

Politechnika Gdańska  
Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej



## Separacja równań Diraca i Helmholtza w zastosowaniu do problemów dyfrakcyjnych

Janusz Przewocki

Praca dyplomowa magisterska przygotowana w Katedrze Fizyki Atomowej i  
Luminescencji pod kierunkiem prof. dr. hab. Radosława Szmytkowskiego

Gdańsk, lipiec 2010

## OŚWIADCZENIE AUTORA PRACY

Świadomy/a odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data

Podpis autora

.....

# Spis treści

<b>Spis symboli</b>	<b>iv</b>
<b>Wstęp</b>	<b>v</b>
<b>1 Problem dyfrakcyjny z równaniem Helmholtza</b>	<b>1</b>
<b>2 Problem dyfrakcyjny z równaniem Diraca</b>	<b>6</b>
<b>Podsumowanie</b>	<b>21</b>
<b>A Funkcje specjalne</b>	<b>22</b>
A.1 Funkcja gamma . . . . .	22
A.2 Funkcje Bessela . . . . .	23
<b>Bibliografia</b>	<b>25</b>

# Spis symboli

$f'$	–	pochodna funkcji $f$ jednej zmiennej
$\partial_k f$	–	pochodna cząstkowa funkcji $f$ względem $k$ -tej zmiennej
$\partial_x f, \partial_y f, \dots$	–	pochodne cząstkowe funkcji $f$ względem zmiennych $x, y$ , itd.
$W(y_1, y_2; x)$	–	$W(y_1, y_2; x) := y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$ , wrońskian funkcji $y_1, y_2$
$i$	–	jednostka urojona
$z^*$	–	sprzężenie zespolone liczby $z$

# Wstęp

## Uzasadnienie wyboru tematu

Równania Helmholtza i Diraca są bardzo ważnymi przykładami równań falowych występujących w fizyce. Pierwsze z nich opisuje zachowanie monochromatycznej fali klasycznej, drugie stanowi serce teorii łączącej mechanikę kwantową ze szczególną teorią względności.

Równanie Helmholtza jest dobrze przebadane i znane jest wiele jego rozwiązań. Wiadomo także, co pokazano w niniejszej pracy, że jest ono powiązane z równaniem Diraca. Sugeruje to, że problemy dyfrakcyjne powinny mieć analityczne rozwiązania także dla równania Diraca. Dlatego ich poszukiwanie jest ciekawym problemem badawczym.

## Stan badań

Równanie Helmholtza było intensywnie badane w XIX wieku [2, 3]. Rozwiązanie w postaci szeregu dla problemu dyfrakcji na półpłaszczyźnie zostało, w przypadku dwuwymiarowym, znalezione przez H. Poincaré. A. Sommerfeld przedstawił to rozwiązanie w postaci całki, a ponadto rozwiązał również problem dyfrakcji na klinie [3, 6].

Badania tej problematyki były prowadzone także w późniejszych latach. Lamb znalazł wyrażenia opisujące rozpraszanie fali na walcu parabolicznym [4]. Ostatnio badane były także problemy rozpraszania na półpłaszczyźnie impedancyjnej [5].

Równanie Diraca pojawiło się w latach 20. XX wieku i od tego czasu jego wła-

sności i rozwiązania są również intensywnie badane [8]. Jednakże, zgodnie z moją wiedzą, problemy rozpraszania na półpłaszczyźnie dla równania Diraca nie były dotąd rozważane.

## Zakres pracy

Z matematycznego punktu widzenia rozwiązanie problemu dyfrakcyjnego dla źródła punktowego jest jednoznaczne z poszukiwaniem funkcji Greena dla pewnego problemu brzegowego. W niniejszej pracy znajduję wyrażenie na funkcję Greena dla problemu brzegowego z równaniem Helmholtza (warunkami brzegowymi są: warunek zerowania na półprostej i warunek Sommerfelda w nieskończoności). Następnie rozważam analogiczny problem dla równania Diraca i znajduję wyrażenie (w postaci szeregu), będące macierzą Greena dla tego problemu.

# Rozdział 1

## Problem dyfrakcyjny z równaniem Helmholtza

Zjawiska falowe pojawiają się w wielu dziedzinach fizyki. Dotyczy to w szczególności: mechaniki, elektromagnetyzmu i ogólnej teorii względności. Spośród wielu równań, które je opisują, szczególne znaczenie ma *niejednorodne równanie d'Alemberta*

$$\nabla^2 \psi - \frac{\partial_t^2 \psi}{v^2} = \phi, \quad (1.1)$$

gdzie  $\phi$  jest daną funkcją opisującą źródła fali,  $v$  jest stałą, a  $\psi$  oznacza nieznaną wielkość opisującą falę (ciśnienie, odkształcenie, potencjał elektromagnetyczny, itp.).

Opis zagadnienia zazwyczaj upraszcza się, zakładając, że wielkości mają harmoniczną zależność od czasu (przypadek ten jest szczególnie istotny z fizycznego punktu widzenia). Matematycznie oznacza to, że:

1. wielkości  $\psi$  i  $\phi$  są zespolone (fizyczny sens mają tylko  $\text{Re}(\psi)$  i  $\text{Re}(\phi)$ ),
2.  $\psi = ue^{-i\omega t}$ ,  $\phi = fe^{-i\omega t}$ , gdzie  $f$  i  $u$  są wielkościami zespolonymi, a  $\omega$  stałą, mającą sens częstości kołowej.

Nietrudno sprawdzić, że aby równanie d'Alemberta było spełnione,  $u$  i  $f$  muszą być powiązane równaniem

$$\nabla^2 u + k^2 u = f, \quad (1.2)$$

## ROZDZIAŁ 1. PROBLEM DYFRAKCYJNY Z RÓWNANIEM HELMHOLTZA 2

gdzie  $k = \omega/v$ . Równanie (1.2) jest nazywane *niejednorodnym równaniem Helmholtza* i będzie przedmiotem rozważań niniejszego rozdziału.

Zajmiemy się poszukiwaniem funkcji Greena dla następującego zagadnienia:

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0, \quad u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \quad (1.3a)$$

$$u(x, y) = 0 \text{ dla } y = 0, x \geq 0, \quad (1.3b)$$

$$u \text{ spełnia warunki Sommerfelda w nieskończoności.} \quad (1.3c)$$

Innymi słowy, będziemy poszukiwać funkcji  $G(x, y; x_0, y_0)$  spełniającej równanie

$$\nabla^2 G + k^2 G = \delta^{(2)}(x - x_0, y - y_0) \quad (1.4)$$

wraz z podanymi powyżej warunkami brzegowymi. Dla prostoty w zapisie pominięto zależność  $G$  od  $(x, y; x_0, y_0)$ .

Problem korzystnie jest zapisać, zamieniając współrzędne kartezjańskie na biegunowe. Równanie przyjmuje wówczas postać

$$\partial_r^2 G + \frac{1}{r} \partial_r G + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 G + k^2 G = \frac{\delta(r - r_0)}{r} \delta(\varphi - \varphi_0), \quad (1.5)$$

gdzie  $G$  jest funkcją zmiennych  $(r, \varphi)$  oraz  $(r_0, \varphi_0)$ , będących odpowiednio biegunową reprezentacją punktów  $(x, y)$  i  $(x_0, y_0)$ . W równaniu (1.5) wykorzystano reprezentację biegunową dwuwymiarowej delty Diraca. Warunki brzegowe przyjmują postać

$$G(r, 0; r_0, \varphi_0) = G(r, 2\pi; r_0, \varphi_0) = 0$$

$$G(r, \varphi; r_0, \varphi_0) = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \rightarrow \infty$$

$$\partial_r G(r, \varphi; r_0, \varphi_0) - ikG(r, \varphi; r_0, \varphi_0) = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \rightarrow \infty$$

jednorodnie ze względu na  $\varphi$ .

Przyjmijmy, że rozwiązanie  $G$  powyższego problemu istnieje. Ponieważ  $G$  jest co najmniej funkcją ciągłą, można ją rozwinąć w szereg Fouriera

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r, r_0, \varphi_0) \sin \frac{n\varphi}{2} \quad (1.6)$$

zbieżny prawie wszędzie.



