Wektory na płaszczyźnie

1 Pojęcie wektora

Zadanie 1.1. Wektory można zdefiniować jako uporządkowane pary punktów (początek i koniec wektora). Intuicyjnie, dwie pary punktów opisują ten sam wektor, gdy można dokonać przesunięcia równoległego jednej z par, tak aby pokryła się z drugą. Zastanów się, jak można sformalizować taką definicję.

Zadanie 1.2. Na wykładzie zdefiniowano sumę wektorów przy użyciu reguły trójkąta. Można również zdefiniować dodawanie wektorów za pomocą reguły równoległoboku. Uzasadnij dlaczego oba podejścia są równoważne.

Zadanie 1.3. Mnożenie wektorów przez skalary $\cdot$ i dodawanie wektorów $+$ ma następujące własności

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$,
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$,
3. istnieje wektor zerowy $\vec{0}$ taki, że $\vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$
4. $(\alpha\beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a})$
5. $\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$,
6. $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$,

dla dowolnych wektorów $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ i liczb α, β Uzasadnij te własności korzystając z definicji.

2 Bazy i współrzędne wektorów

Zadanie 2.1. Niech $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ będą dowolnymi dwoma wektorami. Czy zawsze jest tak, że dowolny wektor na płaszczyźnie daje się przedstawić jako kombinację liniową wektorów $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

Zadanie 2.2. Niech $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ będzie bazą. Jak mają się do siebie współrzędne wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}, \vec{a} + \vec{b}, \alpha \cdot \vec{a}$?

Zadanie 2.3. Niech $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ będzie bazą. Rozważmy pewien trzeci wektor $\vec{e}_3$. Czy jest prawdą, że każdy wektor płaszczyzny daje się przedstawić jako kombinacja liniowa wektorów $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$? Jeśli tak, to czy przedstawienie to jest jednoznaczne?

Zadanie 2.4. Znajdź, o ile to możliwe, liczby α, β takie, że $\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} = \vec{c}$, gdzie

1. $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$,
2. $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,
3. $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$,
4. $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$.