

# Wyznaczniki i macierze odwrotne

## 1 Wyznaczniki $2 \times 2$

**Zadanie 1.1.** Rozwiąż układy równań metodą Gaussa i metodą Cramera

$$1. \begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

Odpowiedź: 1, 2.

$$2. \begin{cases} 3x + 2y = -8 \\ 4x - y = -7 \end{cases}$$

Odpowiedź: -2, -1.

$$3. \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$$

Odpowiedź:  $-1/7, 3/7$ .

**Zadanie 1.2.** Znajdź macierz odwrotną do  $A$  metodą Gaussa i metodą Cramera

$$1. A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Odpowiedź: } \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},$$

$$2. A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Odpowiedź: } \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix},$$

$$3. A = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Odpowiedź: } \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix},$$

$$4. A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Odpowiedź: } \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

## 2 Wyznaczniki dowolnego wymiaru

**Zadanie 2.1.** Oblicz wyznaczniki

$$1. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Odpowiedź: 0,

$$2. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \end{vmatrix}$$

Odpowiedź: 8,

$$3. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

Odpowiedź:  $-76$ ,

$$4. \begin{vmatrix} 15 & 4 & 8 \\ -12 & -7 & 5 \\ 0 & -5 & 15 \end{vmatrix}$$

Odpowiedź: 0,

$$5. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

Odpowiedź: 900,

$$6. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

Odpowiedź: 1,

$$7. \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Odpowiedź: 14,

$$8. \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Odpowiedź: 65

**Zadanie 2.2.** Rozwiąż układy równań metodą Cramera, lub stwierdź, że nie ma jednoznacznego rozwiązania. Kiedy to możliwe orzeknij, że układ jest sprzeczny.

$$1. \begin{cases} x + y & = & 1 \\ x + 2y - 3z & = & -3 \\ 2x + 4y + z & = & 1 \end{cases}$$

Odpowiedź: 2, -1, 1.

$$2. \begin{cases} 3x + y + z & = & -1 \\ x + 2z & = & -6 \\ 3y + 2z & = & 0 \end{cases}$$

Odpowiedź: 0, 2, 3.

$$3. \begin{cases} 2x + 3y + 2z & = & 1 \\ 3x + 4y + 2z & = & 2 \\ 4x + 2y + 3z & = & 3 \end{cases}$$

Odpowiedź:  $8/7, -1/7, -3/7$ .

$$4. \begin{cases} x + y + z + t & = 1 \\ 2x + 2y + z + t & = 0 \\ 3x + 2y + 3z + 2t & = 3 \\ 6x + 4y + 3z + 2t & = 2 \end{cases}$$

Odpowiedź: 1, -2, 0, 2.

$$5. \begin{cases} x + 2y + 3z + t & = 1 \\ 2x + 4y - z + 2t & = 2 \\ 3x + 6y + 10z + 3t & = 3 \\ x + y + z + t & = 0 \end{cases}$$

Odpowiedź: brak jednoznacznego rozwiązania.

$$6. \left[ \begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 2 & -4 \\ 7 & 8 & 1 & -7 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right]$$

Odpowiedź: brak jednoznacznego rozwiązania. Można stwierdzić, że układ jest sprzeczny.

**Zadanie 2.3.** Znajdź macierz odwrotną do  $A$  metodą Gaussa i metodą Cramera

$$1. A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Odpowiedź: } \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$2. A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 13 & 10 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{Odpowiedź: } \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$3. A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Odpowiedź: } \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix},$$

$$4. A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{Odpowiedź: } \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -10 & -12 & 5 \\ 51 & 54 & -21 \\ -4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$5. A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 1 & 6 & 5 \\ -2 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\text{Odpowiedź: } \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 14 & -5 & -5 \\ -19 & 10 & 5 \\ 20 & -10 & -5 \end{bmatrix},$$

$$6. A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{Odpowiedź: } \begin{bmatrix} 5 & -2 & -5 & 4 \\ -7 & 3 & 16 & -13 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -11 & 9 \end{bmatrix}$$

$$7. A = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Odpowiedź: } \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -4 & -8 & 26 & 14 \\ 2 & 8 & -19 & -9 \\ 10 & 16 & -63 & -29 \\ -2 & 0 & 15 & 5 \end{bmatrix}$$