Przyjmując, że szereg można różniczkować i całkować wyraz po wyrazie, możemy znaleźć równanie spełniane przez  $a_n(r, r_0, \varphi_0)$ . Wstawiając powyższy szereg do (1.5), wykonując różniczkowania, po uporządkowaniu dostajemy

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left[ a_l'' + \frac{1}{r} a_l' + \left( k^2 - \frac{l^2}{4r^2} \right) a_l \right] \sin \frac{l\varphi}{2} = \frac{\delta(r - r_0)}{r} \delta(\varphi - \varphi_0), \quad (1.7)$$

gdzie prim oznacza różniczkowanie względem zmiennej  $r$ . Mając na uwadze

$$\int_0^{2\pi} \sin \frac{n\varphi}{2} \sin \frac{m\varphi}{2} d\varphi = \pi(\delta_{m,n} - \delta_{m,-n}),$$

mnożymy równanie (1.7) przez  $\sin \frac{n\varphi}{2}$  i całkujemy w granicach od 0 do  $2\pi$ . Otrzymujemy wtedy

$$a_n'' + \frac{1}{r} a_n' + \left( k^2 - \frac{n^2}{4r^2} \right) a_n = \sin \frac{n\varphi_0}{2} \frac{\delta(r - r_0)}{\pi r}. \quad (1.8)$$

Rozwiążemy powyższe równanie z warunkiem zerowania się w zerze i warunkiem Sommerfelda w nieskończoności. Jeżeli  $y$  spełnia równanie niejednorodne  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ , można ją wyrazić poprzez dwa liniowo niezależne rozwiązania równania jednorodnego  $y_1, y_2$  w następujący sposób [2]:

$$y(x) = \left( A - \int^x \frac{y_2(x')f(x')}{W(y_1, y_2; x')} dx' \right) y_1(x) + \left( B + \int^x \frac{y_1(x')f(x')}{W(y_1, y_2; x')} dx' \right) y_2(x), \quad (1.9)$$

gdzie  $A, B$  są stałymi wynikającymi z warunków brzegowych.

Wzór (1.9) wykorzystamy do rozwiązania równania (1.8). Widzimy, że należy przyjąć

$$f(r) = \sin \frac{n\varphi_0}{2} \frac{\delta(r - r_0)}{\pi r}. \quad (1.10)$$

Zatem granice całkowania we wzorze (1.9) można dobrać tak, aby dla  $r \neq r_0$  co najmniej jedna całka była równa zero. Zatem

$$a_n = \left( A + \int_r^{\infty} \frac{y_2(r')f(r')}{W(y_1, y_2; r')} dr' \right) y_1(r) + \left( B + \int_0^r \frac{y_1(r')f(r')}{W(y_1, y_2; r')} dr' \right) y_2(r). \quad (1.11)$$

Niech  $y_1$  i  $y_2$  spełniają odpowiednio warunek zerowania się w zerze i warunek Sommerfelda w nieskończoności. Wówczas

$$a_n(0) = B y_2(0).$$

Jeżeli  $y_2(0) \neq 0$ , warunki brzegowe wymagają  $B = 0$  (gdy  $y_2(0) = 0$  rozwiązanie problemu jest niejednoznaczne). Ponadto dla  $r > r_0$ :

$$a_n = Ay_1(r) + Cy_2(r),$$

gdzie  $C$  jest stałą niezależną od  $r$ . Więc, o ile  $y_1$  nie spełnia warunków Sommerfelda w nieskończoności, musi zachodzić  $A = 0$ . Ostatecznie, współczynnik  $a_n$  możemy wyrazić wzorem

$$a_n = y_1(r) \int_r^\infty \frac{y_2(r')f(r')}{W(y_1, y_2; r')} dr' + y_2(r) \int_0^r \frac{y_1(r')f(r')}{W(y_1, y_2; r')} dr'. \quad (1.12)$$

Równanie (1.8) jest uogólnioną postacią równania Bessela, a podstawienie  $z = kr$  sprowadza je do równania (A.5). Zatem, aby znaleźć rozwiązanie, możemy wziąć  $y_1(r) = J_{n/2}(kr)$ ,  $y_2(r) = H_{n/2}^{(1)}(kr)$ . Wiemy, że funkcja Hankela  $H_{n/2}^{(1)}$  spełnia warunek Sommerfelda, natomiast  $J_{n/2}$  zeruje się w zerze (patrz Dodatek A), zatem  $y_1$  i  $y_2$  spełniają odpowiednio warunek zerowania w zerze i warunek Sommerfelda w nieskończoności.

Korzystając ze wzoru (1.12) otrzymujemy

$$a_n(r, r_0, \varphi_0) = \begin{cases} J_{n/2}(kr) \frac{H_{n/2}^{(1)}(kr_0)}{W(y_1, y_2; r_0)} \frac{1}{\pi r_0} \sin \frac{n\varphi_0}{2} & \text{dla } r < r_0, \\ H_{n/2}^{(1)}(kr) \frac{J_{n/2}(kr_0)}{W(y_1, y_2; r_0)} \frac{1}{\pi r_0} \sin \frac{n\varphi_0}{2} & \text{dla } r > r_0. \end{cases} \quad (1.13)$$

Wiedząc, że

$$W(J_{n/2}, H_{n/2}^{(1)}; z) = \frac{2i}{\pi z}, \quad (1.14)$$

nietrudno wykazać, iż

$$W(y_1, y_2; r) = \frac{2i}{\pi r}. \quad (1.15)$$

Współczynniki  $a_n$  wyrażają się zatem wzorem

$$a_n(r, r_0, \varphi_0) = \begin{cases} \frac{1}{2i} J_{n/2}(kr) H_{n/2}^{(1)}(kr_0) \sin \frac{n\varphi_0}{2} & \text{dla } r < r_0, \\ \frac{1}{2i} H_{n/2}^{(1)}(kr) J_{n/2}(kr_0) \sin \frac{n\varphi_0}{2} & \text{dla } r > r_0. \end{cases} \quad (1.16)$$

Ostatecznie szukana funkcja Greena przyjmuje postać

$$G(r, \varphi; r_0, \varphi_0) = \frac{1}{2i} \sum_{n=1}^{\infty} J_{n/2}(kr_{<}) H_{n/2}^{(1)}(kr_{>}) \sin \frac{n\varphi_0}{2} \sin \frac{n\varphi}{2}, \quad (1.17)$$

gdzie  $r_{<} = \min\{r, r_0\}$ ,  $r_{>} = \max\{r, r_0\}$ .

## Rozdział 2

# Problem dyfrakcyjny z równaniem Diraca

Równanie Diraca, opublikowane w roku 1928, jest relatywistycznym uogólnieniem równania Schrödingera. Stanowi ono podstawę teorii łączącej ze sobą mechanikę kwantową oraz szczególną teorię względności.

Z formalnego punktu widzenia jest to układ równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu. W przypadku dwuwymiarowym niewiadomą jest wektor  $\psi = (\psi_1, \psi_2)^T$ , a równanie wygląda następująco

$$\left(-i\hbar c\sigma_x\partial_x - i\hbar c\sigma_y\partial_y + mc^2\sigma_z\right)\psi = E\psi, \quad (2.1)$$

gdzie:  $\hbar$  jest stałą Plancka,  $m$  jest stałą oznaczającą masę cząstki,  $c$  jest prędkością światła,  $E$  jest stałą oznaczającą energię. Symbolami  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  oznaczono *macierze Pauliego*

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Równanie (2.1) można uprościć, gdyż bez straty ogólności można wyeliminować stałe fizyczne:

$$(-i\sigma_x\partial_x - i\sigma_y\partial_y + m\sigma_z)\psi = E\psi. \quad (2.2)$$

Aby pokazać związki między rozwiązaniami równania (2.1) a rozwiązaniami równania (2.2), udowodnimy dwa lematy.

