Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Gdańskiego

Marcin Staniszewski

E-ZBIEŻNOŚĆ IDEAŁOWA CIĄGÓW FUNKCYJNYCH

Rozprawa doktorska napisana pod kierunkiem dra hab. Rafała Filipowa oraz dra Adama Kweli

Gdańsk 2016

OŚWIADCZENIE

Ja, niżej podpisany oświadczam, iż przedłożona praca dyplomowa została wykonana przeze mnie samodzielnie, nie narusza praw autorskich, interesów prawnych i materialnych innych osób.

....

data *mgr Marcin Staniszewski*

Spis treści

Abstract

By an *ideal on* ω we mean a nonempty family of subsets of ω closed under taking finite unions and subsets of its elements. Moreover, we also assume that ideals contain all finite sets. By Fin we denote the ideal of all finite subsets of ω.

Let $\mathcal{I}$ be an ideal on ω. We say that a sequence $(x_n)_{n\in\omega}$ of reals is $\mathcal{I}$*-convergent* to $x \in \mathbb{R}$ if the set $\{n \in \omega : |x_n - x| \geqslant \varepsilon\} \in \mathcal{I}$ for every $\varepsilon > 0$ (see [32]).

In the Ph.D. thesis we consider the following definition of ideal equal convergence of a sequence of functions (we use the name e-convergence instead of equal convergence for simplicity). Let $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ be ideals on ω. Assume that f_n $(n \in \omega)$ and f are real-valued functions defined on a set X. We say that the sequence $(f_n)_{n\in\omega}$ is $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$*-equally convergent* to f if there exists a sequence of positive reals $(\varepsilon_n)_{n\in\omega}$ such that $(\varepsilon_n)_{n\in\omega}$ is $\mathcal{J}$-convergent to 0 and $\{n \in \omega : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}$ for every $x \in X$ (see [23]).

The above definition generalizes equal convergence introduced by Császár, Laczkovich (see [15]) and two different kinds of ideal equal convergence introduced by Das, Dutta, Pal (see [19]) and Filipów, Szuca (see [25]).

We prove a characterization showing when the ideal equal limit is unique. We study relationships between ideal equal convergence and various kinds of other ideal convergences of sequences of real functions. We also solve a few problems posed in [19] and show how the results obtained by Šupina in [49] can be easily concluded from our results.

Ideal pointwise convergence (see [32]) is a generalization of well known statistical convergence introduced by Schoenberg (see [45]) and Steinhaus (see [48]). Among other we prove a characterization showing when the ideal pointwise convergence implies the ideal equal convergence. The mentioned characterization is expressed in terms of cardinal coefficients related to the bounding number $\mathfrak{b}$. We compute the value of those coefficients for some classes of ideals, for instance for ideals with hereditary Baire property.

Laczkovich and Recław (see [37]) and (independently) Debs and Saint Raymond (see [20]) characterized first Baire class with respect to ideal convergence (the family of pointwise ideal limits of sequences of continuous functions) for every Borel ideal and Polish space. In particular, they characterized Borel ideals for which the first Baire class with respect to ideal convergence is equal to the classical first Baire class. Filipów and Szuca (see [25]) have extended this result to ideal discrete convergence and $(\mathcal{I}, \mathrm{Fin})$-equal convergence. Moreover, they characterized

the ideals for which higher Baire classes in the case of all three considered notions of convergence (ideal, ideal discrete and $(\mathcal{I}, \mathrm{Fin})$-equal convergence) coincide with the classical Baire classes for all perfectly normal topological spaces. We generalize their results to $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-equal convergence. We characterize Baire classes in the case of $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-equal convergence for every pair of ideals $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$, where $\mathcal{I}$ is coanalytic.

Recently, Natkaniec and Szuca (see [41] and [42]) obtained similar results in the case of quasi-continuous functions instead of continuous functions. Namely, they characterized Baire systems generated by the family of quasi-continuous functions in the case of ideal convergence and ideal discrete convergence for all Borel ideals and metric Baire spaces. We characterize Baire systems generated by quasi-continuous functions in the case of $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-equal convergence for every pair of ideals $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$, where $\mathcal{I}$ is Borel.

