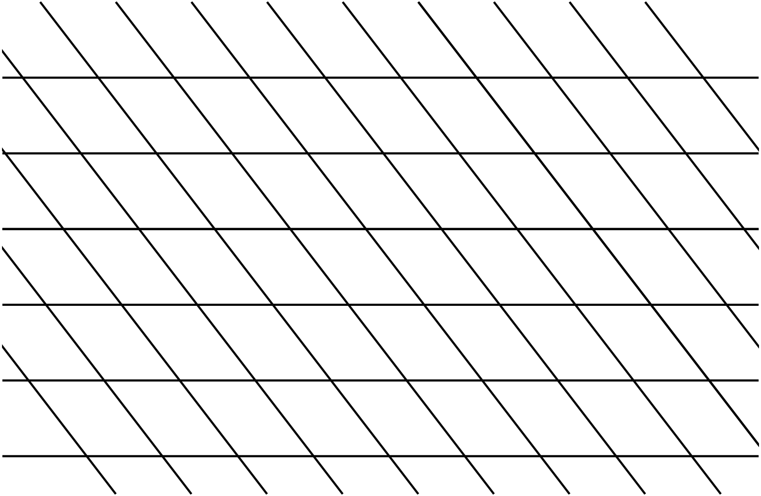
Jak opisać punkty na płaszczyźnie?

Postępując tak dalej dostajemy siatkę współrzędnych

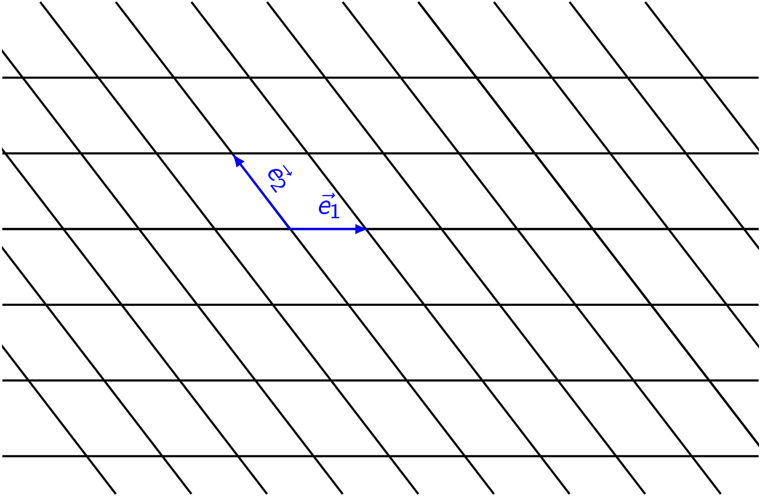


Jak opisać punkty na płaszczyźnie?