**Lemat 2.1** Niech  $\psi_m(x, y)$  oznacza rozwiązanie równania

$$(-i\sigma_x\partial_x - i\sigma_y\partial_y + m\sigma_z - E)\psi = f(\hbar cx, \hbar cy) \quad (2.3)$$

dla  $m \in \mathbb{R}$ . Wówczas  $\psi_{mc^2}(\frac{x}{\hbar c}, \frac{y}{\hbar c})$  jest rozwiązaniem równania

$$(-i\hbar c\sigma_x\partial_x - i\hbar c\sigma_y\partial_y + mc^2\sigma_z - E)\psi = f(x, y). \quad (2.4)$$

**Dowód.**

$$\begin{aligned} & (-i\hbar c\sigma_x\partial_x - i\hbar c\sigma_y\partial_y + mc^2\sigma_z - E\psi)\psi_{mc^2}\left(\frac{x}{\hbar c}, \frac{y}{\hbar c}\right) \\ &= (-i\hbar c\sigma_x\partial_x - i\hbar c\sigma_y\partial_y)\psi_{mc^2}\left(\frac{x}{\hbar c}, \frac{y}{\hbar c}\right) + (mc^2\sigma_z - E)\psi_{mc^2}\left(\frac{x}{\hbar c}, \frac{y}{\hbar c}\right) \\ &= -i\sigma_x\partial_1\psi_{mc^2}\left(\frac{x}{\hbar c}, \frac{y}{\hbar c}\right) - i\sigma_y\partial_2\psi_{mc^2}\left(\frac{x}{\hbar c}, \frac{y}{\hbar c}\right) + (mc^2\sigma_z - E\psi)\psi_{mc^2}\left(\frac{x}{\hbar c}, \frac{y}{\hbar c}\right) \\ &= f(x, y). \end{aligned}$$

□

**Lemat 2.2** Jeżeli  $G_m(x, y; x_0, y_0)$  jest funkcją Greena równania (2.2) dla  $m \in \mathbb{R}$ , to  $\frac{1}{\hbar^2 c^2} G_{mc^2}\left(\frac{x}{\hbar c}, \frac{y}{\hbar c}; \frac{x_0}{\hbar c}, \frac{y_0}{\hbar c}\right)$  jest funkcją Greena równania (2.1).

**Dowód.**  $G_m(x, y; x_0, y_0)$  jest funkcją Greena, zatem dla każdego  $m \in \mathbb{R}$  spełnia równanie

$$(-i\sigma_x\partial_x - i\sigma_y\partial_y + m\sigma_z - E)G_m(x, y; x_0, y_0) = \delta^{(2)}(x - x_0, y - y_0).$$

Na podstawie Lematu 2.2 i własności delty Diraca zachodzi

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\hbar^2 c^2} (-i\hbar c\sigma_x\partial_x - i\hbar c\sigma_y\partial_y + mc^2\sigma_z - E)G_{mc^2}\left(\frac{x}{\hbar c}, \frac{y}{\hbar c}; \frac{x_0}{\hbar c}, \frac{y_0}{\hbar c}\right) \\ &= \frac{1}{\hbar^2 c^2} \delta^{(2)}\left(\frac{x - x_0}{\hbar c}, \frac{y - y_0}{\hbar c}\right) = \delta^{(2)}(x - x_0, y - y_0). \end{aligned}$$

□

W dalszym ciągu będziemy więc poszukiwać funkcji Greena równania

$$\begin{pmatrix} m - E & -i\partial_x - \partial_y \\ -i\partial_x + \partial_y & -m - E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (2.5)$$

które jest macierzowym zapisem (2.2). Zajmiemy się problemem analogicznym do postawionego w Rozdziale 1. Na rozwiązanie  $\psi = (\psi_1, \psi_2)^T$  równania Diraca nałożymy następujące warunki brzegowe w nieskończoności:

$$\alpha_+ \psi_1 - \epsilon \beta_+ \psi_2 = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad (2.6)$$

gdzie  $r$  jest odległością od początku układu współrzędnych, natomiast

$$\epsilon = \sqrt{\frac{E-m}{E+m}}, \quad \alpha_+ = \beta_+(\sigma_x \cos \varphi + \sigma_y \sin \varphi), \quad \beta_+ = \frac{1}{2}(\sigma_z + I), \quad (2.7)$$

gdzie  $\varphi$  jest współrzędną kątową w układzie biegunowym. Warunki te są fizycznym odpowiednikiem skalarnych warunków Sommerfelda [7]. Będziemy je dalej nazywać wektorowymi warunkami Sommerfelda.

Znajdziemy funkcję Greena dla następującego zagadnienia

$$\begin{pmatrix} m-E & -i\partial_x - \partial_y \\ -i\partial_x + \partial_y & -m-E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = 0, \quad \psi_1, \psi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \quad (2.8a)$$

$$\psi_1(x, y) = 0 \text{ dla } y = 0, x \geq 0, \quad (2.8b)$$

$$(\psi_1, \psi_2)^T \text{ spełnia wektorowy warunek Sommerfelda.} \quad (2.8c)$$

Rozwiązaniem problemu jest funkcja macierzowa

$$G(x, y; x_0, y_0) = \begin{pmatrix} G_{11}(x, y; x_0, y_0) & G_{12}(x, y; x_0, y_0) \\ G_{21}(x, y; x_0, y_0) & G_{22}(x, y; x_0, y_0) \end{pmatrix},$$

spełniająca

$$\begin{pmatrix} m-E & -i\partial_x - \partial_y \\ -i\partial_x + \partial_y & -m-E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta^{(2)}(x-x_0, y-y_0), \quad (2.9)$$

wraz z powyższymi warunkami brzegowymi nałożonymi na każdą z kolumn osobno.

W rozwiązaniu zagadnienia przydatny będzie następujący

**Lemat 2.3** *Jeżeli  $\psi_1, \psi_2 \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ , wówczas*

$$\begin{aligned} & - \begin{pmatrix} m+E & -i\partial_x - \partial_y \\ -i\partial_x + \partial_y & -m+E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m-E & -i\partial_x - \partial_y \\ -i\partial_x + \partial_y & -m-E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} \nabla^2 + k^2 & 0 \\ 0 & \nabla^2 + k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (2.10) \end{aligned}$$

gdzie  $k^2 = E^2 - m^2$ .

**Dowód.** Wykonując mnożenie, dostajemy

$$\begin{aligned}
& - \begin{pmatrix} m + E & -i\partial_x - \partial_y \\ -i\partial_x + \partial_y & -m + E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m - E & -i\partial_x - \partial_y \\ -i\partial_x + \partial_y & -m - E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \\
& = - \begin{pmatrix} m + E & -i\partial_x - \partial_y \\ -i\partial_x + \partial_y & -m + E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (m - E)\psi_1 - i\partial_x\psi_2 - \partial_y\psi_2 \\ -i\partial_x\psi_1 + \partial_y\psi_1 - (m + E)\psi_2 \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} \nabla^2\psi_1 + k^2\psi_1 + i\partial_x\partial_y\psi_1 - i\partial_y\partial_x\psi_1 \\ \nabla^2\psi_2 + k^2\psi_2 - i\partial_x\partial_y\psi_2 + i\partial_y\partial_x\psi_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Jeżeli zastosujemy twierdzenie Schwarzera, to pochodne mieszane zredukują się i dostaniemy tezę lematu.  $\square$

Równanie Diraca (2.9) możemy zapisać we współrzędnych biegunowych  $(r, \varphi)$ :

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} m - E & -ie^{-i\varphi}\partial_r - \frac{e^{-i\varphi}}{r}\partial_\varphi \\ -ie^{i\varphi}\partial_r + \frac{e^{i\varphi}}{r}\partial_\varphi & -m - E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\delta(r - r_0)}{r} \delta(\varphi - \varphi_0). \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Wracając do warunków brzegowych, zauważmy, że posługując się postaciami macierzy  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ , wektorowy warunek Sommerfelda można zapisać następująco:

$$-\epsilon\psi_1 + e^{-i\varphi}\psi_2 = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right). \quad (2.12)$$

Biegunowa postać równania Diraca pozwala nam sformułować warunki, które muszą być nałożone na poszczególne składowe

$$ik\psi_1 - \partial_r\psi_1 + \frac{1}{r}\partial_\varphi\psi_1 = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad (2.13)$$

$$ik\psi_2 - \partial_r\psi_2 + \frac{1}{r}\partial_\varphi\psi_2 = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right). \quad (2.14)$$

Ponieważ poszukiwać będziemy rozwiązań postaci  $\sum f(r)g(\varphi)$ , warunkiem koniecznym jest, aby funkcja  $f(r)$  spełniała skalarny warunek Sommerfelda. Tego też będziemy żądać, poszukując rozwiązania.