Wstęp

Zbieżność ideałowa jest to żywa problematyka mająca już długą historię, w którą zaangażowani byli i są znani matematycy, tacy jak Debs, Laczkovich, Recław, Saint Raymond czy Solecki (por. [20], [37], [46]). Zbieżność ideałowa uogólnia zbieżność statystyczną wprowadzoną przez Steinhausa (por. [48]) oraz Schoenberga (por. [45]) i mającą zastosowania między innymi w teorii liczb, teorii miary i analizie matematycznej (por. [1], [31], [46]). Problemy zbieżności ideałowej wiążą się ze strukturą kombinatoryczną i własnościami ideałów (por. [33], [37], [46]). Pojęcie zbieżności ideałowej jest równoważne pojęciu zbieżności względem filtra wprowadzonej przez Cartana w 1937 roku (por. [14]). Od tamtego czasu nastąpił duży postęp w rozumieniu tego tematu, a część autorów preferuje używanie równoważnej definicji z często przywoływanej pracy Kostyrko, Šaláta i Wilczyńskiego (por. [32]).

W rozprawie koncentrujemy się na badaniu e-zbieżności ideałowej (por. Definicja 2.2 na stronie 22), będącej uogólnieniem e-zbieżności wprowadzonej przez Császára i Laczkovicha (por. [15]), która z kolei jest równoważna zbieżności σ-jednostajnej (por. [16]). Niezależną, równoważną definicję podała Bukovská (por. [6]). W jej pracy e-zbieżność jest nazywana zbieżnością quasi-normalną. Pod tą nazwą występuje ona również w artykułach Bukovskiego, Dasa i Šupiny (por. [10], [49]), gdzie autorzy powołują się na nasze wyniki z prac [23], [24]. W ciągu ostatnich lat tematyka e-zbieżności pojawiała się między innymi w artykułach Filipowa, Recława, Repickiego, Szucy, Tsabana i Zdomskyy'ego (por. [12], [25], [52]). W [7], [8] autorzy używają e-zbieżności w teorii szeregów trygonometrycznych.

W pracy [15] autorzy pokazują, że zbieżność jednostajna ciągu funkcji rzeczywistych do pewnego odwzorowania implikuje e-zbieżność tego ciągu do tego odwzorowania, natomiast e-zbieżność implikuje zbieżność punktową. Ponadto implikacje te nie są odwracalne dla ciągów funkcyjnych określonych na zbiorze mocy większej lub równej od liczby $\mathfrak{b}$ (por. [6]). Możemy więc powiedzieć, że e-zbieżność jest słabsza niż zbieżność jednostajna i silniejsza niż zbieżność punktowa. Rozdział 2 niniejszej rozprawy jest poświęcony odpowiednikom wspomnianych zależności w przypadku zbieżności ideałowych. Zamieszczamy tam między innymi wyniki z artykułu [23], gdzie rozwiązujemy problemy postawione przez Dasa, Duttę i Pala w [19]. Nasze badania (por. [24], [47]) doprowadziły do zdefiniowania uogólniających liczbę $\mathfrak{b}$ współczynników kardynalnych $\mathfrak{b}(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K})$ oraz $\mathfrak{b}^*(\mathcal{I})$, które charakteryzują moc dziedziny, dla której zbieżność ciągu funkcyjnego względem ideału $\mathcal{K}$ implikuje $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-e-zbieżność tego ciągu. W rozdziale 1 określamy wartość tych współczynników dla różnych klas ideałów, a w części 2.2.1 wnioskujemy, kiedy wspomniana implikacja zachodzi dla tych klas. Przestrzenie topologiczne, dla których każdy zbieżny punktowo do zera ciąg funkcji ciągłych jest również e-zbieżny do zera były i są intensywnie badane zarówno w przypadku klasycznym (por. [11], [13]), jak i przy użyciu ideałów (por. [17], [18], [49]).

