

Spotkania z matematyką

nr 5

9 listopada 2023

Przedostatnia cyfra

Przedostatnia cyfra największej znanej liczby pierwszej, tj. $2^{82589933} - 1$.

Kwadrat magiczny stopnia czwartego

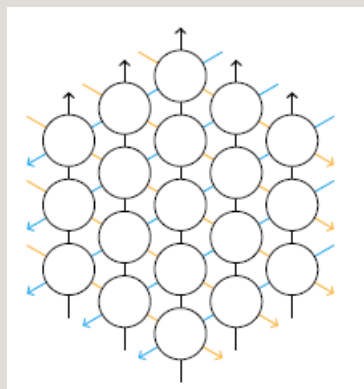
Ile wynosi suma główna w kwadracie magicznym stopnia czwartego?

Kwadrat magiczny z rysunku Dürera



Zadanie 7 z części korespondencyjnej XIX OMJ – sprostowanie

Czy w pola diagramu przedstawionego na rysunku poniżej

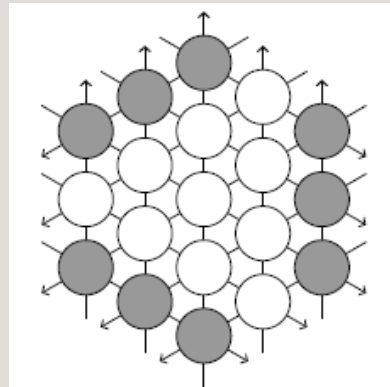


można wpisać liczby całkowite od 11 do 29, każdą dokładnie raz, w taki sposób aby sumy liczb na wszystkich piętnastu odcinkach oznaczonych strzałkami były równe? Odpowiedź uzasadnij.

Sprostowanie – ciąg dalszy

Gdyby możliwe było wpisanie liczb od 11 do 29 spełniające warunki zadania, to:

- każda z piętnastu sum wynosiłaby $((11 + 29)/2 \cdot 19)/5 = 76$,
- (pomysł organizatorów OMJ) spójrzmy na dziewięć pól przedstawionych na poniższym rysunku:



są to wszystkie pola położone na rozłącznych trzech odcinkach, więc suma wpisanych w nie liczb jest równa $3 \cdot 76 = 228$. Z drugiej strony, suma dziewięciu liczb wpisanych w pola diagramu nie może być większa niż suma dziewięciu największych dostępnych liczb, czyli $21 + 22 + 23 + \dots + 29 = 225$.

Otrzymaliśmy sprzeczność, która oznacza, że wpisanie liczb zgodnie z warunkami zadania jest niemożliwe.

Zadania dodatkowe

- Znajdź wszystkie rozwiązania w liczbach całkowitych równania $y^2 - 1 = 2^x$.
- Węgiel kamienny w kopalni zawiera około 2% wody. Po wydobyciu na powierzchnię węgiel chłonie wodę aż do zawartości 13%. O ile procent zwiększy się ciężar węgla na powietrzu?

XVII OMJ

Niech $n \geq 1$ będzie liczbą naturalną. Wykaż, że istnieje liczba całkowita, która jest większa od $\sqrt{2n}$ oraz mniejsza od $\sqrt{5n}$.

- Pierwsze próby dla $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
- $\sqrt{5n} - \sqrt{2n} = (\sqrt{5} - \sqrt{2})\sqrt{n} \approx 0,82185\sqrt{n}$; to wyrażenie dla $n = 1$ wynosi około 0,82185, dla $n = 2$ wynosi około 1,16, dla $n = 3$ ma wartość około 1,42. Zauważamy, że wartości $\sqrt{5n} - \sqrt{2n}$ rosną, a dla $n \geq 2$ te wartości są większe od 1. Teraz popatrzmy na nasze zagadnienie inaczej, w przedziale $(\sqrt{2n}, \sqrt{5n})$ jest zawsze liczba całkowita - dla $n = 1$ mamy $2 \in (\sqrt{2}, \sqrt{5})$, dla $n = 2$, mamy $3 \in (\sqrt{4}, \sqrt{10})$ itd.
- Na konkursach nie wystarczy napisać itd., więc zobaczymy, co wynika z $b - a > 1$: bierzemy $[a] + 1$, gdzie $[a]$ oznacza część całkowitą liczby a ; wtedy $b > a + 1 \geq [a] + 1$. Zatem liczba $[a] + 1$ należy do przedziału (a, b) .

Część całkowita (podłoga, entier)

Przyporządkowanie (funkcja), które każdej liczbie rzeczywistej x przypisuje największą liczbę całkowitą, nieprzekraczającą x (oznaczenie $[x]$).