Wpierw zajmiemy się poszukiwaniem składowych  $G_{11}$  i  $G_{21}$ . Jeżeli podziałamy na obie strony równania (2.11) operatorem

$$-\begin{pmatrix} m + E & -ie^{-i\varphi}\partial_r - \frac{e^{-i\varphi}}{r}\partial_\varphi \\ -ie^{i\varphi}\partial_r + \frac{e^{i\varphi}}{r}\partial_\varphi & -m + E \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

pierwsza kolumna prawej strony równania przyjmie postać

$$\begin{pmatrix} -(m + E)\frac{\delta(r - r_0)}{r}\delta(\varphi - \varphi_0) \\ ie^{i\varphi}\left[\frac{\delta'(r - r_0)}{r} - \frac{\delta(r - r_0)}{r^2}\right]\delta(\varphi - \varphi_0) - e^{i\varphi}\frac{\delta(r - r_0)}{r^2}\delta'(\varphi - \varphi_0) \end{pmatrix}.$$

Zatem  $G_{11}$  musi spełniać równanie

$$(\nabla^2 + k^2)G_{11} = -(m + E)\frac{\delta(r - r_0)}{r}\delta(\varphi - \varphi_0). \quad (2.16)$$

Jest ona zatem rozwiązaniem problemu z Rozdziału 1 i wyraża się następującym wzorem:

$$G_{11} = -\frac{m + E}{2i} \sum_{n=1}^{\infty} J_{n/2}(kr_{<})H_{n/2}^{(1)}(kr_{>}) \sin \frac{n\varphi_0}{2} \sin \frac{n\varphi}{2}. \quad (2.17)$$

Posługując się wzorami Eulera, możemy napisać

$$G_{11} = \frac{m + E}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{|n|/2}(kr_{<})H_{|n|/2}^{(1)}(kr_{>}) \sin \frac{n\varphi_0}{2} e^{in\varphi/2}. \quad (2.18)$$

Następnie, posługując się równaniem Diraca (2.11), możemy wyliczyć  $G_{21}$ . Dla  $r < r_0$  mamy

$$G_{21} = \frac{ik}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ -J'_{|n|/2}(kr) + \frac{1}{kr} \frac{n}{2} J_{|n|/2}(kr) \right] H_{|n|/2}^{(1)}(kr_0) \sin \frac{n\varphi_0}{2} e^{i(n+2)\varphi/2}, \quad (2.19)$$

natomiast dla  $r > r_0$ :

$$G_{21} = \frac{ik}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ -H'_{|n|/2}^{(1)}(kr) + \frac{1}{kr} \frac{n}{2} H_{|n|/2}^{(1)}(kr) \right] J_{|n|/2}(kr_0) \sin \frac{n\varphi_0}{2} e^{i(n+2)\varphi/2}. \quad (2.20)$$



Stosując relację (A.10) dla  $n > 0$  oraz relację (A.11) dla  $n < 0$ , otrzymujemy rozwiązanie

$$G_{21} = \frac{ik}{4} \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ J_{(n+2)/2}(kr) e^{i(n+2)\varphi/2} + J_{(n-2)/2}(kr) e^{-i(n-2)\varphi/2} \right] \\ \quad \times H_{n/2}^{(1)}(kr_0) \sin \frac{n\varphi_0}{2} & \text{dla } r < r_0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ H_{(n+2)/2}^{(1)}(kr) e^{i(n+2)\varphi/2} + H_{(n-2)/2}^{(1)}(kr) e^{-i(n-2)\varphi/2} \right] \\ \quad \times J_{n/2}(kr_0) \sin \frac{n\varphi_0}{2} & \text{dla } r > r_0. \end{cases} \quad (2.21)$$

Wyliczymy teraz składowe  $G_{12}$  i  $G_{22}$ . W tym celu zauważmy, że jeżeli podzielimy na obie strony równania (2.11) operatorem (2.15), to druga kolumna prawej strony równania przyjmie postać

$$\begin{pmatrix} ie^{-i\varphi} \left[ \frac{\delta'(r-r_0)}{r} - \frac{\delta(r-r_0)}{r^2} \right] \delta(\varphi - \varphi_0) + \frac{e^{-i\varphi}}{r^2} \delta(r-r_0) \delta'(\varphi - \varphi_0) \\ -(E-m) \frac{\delta(r-r_0)}{r} \delta(\varphi - \varphi_0) \end{pmatrix}.$$

Zatem  $G_{12}$  musi spełniać równanie

$$(\nabla^2 + k^2)G_{12} = ie^{-i\varphi} \left[ \frac{\delta'(r-r_0)}{r} - \frac{\delta(r-r_0)}{r^2} \right] \delta(\varphi - \varphi_0) + \frac{e^{-i\varphi}}{r^2} \delta(r-r_0) \delta'(\varphi - \varphi_0). \quad (2.22)$$

Podobnie jak w Rozdziale 1, będziemy szukać rozwiązania postaci

$$G_{12}(r, \varphi; r_0, \varphi_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r, r_0, \varphi_0) \sin \frac{n\varphi}{2}; \quad (2.23)$$

w dalszym ciągu, dla prostoty zapisu, pominiemy zależność współczynników  $a_n$  od  $(r, r_0, \varphi_0)$ . Zauważmy, że  $G_{12}$  takiej postaci automatycznie spełnia warunek zerowania się na półprostej. Jeżeli założymy, że powyższe wyrażenie można różniczkować wyraz po wyrazie, to równanie (2.22) przyjmie postać

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n'' + \frac{1}{r} a_n' + \left( k^2 - \frac{n^2}{4r^2} \right) a_n \right] \sin \frac{n\varphi}{2} \\ & = ie^{-i\varphi} \left[ \frac{\delta'(r-r_0)}{r} - \frac{\delta(r-r_0)}{r^2} \right] \delta(\varphi - \varphi_0) + \frac{e^{-i\varphi}}{r^2} \delta(r-r_0) \delta'(\varphi - \varphi_0), \end{aligned} \quad (2.24)$$

gdzie prim po lewej stronie oznacza różniczkowanie względem zmiennej  $r$ . Jeżeli pomnożymy powyższe równanie przez  $\sin \frac{\hat{n}\varphi}{2}$  i scałkujemy w granicach  $[0, 2\pi]$ , to (po zamianie  $\hat{n}$  na  $n$ ) otrzymamy

$$\pi \left[ a_n'' + \frac{1}{r} a_n' + \left( k^2 - \frac{n^2}{4r^2} \right) a_n \right] = i \frac{\delta'(r - r_0)}{r} e^{-i\varphi_0} \sin \frac{n\varphi_0}{2} - \frac{n}{2r^2} \delta(r - r_0) e^{-i\varphi_0} \cos \frac{n\varphi_0}{2}. \quad (2.25)$$

Aby znaleźć  $a_n$ , wykorzystamy wzór (1.12). Wiedząc, że  $a_n$  musi być skończone w zerze oraz powinno spełniać warunek Sommerfelda w nieskończoności, podobnie jak w Rozdziale 1 przyjmujemy  $y_1(r) = J_{n/2}(kr)$ ,  $y_2(r) = H_{n/2}^{(1)}(kr)$ . Natomiast z (2.25) wynika, że we wzorze (1.12) musimy przyjąć

$$f(r) = \frac{1}{\pi} \left[ i \frac{\delta'(r - r_0)}{r} e^{-i\varphi_0} \sin \frac{n\varphi_0}{2} - \frac{n}{2r^2} \delta(r - r_0) e^{-i\varphi_0} \cos \frac{n\varphi_0}{2} \right].$$