Rozdział 3 jest poświęcony wynikom otrzymanym w pracy [35], w której scharakteryzowaliśmy klasy Baire'a względem e-zbieżności ideałowej generowane przez rodziny funkcji ciągłych oraz quasi-ciągłych o wartościach rzeczywistych, określonych na dowolnych przestrzeniach odpowiednio doskonale normalnych i metrycznych Baire'a. Korzystamy z wcześniejszych wyników Filipowa, Katětova, Natkańca i Szucy (por. [25], [29], [41], [42]) i wykorzystujemy nieskończone gry badane przez Laflamme'a (por. [36]). Dla ideałów koanalitycznych wspomniane charakteryzacje są czysto kombinatoryczne. Dzięki temu uzyskaliśmy kombinatoryczną klasyfikację ideałów koanalitycznych na trzy c-typy oraz trzy q-typy – ideały są tego samego c-typu (q-typu), gdy generowane przez nie układy Baire'a względem e-zbieżności ideałowej dla funkcji ciągłych (quasi-ciągłych) są identyczne. Ponadto, udało nam się wykazać, że użycie e-zbieżności ideałowej zamiast klasycznej e-zbieżności może prowadzić do nowych (niepojawiających się w klasycznym przypadku) rodzin funkcji – jest to przypadek ideałów drugiego c-typu i drugiego q-typu.

Podziękowania

Pragnę złożyć najserdeczniejsze podziękowania moim promotorom, dr. hab. Rafałowi Filipowowi oraz dr. Adamowi Kweli, za życzliwość, wyrozumiałość i nieocenioną pomoc przy realizacji niniejszej pracy.

Bardzo szczególnie dziękuję Panu prof. Tomaszowi Natkańcowi, który pełnił funkcję mojego opiekuna naukowego podczas trwania studiów doktoranckich, za wszelką pomoc i życzliwość.

Za serdeczną i miłą atmosferę sprzyjającą pracy naukowej chcę podziękować wszystkim uczestnikom seminarium Zakładu Funkcji Rzeczywistych.

Rozdział 1

Ideały i ich własności

Oznaczmy przez $\mathcal{P}(X)$ rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru X, a przez $|X|$ moc zbioru X. Rodzinę $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ nazywamy *ideałem na zbiorze* X, jeżeli jest zamknięta na podzbiory (tzn. jeżeli $A \in \mathcal{I}$, $B \subseteq A$, to $B \in \mathcal{I}$) i skończone sumy (tzn. jeżeli $A, B \in \mathcal{I}$, to $A \cup B \in \mathcal{I}$). Na potrzeby zbieżności ideałowej będziemy rozważać wyłącznie ideały na nieskończonych zbiorach przeliczalnych oraz będziemy zakładać, iż ideały zawierają rodzinę $\mathrm{Fin}(X)$ wszystkich skończonych podzbiorów zbioru X. Ideał nazywamy *właściwym*, jeżeli jest on właściwym podzbiorem $\mathcal{P}(X)$. W niniejszej rozprawie we wszystkich rozdziałach poza rozdziałem 3 będziemy zakładać, że każdy ideał jest właściwy. *Filtrem dualnym do ideału* $\mathcal{I}$ nazywamy rodzinę $\mathcal{I}^* = \{A \subseteq X : X \setminus A \in \mathcal{I}\}$. Mówimy, że ideał jest *maksymalny*, jeżeli każdy podzbiór zbioru X należy do ideału lub do filtru dualnego do tego ideału. Dla ideałów, które nie są maksymalne istotne jest rozważanie rodziny $\mathcal{I}^+ = \{A \subseteq X : A \notin \mathcal{I}\}$, którą będziemy nazywać *koideałem ideału* $\mathcal{I}$. Przez ω i Fin będziemy odpowiednio oznaczać zbiór $\{0, 1, 2, ...\}$ oraz rodzinę $\mathrm{Fin}(\omega)$.

Niech $\mathcal{G}$ będzie pewną rodziną podzbiorów zbioru X. *Ideałem generowanym przez* $\mathcal{G}$ nazywamy najmniejszy ideał na X zawierający $\mathcal{G}$. Ideał nazywamy *przeliczalnie generowanym*, jeżeli jest generowany przez pewną przeliczalną rodzinę. Łatwo zauważyć, że ideał $\mathcal{I}$ jest przeliczalnie generowany wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $A_0, A_1, \ldots \in \mathcal{I}$ takie, że dla każdego zbioru $A \in \mathcal{I}$ istnieje $n \in \omega$, dla którego $A \subseteq A_n$.