Na przykład:

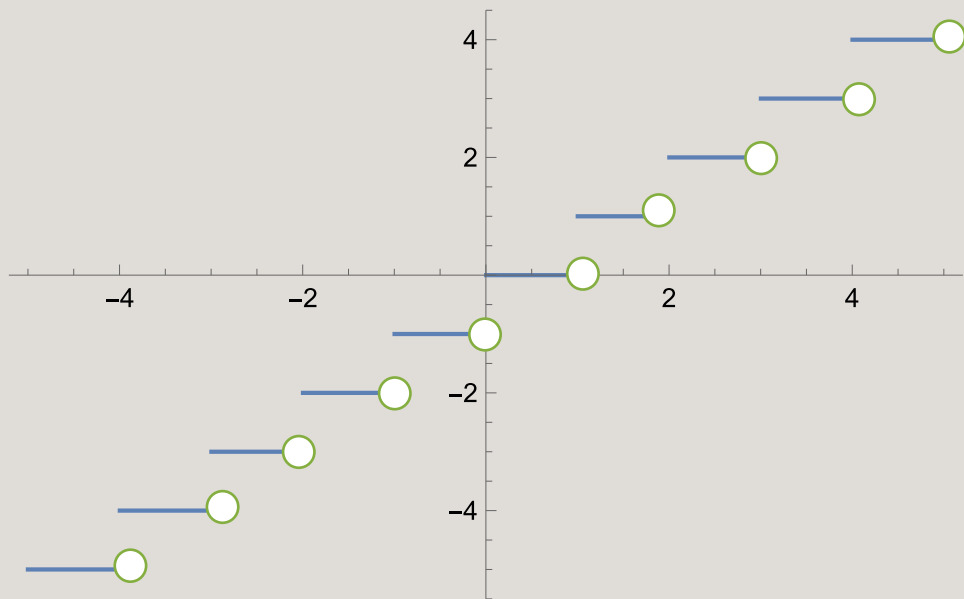
$$[3] = \dots$$

$$[2,5] = \dots$$

$$[-3] = \dots$$

$$[-3,5] = \dots$$

Jak wygląda wykres przyporządkowania (funkcji) część całkowita?



Zadanie domowe

- Znajdź informacje o przyporządkowaniu (funkcji) sufit (ceiling). Narysuj wykres tego przyporządkowania dla $x \in \langle -5,5 \rangle$.

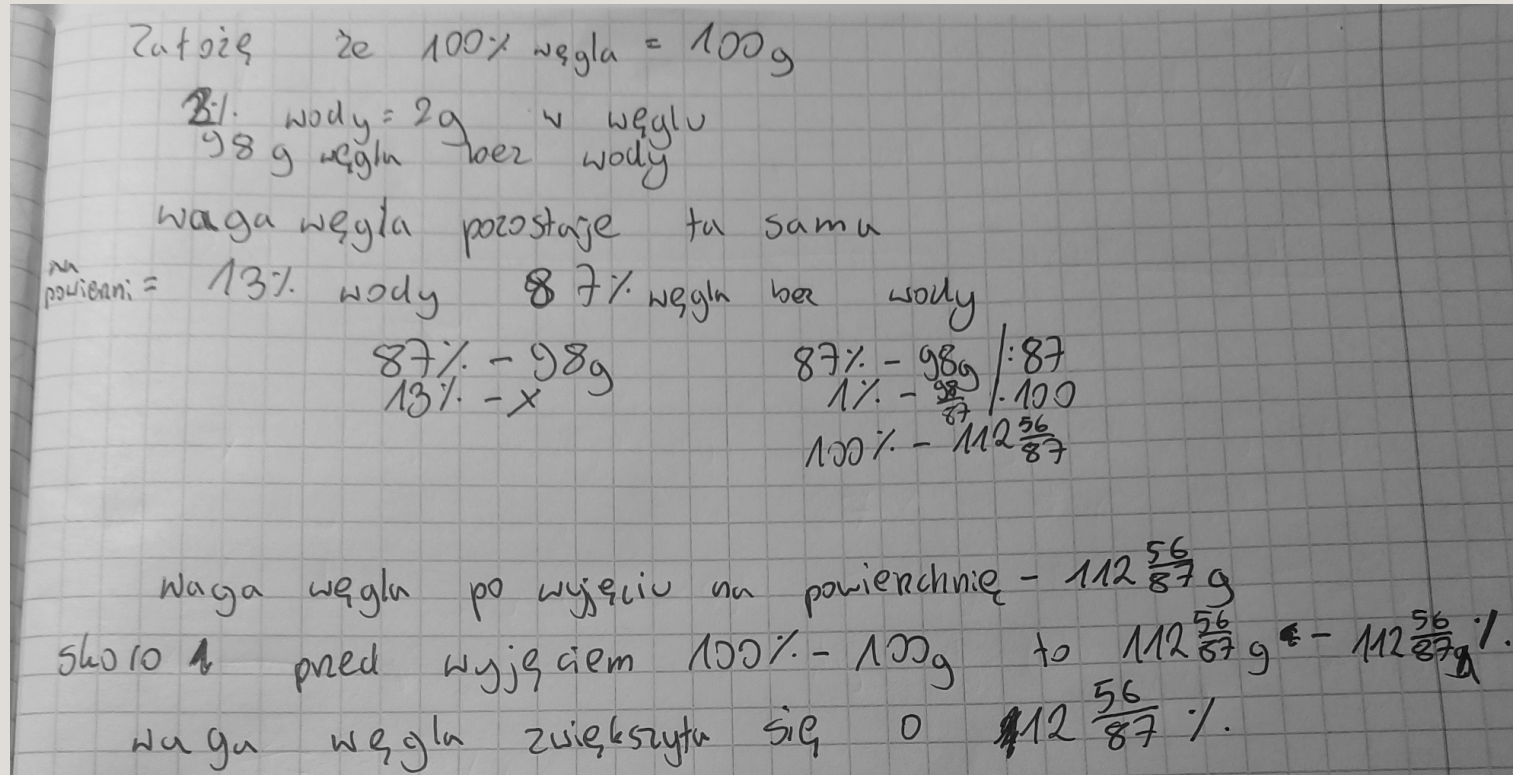
PRAWDA czy FAŁSZ?