Po zastosowaniu wzorów Eulera dostajemy:

$$f(r) = \frac{e^{-i\varphi_0}}{2\pi} \left[ \left( \frac{\delta'(r - r_0)}{r} - \frac{n}{2} \frac{\delta(r - r_0)}{r^2} \right) e^{in\varphi_0/2} - \left( \frac{\delta'(r - r_0)}{r} + \frac{n}{2} \frac{\delta(r - r_0)}{r^2} \right) e^{-in\varphi_0/2} \right].$$

Otrzymujemy stąd, że dla  $r < r_0$ :

$$a_n = \frac{k}{4i} J_{n/2}(kr) \left[ e^{i(n-2)\varphi_0/2} \left( -H_{n/2}^{(1)}(kr_0) - \frac{1}{kr_0} \frac{n}{2} H_{n/2}^{(1)}(kr_0) \right) - e^{-i(n+2)\varphi_0/2} \left( -H_{n/2}^{(1)}(kr_0) + \frac{1}{kr_0} \frac{n}{2} H_{n/2}^{(1)}(kr_0) \right) \right], \quad (2.26)$$

natomiast dla  $r > r_0$ :

$$a_n = \frac{k}{4i} H_{n/2}^{(1)}(kr_0) \left[ e^{i(n-2)\varphi_0/2} \left( -J_{n/2}'(kr_0) - \frac{1}{kr_0} \frac{n}{2} J_{n/2}(kr_0) \right) - e^{-i(n+2)\varphi_0/2} \left( -J_{n/2}'(kr_0) + \frac{1}{kr_0} \frac{n}{2} J_{n/2}(kr_0) \right) \right]. \quad (2.27)$$

Stosując wzory (A.10) oraz (A.11), dostajemy ostatecznie rozwiązanie

$$G_{12} = \frac{ik}{4} \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} [H_{(n+2)/2}^{(1)}(kr_0)e^{-i(n+2)\varphi_0/2} + H_{(n-2)/2}^{(1)}(kr_0)e^{i(n-2)\varphi_0/2}] \\ \quad \times J_{n/2}(kr) \sin \frac{n\varphi}{2} & \text{dla } r < r_0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} [J_{(n+2)/2}(kr_0)e^{-i(n+2)\varphi_0/2} + J_{(n-2)/2}(kr_0)e^{i(n-2)\varphi_0/2}] \\ \quad \times H_{n/2}^{(1)}(kr) \sin \frac{n\varphi}{2} & \text{dla } r > r_0. \end{cases} \quad (2.28)$$

Znajdziemy teraz postać  $G_{22}$ . W tym celu zapiszemy  $G_{12}$  w skróconej formie

$$G_{12} = \frac{ik}{4} \sum_{n=1}^{\infty} b_n Z_{n/2} \sin \frac{n\varphi}{2}, \quad (2.29)$$

gdzie:

$$Z_{n/2} = \begin{cases} J_{n/2}(kr) & \text{dla } r < r_0, \\ H_{n/2}^{(1)}(kr) & \text{dla } r > r_0, \end{cases} \quad (2.30)$$

$$b_n = \begin{cases} H_{(n+2)/2}^{(1)}(kr_0)e^{-i(n+2)\varphi_0/2} + H_{(n-2)/2}^{(1)}(kr_0)e^{i(n-2)\varphi_0/2} & \text{dla } r < r_0, \\ J_{(n+2)/2}(kr_0)e^{-i(n+2)\varphi_0/2} + J_{(n-2)/2}(kr_0)e^{i(n-2)\varphi_0/2} & \text{dla } r > r_0. \end{cases} \quad (2.31)$$

Obliczamy pochodną cząstkową

$$\begin{aligned} \partial_r G_{12} = \\ \frac{ik}{4} \left[ \delta(r - r_0) \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \lim_{r \rightarrow r_0^+} (b_n Z_{n/2}) - \lim_{r \rightarrow r_0^-} (b_n Z_{n/2}) \right] \sin \frac{n\varphi}{2} + k \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tilde{Z}_{n/2} \sin \frac{n\varphi}{2} \right], \end{aligned} \quad (2.32)$$

gdzie

$$\tilde{Z}_{n/2} = \begin{cases} J'_{n/2}(kr) & \text{dla } r < r_0, \\ H'^{(1)}_{n/2}(kr) & \text{dla } r > r_0. \end{cases} \quad (2.33)$$

Mamy

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow r_0^+} (b_n Z_{n/2}) - \lim_{r \rightarrow r_0^-} (b_n Z_{n/2}) \\ &= e^{i(n-2)\varphi_0/2} \left( H_{n/2}^{(1)}(kr_0) J_{(n-2)/2}(kr_0) - J_{n/2}(kr_0) H_{(n-2)/2}^{(1)}(kr_0) \right) \\ &+ e^{-i(n+2)\varphi_0/2} \left( H_{n/2}^{(1)}(kr_0) J_{(n+2)/2}(kr_0) - J_{n/2}(kr_0) H_{(n+2)/2}^{(1)}(kr_0) \right). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Jeżeli skorzystamy z tożsamości (A.16), (A.17), dostaniemy wynik

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow r_0^+} (b_n Z_{n/2}) - \lim_{r \rightarrow r_0^-} (b_n Z_{n/2}) &= -e^{i(n-2)\varphi_0/2} \frac{2i}{\pi k r_0} + e^{-i(n+2)\varphi_0/2} \frac{2i}{\pi k r_0} \\ &= -\frac{2i}{\pi k r_0} e^{-i\varphi_0} (e^{in\varphi_0/2} - e^{-in\varphi_0/2}) = \frac{4}{\pi k r_0} e^{-i\varphi_0} \sin \frac{n\varphi_0}{2}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Wiemy, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\varphi_0}{2} \sin \frac{n\varphi}{2} = \pi \delta(\varphi - \varphi_0), \quad (2.36)$$

zatem

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \lim_{r \rightarrow r_0^+} (b_n Z_{n/2}) - \lim_{r \rightarrow r_0^-} (b_n Z_{n/2}) \right] \sin \frac{n\varphi}{2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi k r_0} e^{-i\varphi_0} \sin \frac{n\varphi_0}{2} \sin \frac{n\varphi}{2} \\ &= \frac{4}{k r_0} e^{-i\varphi_0} \delta(\varphi - \varphi_0), \end{aligned} \quad (2.37)$$

stąd

$$\partial_r G_{12} = \frac{ik}{4} \left[ \delta(r - r_0) \frac{4}{k r_0} e^{-i\varphi_0} \delta(\varphi - \varphi_0) + k \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tilde{Z}_{n/2} \sin \frac{n\varphi}{2} \right]. \quad (2.38)$$

Znajdźmy pochodną cząstkową względem  $\varphi$ :

$$\partial_\varphi G_{12} = \frac{ik}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} b_n Z_{n/2} \cos \frac{n\varphi}{2}, \quad (2.39)$$

zatem

$$\begin{aligned} \left( -ie^{i\varphi} \partial_r + \frac{e^{i\varphi}}{r} \partial_\varphi \right) G_{12} &= \frac{\delta(r - r_0)}{r} \delta(\varphi - \varphi_0) + \frac{k^2}{4} e^{i\varphi} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tilde{Z}_{n/2} \sin \frac{n\varphi}{2} \\ &\quad + \frac{e^{i\varphi}}{r} \frac{ik}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} b_n Z_{n/2} \cos \frac{n\varphi}{2}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Korzystając z równania Diraca, widzimy, że

$$(m + E)G_{22} = \frac{k^2}{4} e^{i\varphi} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tilde{Z}_{n/2} \sin \frac{n\varphi}{2} + \frac{e^{i\varphi}}{r} \frac{ik}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} b_n Z_{n/2} \cos \frac{n\varphi}{2}. \quad (2.41)$$