Ideał na X nazywamy *gęstym*, jeżeli każdy nieskończony podzbiór X zawiera pewien nieskończony podzbiór należący do ideału. Jeżeli $Y \subseteq X$, $Y \in \mathcal{I}^+$, to *obcięcie ideału* $\mathcal{I}$ *do zbioru* Y, $\mathcal{I} \restriction Y = \{A \cap Y : A \in \mathcal{I}\}$, jest ideałem na Y. Mówimy, że ideały $\mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$ na X są *ortogonalne*, jeżeli istnieją zbiory $A \in \mathcal{I}$ oraz $B \in \mathcal{J}$ takie, że $A \cup B = X$.

Dla ideałów $\mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$ na zbiorze X zdefiniujmy $\mathcal{I} \sqcup \mathcal{J} = \{A \cup B : A \in \mathcal{I}, B \in \mathcal{J}\}$. Zauważmy, że jeżeli $\mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$ nie są ortogonalne, to rodzina $\mathcal{I} \sqcup \mathcal{J}$ jest ideałem na X.

Partycją zbioru X będziemy nazywać każdą taką rodzinę $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{P}(X)$, składającą się ze zbiorów parami rozłącznych, że $\bigcup_{n \in \omega} A_n = X$ (nie wymagamy, żeby zbiory A_n były niepuste).

Przykład 1.1 *Następujące rodziny są przykładami ideałów (por. [21]).*

(1) Fin *jest najprostszym przykładem ideału na zbiorze* ω.

(2) $\mathcal{I}_d = \left\{ A \subseteq \omega : \limsup_{n\to\infty} \frac{|A \cap \{0,1,...,n-1\}|}{n} = 0 \right\}$ *nazywamy ideałem zbiorów gęstości zero. Jest to ideał gęsty.*

(3) $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}} = \left\{ A \subseteq \omega : \sum_{n\in A} \frac{1}{n} < \infty \right\}$ *nazywamy ideałem sumowalnym. Również jest to ideał gęsty.*

(4) $\emptyset \otimes \mathrm{Fin} = \{A \subseteq \omega \times \omega : \{k \in \omega : (n,k) \in A\} \in \mathrm{Fin}$ *dla każdego* $n \in \omega\}$ *jest ideałem, który nie jest gęsty.*

(5) $\mathrm{Fin} \otimes \emptyset = \{A \subseteq \omega \times \omega : \{n \in \omega : \{k \in \omega : (n,k) \in A\} \neq \emptyset\} \in \mathrm{Fin}\}$ *jest ideałem przeliczalnie generowanym, który nie jest gęsty.*

1.1 Operacje i relacje na zbiorze ideałów

Sumą rozłączną zbiorów X i Y nazywamy zbiór $X \oplus Y = \{0\} \times X \cup \{1\} \times Y$. Niech $\mathcal{I}$ będzie rodziną podzbiorów X i niech $\mathcal{J}$ będzie rodziną podzbiorów Y. Wówczas rodzinę $\mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$ podzbiorów $X \oplus Y$ definiujemy następująco:

$$A \in \mathcal{I} \oplus \mathcal{J} \;\Leftrightarrow\; \{x \in X : (0,x) \in A\} \in \mathcal{I} \;\wedge\; \{y \in Y : (1,y) \in A\} \in \mathcal{J}$$

dla każdego zbioru $A \subseteq X \oplus Y$. Nietrudno sprawdzić, że jeżeli $\mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$ są ideałami odpowiednio na zbiorach X i Y, to rodziny $\mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$, $\mathcal{I} \oplus \mathcal{P}(Y)$ i $\mathcal{P}(X) \oplus \mathcal{J}$ są ideałami na zbiorze $X \oplus Y$. Dla uproszczenia zamiast $\{0,1\}$ będziemy czasem pisać 2.