- $a < b \Rightarrow [a] < [b]$
- $[2a] < 2[a]$
- $2[a] \leq [2a]$
- $[a + b] ? [a] + [b]$

Zadania dla Gabrysi

- Znajdź wszystkie rozwiązania w liczbach całkowitych równania $y^2 - 1 = 2^x$.
- Węgiel kamienny w kopalni zawiera około 2% wody. Po wydobyciu na powierzchnię węgiel chłonie wodę aż do zawartości 13%. O ile procent zwiększy się ciężar węgla na powietrzu?

Zadanie o węglu

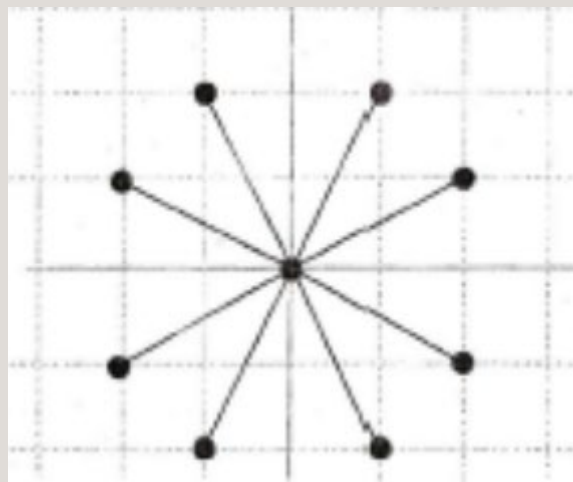


Rozwiązanie jest w zasadzie dobre, ale aby było w pełni akceptowalne warto zamiast 100 g przyjąć, że węgiel czysty w kopalni waży x . Wtedy zapis rozwiązania Gabrysi jest taki:

węgiel „nieczysty” przed wydobyciem waży $100/98x$; po wydobyciu czysty węgiel stanowi 87% „całego” węgla, czyli cały węgiel waży $100/87x$, zatem $100/87x : 100/98x = 112\frac{56}{87}$. Stąd ciężar węgla na powietrzu wzrósł $12\frac{56}{87}\%$.

Zadanie dla Gabrysi i innych chętnych osób

W początku układu współrzędnych stoi konik szachowy, który w jednym skoku skacze dwa pola w lewo (lub prawo) i jedno pole w dół (lub do góry), albo jedno pole w lewo (lub prawo) i dwa pola w dół (lub do góry). Poniżej zaznaczono, w jakich punktach może znaleźć się konik szachowy, skacząc z punktu $(0,0)$.



Czy konik szachowy może doskoczyć z punktu $(0,0)$ do punktu $(6,7)$, wykonując parzystą liczbę skoków? Jeśli tak, podaj współrzędne kolejnych punktów, do których doskoczy konik. Jeśli nie, podaj uzasadnienie.