Postępując tak dalej dostajemy siatkę współrzędnych

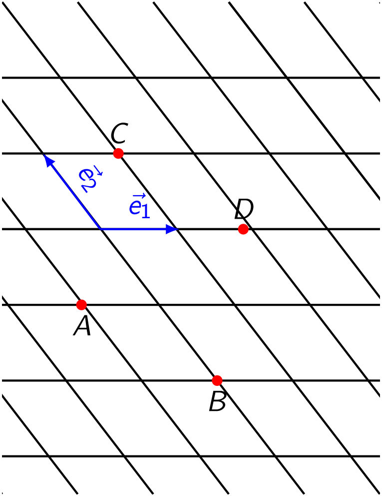


Możemy wybrać dwa wektory bazowe związane z siatką

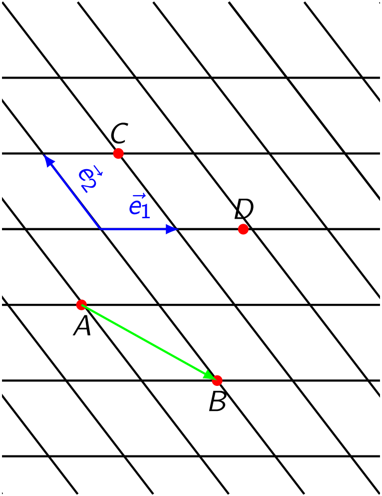


Wektory

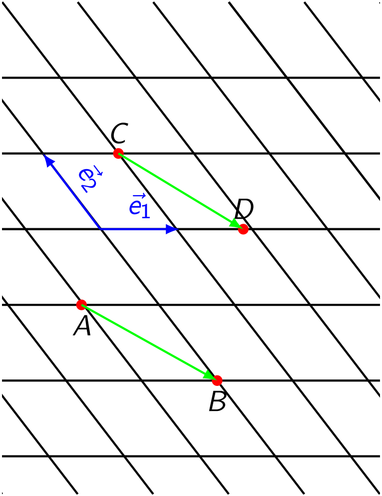
- Na płaszczyźnie afinicznej nie potrafimy mierzyć odległości punktów A i B
- Jednakże możemy położenie A względem B opisać wektorem $\overrightarrow{AB}$
- Widzimy, że $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$
- Natomiast $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$
- Jak opisać wektory o końcach nie leżących na siatce?
- Na przykład wektor $\frac{1}{2}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}e_2$



- Na płaszczyźnie afinicznej nie potrafimy mierzyć odległości punktów A i B
- Jednakże możemy położenie A względem B opisać wektorem $\overrightarrow{AB}$
- Widzimy, że $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$
- Natomiast $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$
- Jak opisać wektory o końcach nie leżących na siatce?
- Na przykład wektor $\frac{1}{2}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}e_2$

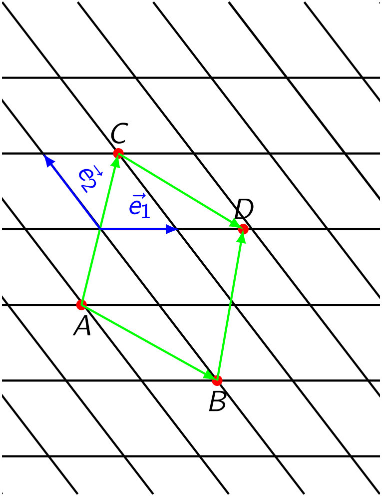


- Na płaszczyźnie afinicznej nie potrafimy mierzyć odległości punktów A i B
- Jednakże możemy położenie A względem B opisać wektorem $\overrightarrow{AB}$
- Widzimy, że $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$
- Natomiast $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$
- Jak opisać wektory o końcach nie leżących na siatce?
- Na przykład wektor $\frac{1}{2}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}e_2$

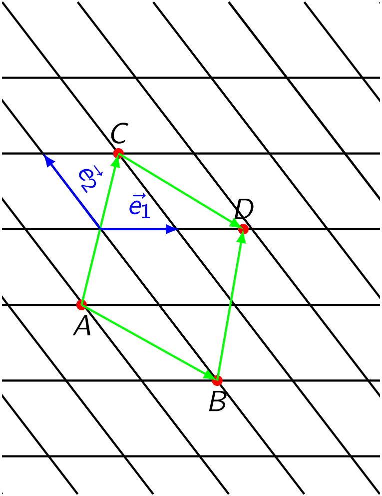


Wektory

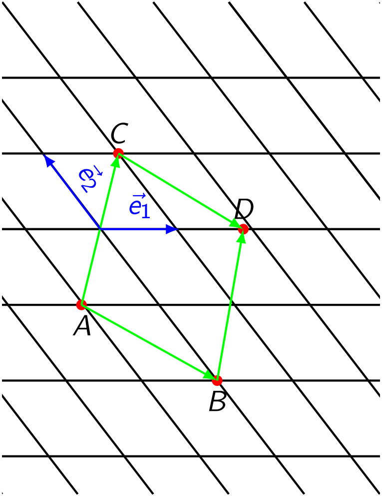
- Na płaszczyźnie afinicznej nie potrafimy mierzyć odległości punktów A i B
- Jednakże możemy położenie A względem B opisać wektorem $\overrightarrow{AB}$
- Widzimy, że $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$
- Natomiast $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$
- Jak opisać wektory o końcach nie leżących na siatce?
- Na przykład wektor $\frac{1}{2}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}e_2$