Produktem rodzin $\mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$ nazywamy rodzinę $\mathcal{I} \otimes \mathcal{J}$ podzbiorów $X \times Y$ daną wzorem

$$A \in \mathcal{I} \otimes \mathcal{J} \;\Leftrightarrow\; \{x \in X : A_x \notin \mathcal{J}\} \in \mathcal{I}$$

dla każdego zbioru $A \subseteq X \times Y$, gdzie $A_x = \{y \in Y : (x,y) \in A\}$. Nietrudno sprawdzić, że jeżeli $\mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$ są ideałami odpowiednio na zbiorach X i Y, to rodziny $\mathcal{I} \otimes \mathcal{J}$, $\mathcal{I} \otimes \{\emptyset\}$ i $\{\emptyset\} \otimes \mathcal{J}$ są ideałami na zbiorze $X \times Y$. Ideały $\mathcal{I} \otimes \{\emptyset\}$ i $\{\emptyset\} \otimes \mathcal{I}$ oznaczamy odpowiednio przez $\mathcal{I} \otimes \emptyset$ i $\emptyset \otimes \mathcal{I}$.

Struktura ideałów jest często opisywana w terminach porządków. Niech $\mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$ będą ideałami określonymi odpowiednio na zbiorach X i Y. Mówimy, że *ideał $\mathcal{J}$ jest poniżej ideału $\mathcal{I}$ w porządku Katětova*, $\mathcal{J} \leqslant_K \mathcal{I}$, jeżeli istnieje funkcja $f : X \to Y$ taka, że $f^{-1}[A] \in \mathcal{I}$ dla każdego $A \in \mathcal{J}$. Jeżeli ponadto funkcja f jest bijekcją, to mówimy, że *ideał $\mathcal{I}$ zawiera izomorficzną kopię ideału $\mathcal{J}$* i oznaczamy $\mathcal{J} \sqsubseteq \mathcal{I}$.

Mówimy, że ideały $\mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$ określone odpowiednio na zbiorach X i Y są *izomorficzne*, $\mathcal{I} \simeq \mathcal{J}$, jeżeli istnieje bijekcja $f : X \to Y$ taka, że

$$A \in \mathcal{I} \iff f[A] \in \mathcal{J}$$

dla każdego zbioru $A \subseteq X$. Izomorfizmy zachowują wszystkie własności rozpatrywane w niniejszej rozprawie. Możemy zatem, nie tracąc ogólności, ograniczyć nasze rozważania wyłącznie do ideałów określonych na zbiorze ω.

1.2 Topologiczne własności ideałów

Przestrzenią Cantora $\{0,1\}^\omega$ nazywamy przestrzeń będącą iloczynem kartezjańskim ω wielu przestrzeni dyskretnych $\{0,1\}$, wyposażoną w topologię produktową. Rodzinę $\mathcal{P}(\omega)$ możemy utożsamić z rodziną $\{0,1\}^\omega$ przez przypisanie każdemu elementowi z $\mathcal{P}(\omega)$ jego funkcji charakterystycznej. W ten sposób każdy ideał na ω możemy traktować jako podzbiór przestrzeni Cantora, a zatem przypisać mu topologiczne własności.

Mówimy, że ideał na ω jest *borelowski*, jeżeli jest borelowskim podzbiorem przestrzeni Cantora. Podobnie ideał na ω ma *własność Baire'a*, jeżeli można go przedstawić jako różnicę symetryczną zbioru otwartego i zbioru pierwszej kategorii w przestrzeni Cantora. Sierpiński udowodnił, że ideały maksymalne nie mają własności Baire'a (por. [3]).

Jak wspomnieliśmy wcześniej, ideały izomorficzne zachowują wszystkie własności (w szczególności własności topologiczne) rozważane w niniejszej rozprawie. Zatem, jeżeli ideał $\mathcal{I}$ na ω ma własność Baire'a (jest borelowski, analityczny itp.) oraz $\mathcal{I} \simeq \mathcal{J}$, to ideał $\mathcal{J}$ ma własność Baire'a (jest borelowski, analityczny itp.).

W pracy [50] Talagrand scharakteryzował ideały $\mathcal{I}$ z własnością Baire'a w następujący sposób: istnieje ciąg liczb naturalnych $n_0 < n_1 < ...$ taki, że dla każdego zbioru $A \in \mathcal{I}$ istnieje $N \in \omega$ takie, że $\{n_k+1, ..., n_{k+1}\} \nsubseteq A$ dla wszystkich $k > N$.

