Spotkania z matematyką

nr 8

30 listopada 2023

ZD

W urnie jest 5 białych kul i 4 czarne. Z tej urny losujemy dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania:

a) dwóch kul białych,

$$p_{bb} = \frac{\frac{5 \cdot 4}{2}}{\frac{9 \cdot 8}{2}} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

b) dwóch kul czarnych,

$$p_{cc} = \frac{\frac{4 \cdot 3}{2}}{\frac{9 \cdot 8}{2}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

c) kuli białej i kuli czarnej.

$$p_{bc} = \frac{5 \cdot 4}{\frac{9 \cdot 8}{2}} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

ZD

Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie

$$y^2 - 1 = 3^x$$

Jeśli $x = 0$, to $y^2 = 2$, y nie może być liczbą całkowitą.

Jeśli $x < 0$, to prawa strona równania nie jest liczbą całkowitą, a lewa jest.

Zatem $x > 0$; przekształcając równanie, otrzymujemy

$$(y - 1)(y + 1) = 3^x.$$

Otrzymujemy stąd $y - 1 = 3^a$ oraz $y + 1 = 3^b$, gdzie $a < b$. Odejmując od drugiego równania pierwsze, mamy $2 = 3^b - 3^a$. Ostatnia równość jest niemożliwa, bo 3 nie dzieli lewej strony, ale dzieli prawą.

Zatem rozpatrywane równanie **nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych**.

Niezdecydowana żaba

Pewna żaba skacze po osi liczbowej. Wystartowała z punktu o współrzędnej 0, *chcąc doskoczyć do punktu o współrzędnej* 1. *W czasie skoku stwierdziła, że powinna wrócić, dlatego wylądowała w połowie dystansu od* 0 *do* 1. *Zawróciła, ale w czasie skoku w stronę* 0 *stwierdziła, że niepotrzebnie wraca, więc wylądowała w połowie dystansu od* 1/2 *do* 0. *Obróciła się w stronę* 1 i … *znowu wylądowała w połowie dystansu między … W ten sposób wykonała jeszcze* n *skoków. W jakich punktach lądowała niezdecydowana żaba?*

Obliczamy, gdzie lądowała żaba w kolejnych skokach: 1/2, 1/4, 5/8, 5/16, 21/32, 21/64, …

Mały problem związany z punktami na osi liczbowej

Na osi liczbowej znajdują się dwa punkty, jeden, punkt A o współrzędnej a, drugi punkt B o współrzędnej b. Jaką współrzędną ma punkt będący środkiem odcinka AB?

$$ środek(AB) = \frac{a+b}{2} $$

Dwa ważne typy ciągów

- **Ciąg arytmetyczny**, proszę o przykłady, proszę o określenie.
- Inny typ ciągów, spójrzmy na przykłady:
- $1, 2, 4, 8, 16$; jaką wartość miałby 6-ty wyraz tego ciągu, a wyraz siódmy?
- $27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, ?, ?$; jakie liczby kryją się pod znakami zapytania?
- Dwa powyższe ciągi to **ciągi geometryczne**; spróbujmy znaleźć ich określenie …
- Czy ciąg może być jednocześnie arytmetyczny i algebraiczny? Podaj przykłady.

Ważny przykład ciągu geometrycznego

Wyobraź sobie, że masz 500 zł na koncie oprocentowanym na 10%. Kapitalizacja, czyli dopisanie odsetek, następuje po roku oszczędzania. Co to znaczy? To znaczy, że po roku na twoim koncie będzie

$$500 + 500 \cdot 0{,}1 = 500 \cdot 1{,}1 = 550.$$

A ile pieniędzy będzie (zakładamy, że nic nie wypłacasz):

- po 2 latach,
- po 3 latach,
- po n latach?

$$500 \cdot 1{,}1^n$$

Zadanie

Rozpatrujemy sytuację z poprzedniego slajdu. Po ilu latach na koncie będzie co najmniej 1000 złotych?

$500 \cdot 1{,}1^n \geq 1000$; obliczamy za pomocą arkusza EXCEL:

1	550
2	605
3	665,5
4	732,05
5	805,255
6	885,7805
7	974,3586
8	1071,794
9	1178,974
10	1296,871

=500*1,1^A1

ZD

- Zastanów się, jak będzie wyglądał ruch żaby po wielu skokach (możesz zajrzeć na stronę https://mat.ug.edu.pl/~matpz/Eksperymenty.html).
- Na osi liczbowej znajdują się dwa punkty A, B, punkt A ma współrzędną a, punkt B ma współrzędną b $(a < b)$. Jaką współrzędną ma punkt C taki, odcinek AC jest dwa razy krótszy niż odcinek CB?
- Bank oferuje oprocentowanie 5% w skali roku. Oblicz, korzystając np. z programu EXCEL, po ilu latach włożona do tego banku roku kwota 1000 zł przyniesie co najmniej 1000 zł zysku.