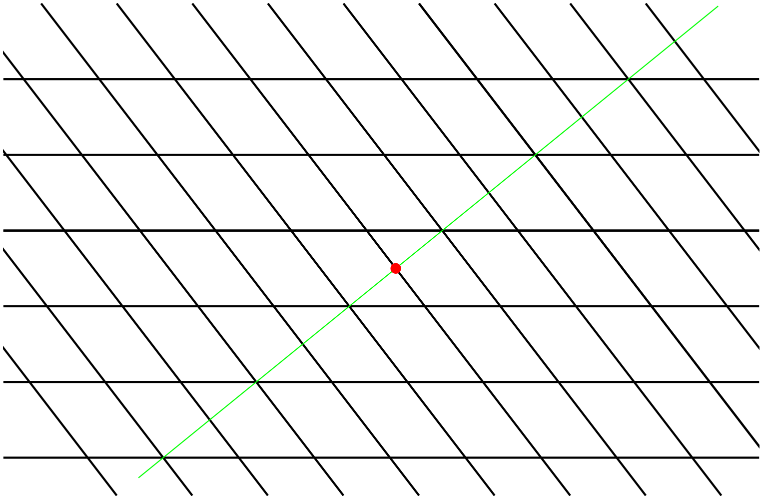
- Na płaszczyźnie afinicznej nie potrafimy mierzyć odległości punktów A i B
- Jednakże możemy położenie A względem B opisać wektorem $\overrightarrow{AB}$
- Widzimy, że $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$
- Natomiast $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$
- Jak opisać wektory o końcach nie leżących na siatce?
- Na przykład wektor $\frac{1}{2}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}e_2$



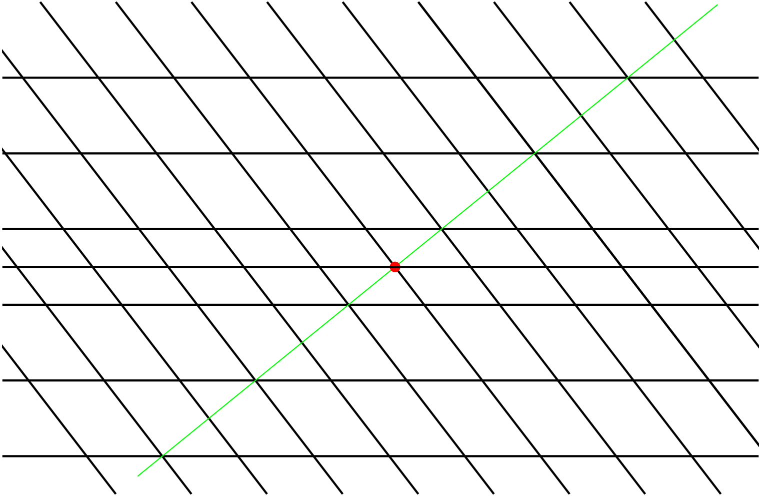
- Na płaszczyźnie afinicznej nie potrafimy mierzyć odległości punktów A i B
- Jednakże możemy położenie A względem B opisać wektorem $\overrightarrow{AB}$
- Widzimy, że $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$
- Natomiast $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$
- Jak opisać wektory o końcach nie leżących na siatce?
- Na przykład wektor $\frac{1}{2}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}e_2$