Dla ułatwienia zbiór $\{n_k+1, ..., n_{k+1}\}$ będziemy oznaczać $[n_k+1, n_{k+1}]$ lub $(n_k, n_{k+1}]$, o ile nie będzie to prowadziło do nieporozumień.

1.3 Ideały z dziedziczną własnością Baire'a

Mówimy, że ideał $\mathcal{I}$ ma *dziedziczną własność Baire'a*, jeżeli $\mathcal{I} \restriction A$ ma własność Baire'a dla każdego zbioru $A \in \mathcal{I}^+$. Pojęcie to wykorzystamy w następnym podrozdziale. Poniższe stwierdzenie pokazuje, że ideał z własnością Baire'a nie musi mieć dziedzicznej własności Baire'a.

Stwierdzenie 1.2 *Jeżeli $\mathcal{I}$ jest dowolnym ideałem, a ideał $\mathcal{J}$ ma własność Baire'a, to ideał $\mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$ ma własność Baire'a.*

Dowód. Niech $f : \{0,1\} \times \omega \to \omega$ będzie taką bijekcją, że $f(1,k) < f(1,k+1)$ dla każdego $k \in \omega$ i niech $\mathcal{K} = \{A \subseteq \omega : f^{-1}[A] \in \mathcal{I} \oplus \mathcal{J}\}$. Wtedy $\mathcal{K}$ jest ideałem na ω izomorficznym z $\mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$. Aby zakończyć dowód wystarczy pokazać, że $\mathcal{K}$ ma własność Baire'a. Niech $j_k = f(1,k)$ dla każdego $k \in \omega$. Ponieważ ideał $\mathcal{J}$ ma własność Baire'a, więc istnieje ciąg $n_0 < n_1 < ...$ taki, że $\bigcup_{n\in\omega}(n_{\phi(k)}, n_{\phi(k)+1}] \in \mathcal{J}^+$ dla każdej rosnącej funkcji $\phi : \omega \to \omega$. Zdefiniujmy ciąg $m_0 < m_1 < ...$ wzorem $m_k = j_{n_k}$ dla każdego $k \in \omega$. Ustalmy funkcję rosnącą $\phi : \omega \to \omega$. Wówczas

$$\bigcup_{n\in\omega} \left(m_{\phi(k)}, m_{\phi(k)+1}\right] = \bigcup_{n\in\omega} \left(j_{n_{\phi(k)}}, j_{n_{\phi(k)+1}}\right] \supseteq \bigcup_{n\in\omega} f\left[\{1\} \times \left(n_{\phi(k)}, n_{\phi(k)+1}\right]\right] \in \mathcal{K}^+.$$

Zatem $\mathcal{K}$, a więc również $\mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$, ma własność Baire'a. $\square$

Fakt 1.3 *Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem na ω. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *$\mathcal{I}$ ma dziedziczną własność Baire'a.*

(2) *Jeżeli $\mathcal{I} \simeq \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$, to $\mathcal{I}_1$ oraz $\mathcal{I}_2$ mają własność Baire'a.*

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2). Załóżmy, że $\mathcal{I} \simeq \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$. Wówczas istnieje zbiór A taki, że $\mathcal{I} \upharpoonright A \simeq \mathcal{I}_1$ oraz $\mathcal{I} \upharpoonright (\omega \setminus A) \simeq \mathcal{I}_2$. Jeżeli $A \in \mathcal{I}^+$ i $(\omega \setminus A) \in \mathcal{I}^+$, to $\mathcal{I}_1$ i $\mathcal{I}_2$ mają własność Baire'a (z założenia (1)). Jeżeli natomiast $A \in \mathcal{I}$ lub $(\omega \setminus A) \in \mathcal{I}$, to wówczas $\mathcal{I}_1 = \mathcal{P}(A)$ lub $\mathcal{I}_2 = \mathcal{P}(\omega \setminus A)$. Zatem w tym przypadku $\mathcal{I}_1$ oraz $\mathcal{I}_2$ również mają własność Baire'a.

