



Spotkania z matematyką

nr 7

23 listopada 2023

ZD 1

Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie $y^2 - 1 = 3^x$ (wszyscy do oddania na kartkach).

ZD 2

Uzasadnij, że dla każdej liczby naturalnej n i dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $n[x] \leq [nx]$.

ZD 3

Narysuj marszrutę konika szachowego dla punktu (7,8).

Podzielność liczb przez potęgi liczby 2

- podzielność przez 2 ...
- podzielność przez 4 (2^2) ...
- podzielność przez 8 (2^3) ...
- podzielność przez 16 (2^4) ...
- ...

Zadanie z OMJ (XVIII, III stopień)

Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych m, n o tej własności, że liczba $(m + n)$ -cyfrowa

$$A = \underbrace{33 \dots 3}_m \underbrace{66 \dots 6}_n$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Skoro liczba A jest kwadratem liczby całkowitej i jest parzysta, to musi być podzielna przez ...

Przyglądnijmy się końcówce A ; gdyby $n \geq 2$, to 4 musiałoby dzielić 66, a to nie zachodzi, zatem $n = 1$.

Liczba A wygląda więc tak:

$$A = \underbrace{33 \dots 3}_m 6.$$

Pierwsze rozwiązanie się narzuca samo: $m = 1$, czyli $A = 36 = 6^2$.

Przyglądnijmy się liczbom A dla $m = 2, m = 3$ i $m = 4$, we wszystkich tych przypadkach rozłóżmy A na czynniki pierwsze. Zróbmy to wspólnie:

$$m = 2, \text{ to } 336 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7, m = 3, \text{ to } 3336 = 2^3 \cdot 3 \cdot 139, m = 4, \text{ to } 33336 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 463$$

Rozwiązanie (cd.)

Rozkłady znalezione za pomocą komputera:

- $m = 5$, to $333336 = 2^3 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 43$
- $m = 6$, to $3333336 = 2^3 \cdot 3 \cdot 138889$
- $m = 7$, to $33333336 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 154321$
- Teraz możemy już zaryzykować stwierdzenie: dla wszystkich $m \geq 3$ w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby A czynnik 2 występuje w potęgze 3. Aby to uzasadnić, trzeba sprawdzić, że $2^3 \mid A$ oraz $2^4 \nmid A$. Korzystając z rozpatrywanych cech podzielności, wiemy że $2^3 \mid 336$ oraz $2^4 \nmid 3336$.

Prawdopodobieństwo (pogadanka)

W jakich sytuacjach zetknęliście się z prawdopodobieństwem? Podajcie kilka przykładów.

- Ola: Jest kostka i trzeba obliczyć prawdopodobieństwo, że wypadnie liczba pierwsza.
- Gabrysia: Szansa, że spadnie deszcz.
- Szansa (prawdopodobieństwo) wygrania szóstki w LOTTO jest bardzo mała.
- Prawdopodobieństwo wylosowania „6” w rzucie kostką do gry wynosi ...
- W rzucie dwunastościenną kostką do gry prawdopodobieństwo wylosowania „9” wynosi ...

Zadanie z rachunku prawdopodobieństwa

W urnie są 4 kule białe i 3 kule czarne. Z tej urny losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania:

- kuli białej,
- kuli czarnej.

To samo zadanie dla m kul białych i n kul czarnych.

Zadanie z rachunku prawdopodobieństwa

W urnie są 4 kule białe i 3 kule czarne. Z tej urny losujemy dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania:

- dwóch kul białych,
- dwóch kul czarnych,
- jednej kuli białej i jednej kuli czarnej.

ZD

- Czy istnieją pary dodatnich liczb całkowitych m, n o tej własności, że liczba $(m + n)$ -cyfrowa

$$A = \underbrace{33 \dots 3}_m \underbrace{44 \dots 4}_n$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

(Kto chce, może oddać na kartkach do sprawdzenia.)

- W urnie jest 5 białych kul i 4 czarne. Z tej urny losujemy dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania: a) dwóch kul białych, b) dwóch kul czarnych, c) kuli białej i kuli czarnej.