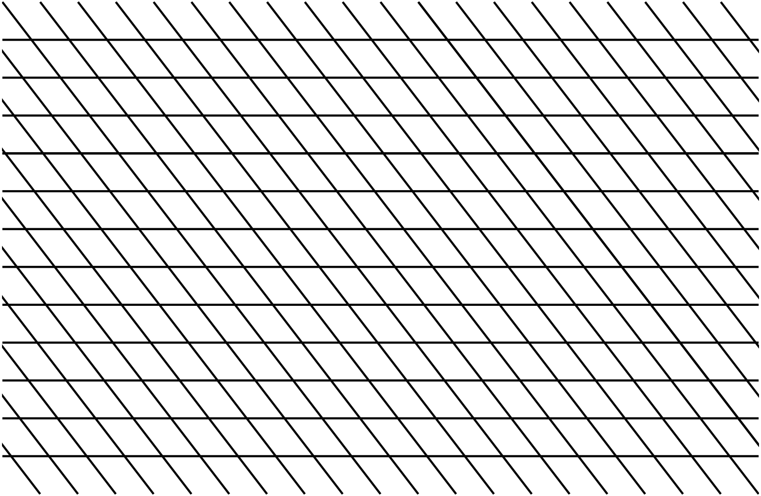
Zagęszczamy siatkę



Zagęszczamy siatkę



Zagęszczamy siatkę



Jak opisać punkty na płaszczyźnie?

- Kombinacjami liniowymi wektorów $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ nazywamy wyrażenia postaci

$$\alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2 \qquad \text{gdzie } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

- **Każdy** wektor na płaszczyźnie można **jednoznacznie** opisać za pomocą kombinacji liniowej wektorów bazowych
- Jeżeli chcemy opisać punkty płaszczyzny za pomocą wektorów, musimy wybrać punkt bazowy (początek układu współrzędnych)
- Wybór wektorów bazowych i punktu bazowego oznacza de facto wybranie układu współrzędnych

Jak opisać punkty na płaszczyźnie?

- Kombinacjami liniowymi wektorów $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ nazywamy wyrażenia postaci

$$\alpha \cdot \vec{e_1} + \beta \cdot \vec{e_2} \qquad \text{gdzie } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

- **Każdy** wektor na płaszczyźnie można **jednoznacznie** opisać za pomocą kombinacji liniowej wektorów bazowych
- Jeżeli chcemy opisać punkty płaszczyzny za pomocą wektorów, musimy wybrać punkt bazowy (początek układu współrzędnych)
- Wybór wektorów bazowych i punktu bazowego oznacza de facto wybranie układu współrzędnych

Jak opisać punkty na płaszczyźnie?

- Kombinacjami liniowymi wektorów $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ nazywamy wyrażenia postaci

$$\alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2 \qquad \text{gdzie } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

- **Każdy** wektor na płaszczyźnie można **jednoznacznie** opisać za pomocą kombinacji liniowej wektorów bazowych
- Jeżeli chcemy opisać punkty płaszczyzny za pomocą wektorów, musimy wybrać punkt bazowy (początek układu współrzędnych)
- Wybór wektorów bazowych i punktu bazowego oznacza de facto wybranie układu współrzędnych

Jak opisać punkty na płaszczyźnie?

- Kombinacjami liniowymi wektorów $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ nazywamy wyrażenia postaci

$$\alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2 \qquad \text{gdzie } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

- **Każdy** wektor na płaszczyźnie można **jednoznacznie** opisać za pomocą kombinacji liniowej wektorów bazowych
- Jeżeli chcemy opisać punkty płaszczyzny za pomocą wektorów, musimy wybrać punkt bazowy (początek układu współrzędnych)
- Wybór wektorów bazowych i punktu bazowego oznacza de facto wybranie układu współrzędnych

Współrzędne wektora w bazie

- Niech $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ oznacza wybraną bazę
- Jeżeli wektor $\vec{v}$ jest kombinacją liniową

$$\vec{v} = \alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2 \qquad \text{gdzie } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

To liczby α, β nazywamy współrzędnymi tego wektora w bazie E, co zapisujemy

$$[\vec{v}]_E = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Współrzędne wektora w bazie

- Niech $E = \{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2\}$ oznacza wybraną bazę
- Jeżeli wektor $\vec{v}$ jest kombinacją liniową

$$\vec{v} = \alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2 \qquad \text{gdzie } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

To liczby α, β nazywamy współrzędnymi tego wektora w bazie E, co zapisujemy

$$[\vec{v}]_E = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$