Korzystając z wzorów Eulera, dostajemy

$$\begin{aligned}
& (m + E)G_{22} \\
&= \frac{k^2}{8i} \left[ e^{i\varphi} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tilde{Z}_{n/2} (e^{in\varphi/2} - e^{-in\varphi/2}) - \frac{e^{i\varphi}}{kr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} b_n Z_{n/2} (e^{in\varphi/2} + e^{-in\varphi/2}) \right] \\
&= \frac{k^2}{8i} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left( \tilde{Z}_{n/2} - \frac{1}{kr} \frac{n}{2} Z_{n/2} \right) e^{i(n+2)\varphi/2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left( -\tilde{Z}_{n/2} - \frac{1}{kr} \frac{n}{2} Z_{n/2} \right) e^{-i(n-2)\varphi/2} \right].
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Na mocy relacji (A.10), (A.11) otrzymujemy ostateczny wynik

$$G_{22} = \frac{m - E}{8i} \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ H_{(n+2)/2}^{(1)}(kr_0) e^{-i(n+2)\varphi_0/2} + H_{(n-2)/2}^{(1)}(kr_0) e^{i(n-2)\varphi_0/2} \right] \\ \quad \times \left[ J_{(n+2)/2}(kr) e^{i(n+2)\varphi/2} + J_{(n-2)/2}(kr) e^{-i(n-2)\varphi/2} \right] & \text{dla } r < r_0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ J_{(n+2)/2}(kr_0) e^{-i(n+2)\varphi_0/2} + J_{(n-2)/2}(kr_0) e^{i(n-2)\varphi_0/2} \right] \\ \quad \times \left[ H_{(n+2)/2}^{(1)}(kr) e^{i(n+2)\varphi/2} + H_{(n-2)/2}^{(1)}(kr) e^{-i(n-2)\varphi/2} \right] & \text{dla } r > r_0. \end{cases} \tag{2.43}$$

Podsumujmy. Jeżeli skorzystamy z Lematu 2.2, macierz Greena dla równania (2.1) przyjmie następującą postać:

$$G_{11} = -\frac{mc^2 + E}{2\hbar^2 c^2 i} \sum_{n=1}^{\infty} J_{n/2}(kr_{<}) H_{n/2}^{(1)}(kr_{>}) \sin \frac{n\varphi_0}{2} \sin \frac{n\varphi}{2}. \tag{2.44}$$

$$G_{21} = \frac{ik}{4\hbar c} \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ J_{(n+2)/2}(kr) e^{i(n+2)\varphi/2} + J_{(n-2)/2}(kr) e^{i(2-n)\varphi/2} \right] \\ \quad \times H_{n/2}^{(1)}(kr_0) \sin \frac{n\varphi_0}{2} & \text{dla } r < r_0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ H_{(n+2)/2}^{(1)}(kr) e^{i(n+2)\varphi/2} + H_{(n-2)/2}^{(1)}(kr) e^{i(2-n)\varphi/2} \right] \\ \quad \times J_{n/2}(kr_0) \sin \frac{n\varphi_0}{2} & \text{dla } r > r_0. \end{cases} \tag{2.45}$$

$$G_{12} = \frac{ik}{4\hbar c} \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ H_{(n+2)/2}^{(1)}(kr_0) e^{-i(n+2)\varphi_0/2} + H_{(n-2)/2}^{(1)}(kr_0) e^{i(n-2)\varphi_0/2} \right] \\ \quad \times J_{n/2}(kr) \sin \frac{n\varphi}{2} & \text{dla } r < r_0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ J_{(n+2)/2}(kr_0) e^{-i(n+2)\varphi_0/2} + J_{(n-2)/2}(kr_0) e^{i(n-2)\varphi_0/2} \right] \\ \quad \times H_{n/2}^{(1)}(kr) \sin \frac{n\varphi}{2} & \text{dla } r > r_0. \end{cases} \tag{2.46}$$

$$G_{22} = \frac{mc^2 - E}{8\hbar^2 c^2 i} \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ H_{(n+2)/2}^{(1)}(kr_0) e^{-i(n+2)\varphi_0/2} + H_{(n-2)/2}^{(1)}(kr_0) e^{i(n-2)\varphi_0/2} \right] \\ \quad \times \left[ J_{(n+2)/2}(kr) e^{i(n+2)\varphi/2} + J_{(n-2)/2}(kr) e^{-i(n-2)\varphi/2} \right] \text{ dla } r < r_0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ J_{(n+2)/2}(kr_0) e^{-i(n+2)\varphi_0/2} + J_{(n-2)/2}(kr_0) e^{i(n-2)\varphi_0/2} \right] \\ \quad \times \left[ H_{(n+2)/2}^{(1)}(kr) e^{i(n+2)\varphi/2} + H_{(n-2)/2}^{(1)}(kr) e^{-i(n-2)\varphi/2} \right] \text{ dla } r > r_0, \end{cases} \quad (2.47)$$

gdzie  $k^2 = (E^2 - m^2 c^4) / \hbar^2 c^2$ .

Wykreślmy poszczególne składowe macierzy Greena dla pewnych wartości parametrów. Stałe fizyczne przyjmiemy  $\hbar = 1$ ,  $c = 1$ . Ponadto weźmiemy  $E = 12$ ,  $m = 1$  (zatem  $k = 11.96$ ),  $x_0 = y_0 = 1$ .

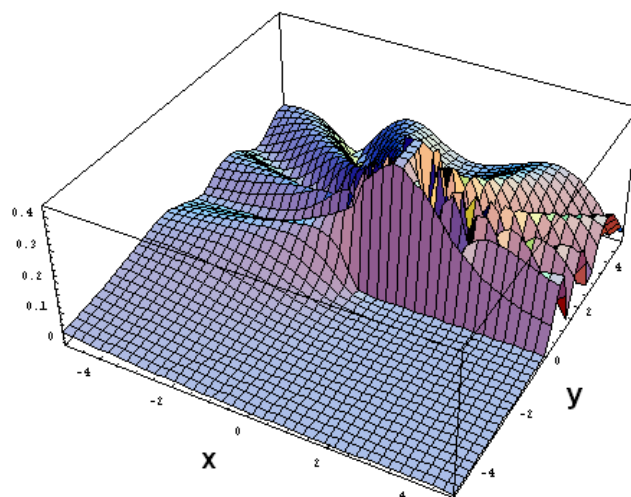
W fizyce definiuje się dla cząstki opisanej wektorem  $(\psi_1, \psi_2)$  gęstość  $\rho$  prawdopodobieństwa znalezienia się w danym punkcie oraz prąd prawdopodobieństwa  $\vec{j} = (j_1, j_2)$ :

$$\rho := |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2, \quad (2.48)$$

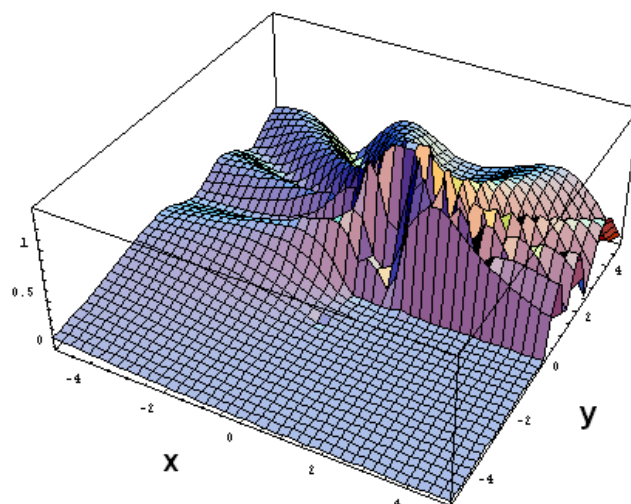
$$j_1 := 2\text{Re}(\psi_1^* \psi_2), \quad (2.49)$$

$$j_2 := 2\text{Im}(\psi_1^* \psi_2). \quad (2.50)$$

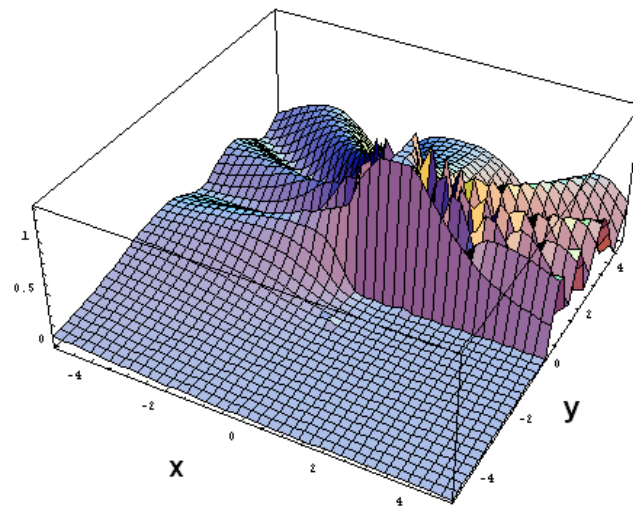
Na Rysunkach: 2.5, 2.6, 2.7, 2.8 wykreślono odpowiednio gęstość i prąd dla pierwszej kolumny macierzy Greena oraz gęstość i prąd dla drugiej kolumny macierzy Greena.