(2) $\Rightarrow$ (1). Niech $A \in \mathcal{I}^+$. Łatwo zauważyć, że $\mathcal{I} \simeq \mathcal{I} \upharpoonright A \oplus \mathcal{I} \upharpoonright (\omega \setminus A)$. Z założenia (2) otrzymujemy, że $\mathcal{I} \upharpoonright A$ ma własność Baire'a. □

W następnym stwierdzeniu wskazujemy dużą klasę ideałów spełniających badaną przez nas własność.

Stwierdzenie 1.4 *Ideały borelowskie mają dziedziczną własność Baire'a.*

Dowód. Niech $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ będą takimi ideałami na ω, że $\mathcal{K}$ jest borelowski oraz $\mathcal{K} \simeq \mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$. Zdefiniujmy odwzorowanie $\phi : \mathcal{P}(\omega) \times \mathcal{P}(\omega) \to \mathcal{P}(\{0,1\} \times \omega)$ wzorem $\phi(A,B) = \{0\} \times A \cup \{1\} \times B$ dla każdych $A, B \in \mathcal{P}(\omega)$. Łatwo sprawdzić, że ϕ jest homeomorfizmem. Niech $\mathcal{D} = \{(A,B) \in \mathcal{P}(\omega) \times \mathcal{P}(\omega) : \ A \in \mathcal{I}, B \in \mathcal{J}\}$. Ponieważ

$$\mathcal{D} = \{(A,B) \in \mathcal{P}(\omega) \times \mathcal{P}(\omega) : \ \phi(A,B) \in \mathcal{I} \oplus \mathcal{J}\} = \phi^{-1}[\mathcal{I} \oplus \mathcal{J}],$$

więc $\mathcal{D}$ jest borelowskim podzbiorem przestrzeni $\mathcal{P}(\omega) \times \mathcal{P}(\omega)$. Zatem jego cięcie $\mathcal{J} = \{B \in \mathcal{P}(\omega) : (\emptyset, B) \in \mathcal{D}\}$ jest zbiorem borelowskim. Analogicznie pokazujemy, że ideał $\mathcal{I}$ jest borelowski. W szczególności ideały $\mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$ mają własność Baire'a. Z Faktu 1.3 otrzymujemy tezę. □

1.4 Ideałowe wersje liczby ograniczającej $\mathfrak{b}$

Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem na ω. W pracy [22] Farkas i Soukup rozważali następującą liczbę kardynalną:

$$\mathfrak{b}(\mathcal{I}) = \min\Big\{ \ |\mathcal{F}| : \ \mathcal{F} \subseteq \omega^\omega \ \wedge \ \forall_{g \in \omega^\omega} \exists_{f \in \mathcal{F}} \ \{n \in \omega : f(n) \geqslant g(n)\} \in \mathcal{I}^+ \Big\}.$$

Dla ideału $\mathcal{I} = \mathrm{Fin}$ otrzymujemy klasyczną wersję liczby ograniczającej (ang. bounding number) i będziemy pisać $\mathfrak{b}$ zamiast $\mathfrak{b}(\mathrm{Fin})$. W pracy [22] autorzy udowodnili, że $\mathfrak{b}(\mathcal{I}) = \mathfrak{b}$ dla analitycznych P-ideałów (definicję podajemy w podrozdziale 1.5.1 na stronie 12), jednak z ich dowodu wynika, że równość zachodzi dla wszystkich ideałów z własnością Baire'a.

Definiujemy ideałową wersję liczby ograniczającej dla funkcji rozważanych na podzbiorach z koideału w następujący sposób:

$$\mathfrak{b}^*(\mathcal{I}) = \min\Big\{ \ |\mathcal{F}| : \ \mathcal{F} \subseteq \omega^\omega \ \wedge \ \forall_{A \in \mathcal{I}^+} \forall_{g \in \omega^\omega} \exists_{f \in \mathcal{F}} \ \{n \in A : f(n) \geqslant g(n)\} \in \mathcal{I}^+ \Big\}.$$