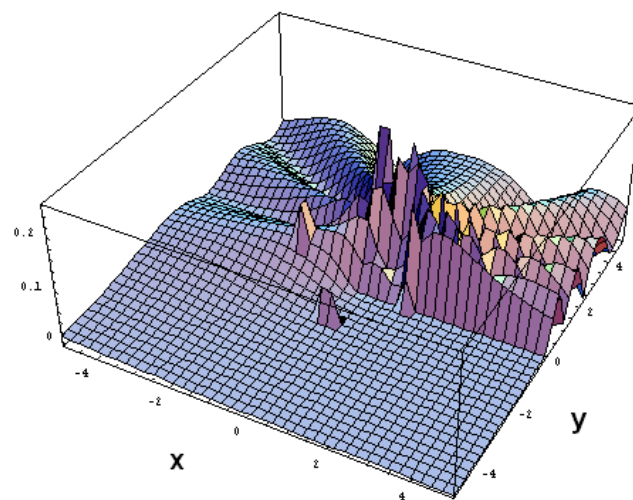
Rysunek 2.1: Moduł składowej  $G_{11}$  macierzy Greena. Do obliczeń wzięto 120 wyrazów szeregu.



Rysunek 2.2: Moduł składowej  $G_{21}$  macierzy Greena. Do obliczeń wzięto 150 wyrazów szeregu.

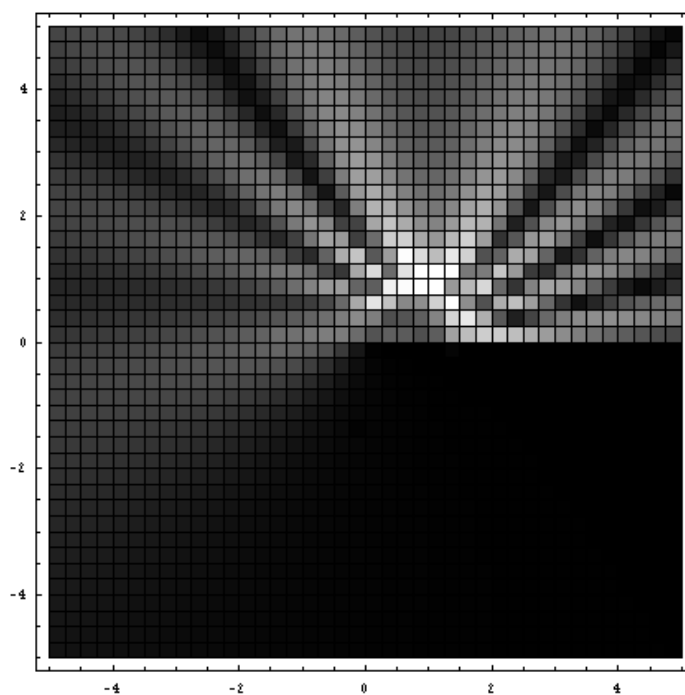


Rysunek 2.3: Moduł składowej  $G_{12}$  macierzy Greena. Do obliczeń wzięto 150 wyrazów szeregu

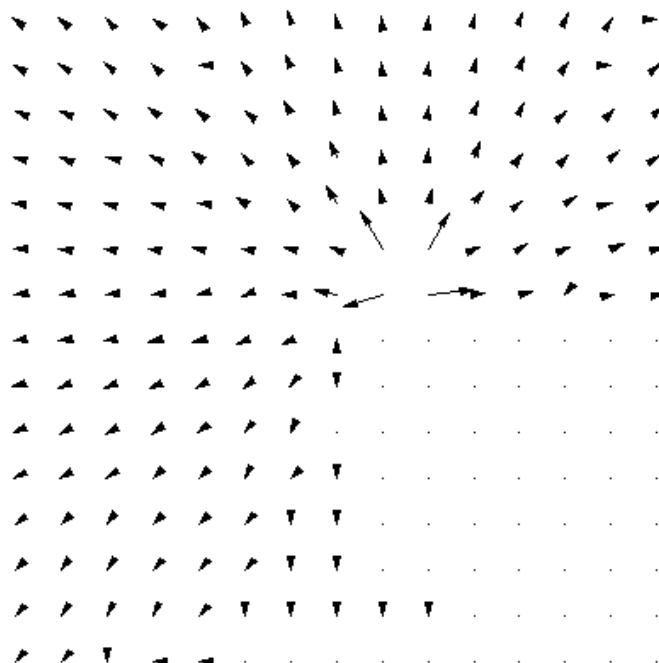


Rysunek 2.4: Moduł składowej  $G_{22}$  macierzy Greena. Do obliczeń wzięto 300 wyrazów szeregu.

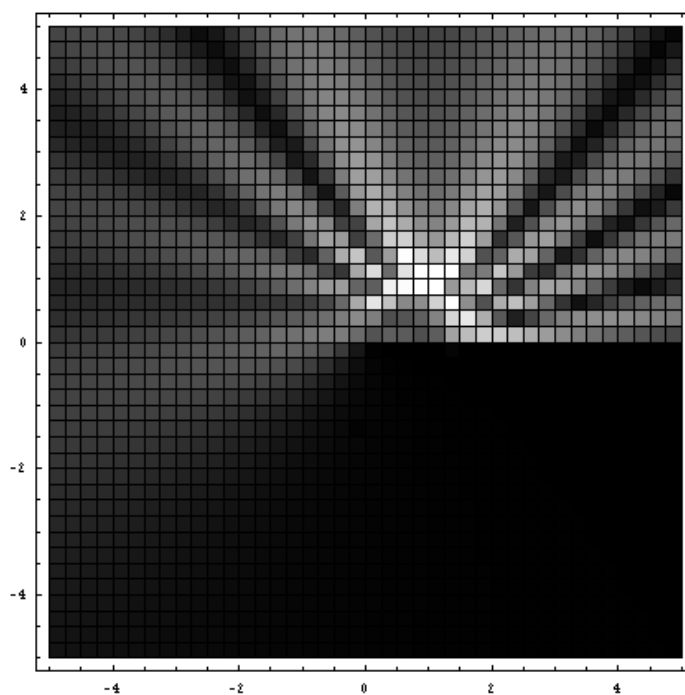




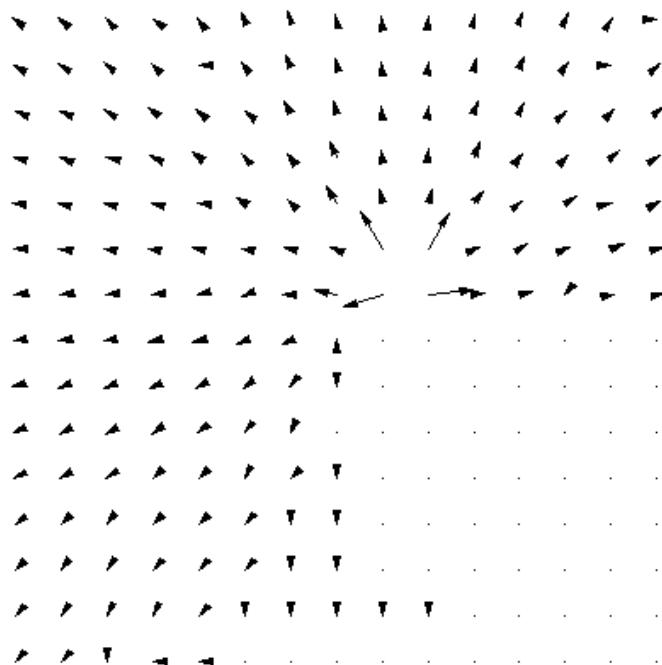
Rysunek 2.5: Gęstość prawdopodobieństwa dla pierwszej kolumny macierzy Greena



Rysunek 2.6: Prąd prawdopodobieństwa dla pierwszej kolumny macierzy Greena



Rysunek 2.7: Gęstość prawdopodobieństwa dla drugiej kolumny macierzy Greena



Rysunek 2.8: Prąd prawdopodobieństwa dla drugiej kolumny macierzy Greena

# Podsumowanie

W niniejszej pracy:

- Znaleziono funkcję Greena dla problemu dyfrakcyjnego z równaniem Helmholtza
- Znaleziono macierz Greena dla problemu dyfrakcyjnego z równaniem Diraca

Możliwym kierunkiem rozwoju tej pracy może być opracowanie alternatywnej metody poszukiwania funkcji Greena, na przykład za pomocą rozwinięcia spektralnego [2]. Ciekawym problemem badawczym mogłoby być również rozważenie równania Diraca z potencjałem i znalezienie macierzy Greena dla tego przypadku.

# Dodatek A

## Funkcje specjalne

Funkcjami specjalnymi nazywamy funkcje pojawiające się przy separacji równań różniczkowych fizyki matematycznej; przykładem są funkcje Bessela, funkcje Legendre'a lub funkcje walca parabolicznego. Jednak często terminem tym określa się szerszą klasę funkcji przydatnych przy rozwiązywaniu równań różniczkowych cząstkowych. W tym dodatku przedstawiono pokrótce definicje i podstawowe własności funkcji specjalnych pojawiających się w niniejszej pracy. Poniższe wzory i zależności można znaleźć w [1].

### A.1 Funkcja gamma

Funkcję gamma definiujemy wzorem

$$\Gamma(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, \dots\}. \quad (\text{A.1})$$

Jest to funkcja meromorficzna z biegunami w punktach  $\{0, -1, -2, \dots\}$ . W przypadku gdy  $\text{Re}(z) > 0$ , można ten wzór zredukować do

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (\text{A.2})$$

## A.2 Funkcje Bessela

Funkcje Bessela to funkcje specjalne pojawiające się m.in. przy separacji równania Helmholtza we współrzędnych cylindrycznych lub biegunowych. Funkcję  $J_\nu$ , zdefiniowaną wzorem

$$J_\nu(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}, \quad (\text{A.3})$$

nazywamy funkcją Bessela pierwszego rodzaju rzędu  $\nu$ . Określa się również funkcje Bessela drugiego rodzaju:

$$Y_\nu(z) := \lim_{\alpha \rightarrow \nu} \frac{J_\alpha(z) \cos \pi \alpha - J_{-\alpha}(z)}{\sin \pi \alpha}. \quad (\text{A.4})$$

Obie powyższe funkcje są liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania Bessela

$$z^2 y''(z) + zy'(z) + (z^2 - \nu^2) y(z) = 0, \quad (\text{A.5})$$

a ich wrońskian wynosi

$$W(J_\nu, Y_\nu; z) = \frac{2}{\pi z}. \quad (\text{A.6})$$

Łatwo zauważyć, że  $J_\nu$  i  $J_{-\nu}$  są również parą rozwiązań równania Bessela. Dla  $\nu$  całkowitych są one zależne liniowo

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z). \quad (\text{A.7})$$

Natomiast dla rzędów połówkowych zależne liniowo są funkcje  $J_{-\nu}$  i  $Y_\nu$ :

$$Y_{n+\frac{1}{2}}(z) = (-1)^n J_{-n-\frac{1}{2}}(z). \quad (\text{A.8})$$

Jeżeli symbolem  $Z_\nu$  oznaczymy kombinację liniową funkcji Bessela pierwszego i drugiego rodzaju (stałe  $A$  i  $B$  są niezależne od  $\nu$ ):

$$Z_\nu(z) = AJ_\nu(z) + BY_\nu(z), \quad A, B \in \mathbb{C}, \quad (\text{A.9})$$

wtedy  $Z_\nu$  spełniają następujące zależności:

$$zZ'_\nu(z) = \nu Z_\nu(z) - zZ_{\nu+1}(z), \quad (\text{A.10})$$

$$zZ'_\nu(z) = -\nu Z_\nu(z) + zZ_{\nu-1}(z). \quad (\text{A.11})$$

Stąd łatwo można wyprowadzić trójwyrazową zależność rekurencyjną

$$2\nu Z_\nu(z) - zZ_{\nu-1}(z) - zZ_{\nu+1}(z) = 0, \quad (\text{A.12})$$

a także prosty wzór określający pochodną

$$Z'_\nu(z) = Z_{\nu-1}(z) - Z_{\nu+1}(z). \quad (\text{A.13})$$

Zależności (A.10) i (A.11) dają się również zapisać w postaci całkowej:

$$\int z^{-\nu} Z_\nu(z) dz = -z^{-\nu} Z_{\nu+1}(z) + \text{const}, \quad (\text{A.14})$$

$$\int z^\nu Z_\nu(z) dz = z^\nu Z_{\nu-1}(z) + \text{const}. \quad (\text{A.15})$$

Łatwo zauważyć także, że stosując relacje (A.10), (A.11) oraz wzór (A.6) otrzymujemy:

$$J_\nu(z)Y_{\nu+1}(z) - J_{\nu+1}(z)Y_\nu(z) = -\frac{2}{\pi z}, \quad (\text{A.16})$$

$$J_\nu(z)Y_{\nu-1}(z) - J_{\nu-1}(z)Y_\nu(z) = \frac{2}{\pi z}. \quad (\text{A.17})$$

Czasem wygodnie jest posłużyć się innym zestawem rozwiązań równania (A.5). Dlatego definiuje się funkcje:

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z), \quad (\text{A.18})$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z), \quad (\text{A.19})$$

zwane funkcjami Hankela. Istotną własnością funkcji  $H_\nu^{(1)}$  jest to, że spełnia ona warunek Sommerfelda ze stałą  $k = 1$ . Mianowicie:

$$H_\nu^{(1)}(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \quad x \rightarrow \infty, \quad (\text{A.20})$$

$$\partial_x H_\nu^{(1)}(x) - iH_\nu^{(1)}(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \quad x \rightarrow \infty. \quad (\text{A.21})$$

Ponadto zachodzą relacje

$$J_\nu(z)H_{\nu+1}^{(1)}(z) - J_{\nu+1}(z)H_\nu^{(1)}(z) = -\frac{2i}{\pi z}, \quad (\text{A.22})$$

$$J_\nu(z)H_{\nu-1}^{(1)}(z) - J_{\nu-1}(z)H_\nu^{(1)}(z) = \frac{2i}{\pi z}, \quad (\text{A.23})$$

które można łatwo wyprowadzić posługując się wzorami (??), (??).

# Bibliografia

- [1] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover, New York, 1972
- [2] H. Feshbach, P. M. Morse, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, New York, 1953
- [3] A. Sommerfeld, *Mathematical Theory of Diffraction*, Birkhäuser, Boston, 2003
- [4] H. Lamb, *On Sommerfeld's diffraction problem; and on reflection by a parabolic mirror*, Proc. Lond. Math. Soc. 4 (1907) 190–203
- [5] Y. Z. Umul, *Closed form series solution of the diffraction problem of plane waves by impedance half-plane*, J. Opt. A: Pure Appl. Opt. 11 (2009) 1–7
- [6] P. Ufimtsev, *Fundamentals of the physical theory of diffraction*, John Wiley Sons, Nowy Jork, 2007
- [7] R. Szmytkowski, *Zero-range potentials for Dirac particles: Scattering and related continuum problems*, Phys. Rev. A 71 (2005) 1–19
- [8] A. H. Cook, *On separable solutions of Dirac's equation for the electron*, Proc. R. Soc. Lond. A 383 (1982) 247–278