Łatwo zauważyć, że $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{b}(\mathcal{I}) \leqslant \mathfrak{b}^*(\mathcal{I}) \leqslant \mathfrak{c}$ dla dowolnego ideału $\mathcal{I}$. Ponadto jest niesprzeczne z teorią ZFC, że $\mathfrak{b}(\mathcal{I}) > \mathfrak{b}$ dla pewnego ideału maksymalnego (por. [40]). Zatem w tym przypadku również $\mathfrak{b}^*(\mathcal{I}) > \mathfrak{b}$. Ponieważ przy założeniu aksjomatu Martina $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ (por. [9, s. 376]), więc $\mathfrak{b}^*(\mathcal{I}) = \mathfrak{c}$ dla każdego ideału $\mathcal{I}$. Nietrudno sprawdzić, że $\mathfrak{b}^*(\mathcal{I}) = \mathfrak{b}(\mathcal{I})$ dla ideałów maksymalnych.

Twierdzenie 1.5 *Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem na ω z dziedziczną własnością Baire'a. Wówczas $\mathfrak{b}^*(\mathcal{I}) = \mathfrak{b}(\mathcal{I}) = \mathfrak{b}$.*

Dowód. Wystarczy udowodnić, że $\mathfrak{b}^*(\mathcal{I}) \leqslant \mathfrak{b}$. Niech $\kappa < \mathfrak{b}^*(\mathcal{I})$. Pokażemy, że $\kappa < \mathfrak{b}$. Ustalmy $\{f_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \omega^\omega$. Bez straty ogólności możemy założyć, że każda funkcja f_α jest rosnąca. Istnieją zbiór $A = \{a_n : n \in \omega\} \in \mathcal{I}^+$ oraz rosnąca funkcja $g \in \omega^\omega$ takie, że $a_k < a_{k+1}$ dla wszystkich $k \in \omega$ oraz $\{n \in A : f_\alpha(n) \geqslant g(n)\} \in \mathcal{I}$ dla każdego $\alpha < \kappa$. Pokażemy najpierw, że istnieje odwzorowanie $h \in \omega^\omega$ takie, że $A \cap \bigcup_{n\in\omega}[a_{\phi(n)}, a_{h(\phi(n)+1)}] \in \mathcal{I}^+$ dla każdej ściśle rosnącej funkcji $\phi \in \omega^\omega$.

Przypuśćmy przeciwnie, że dla każdego odwzorowania $h \in \omega^\omega$ istnieje ściśle rosnąca funkcja $\phi \in \omega^\omega$ taka, że $A \cap \bigcup_{n\in\omega}[a_{\phi(n)}, a_{h(\phi(n)+1)}] \in \mathcal{I}$. Niech $f \in A^\omega$ będzie funkcją daną wzorem $f(n) = a_n$. Udowodnimy, że ideał $\mathcal{I}_1 = \{B \subseteq \omega : f[B] \in \mathcal{I}\}$ nie ma własności Baire'a. Ponieważ $\mathcal{I} \restriction A \simeq \mathcal{I}_1$, więc otrzymamy sprzeczność z założeniem twierdzenia.

Niech $m_0 < m_1 < ...$ będzie ciągiem liczb naturalnych. Zdefiniujmy funkcję $h \in \omega^\omega$ wzorem $h(k) = m_k$ dla wszystkich $k \in \omega$. Wówczas istnieje ściśle rosnąca funkcja $\phi \in \omega^\omega$ taka, że $B = A \cap \bigcup_{n\in\omega}[a_{\phi(n)}, a_{h(\phi(n)+1)}] \in \mathcal{I}$. Ponadto

$$\bigcup_{n\in\omega}\left[m_{\phi(n)}, m_{\phi(n)+1}\right] = f^{-1}\left[A \cap \bigcup_{n\in\omega}\left[a_{h(\phi(n))}, a_{h(\phi(n)+1)}\right]\right] \subseteq$$

$$f^{-1}\left[A \cap \bigcup_{n\in\omega}\left[a_{\phi(n)}, a_{h(\phi(n)+1)}\right]\right] = f^{-1}[B] \in \mathcal{I}_1.$$

Stąd $\mathcal{I}_1$ nie ma własności Baire'a.

Zdefiniujmy funkcję $\tilde{g} \in \omega^\omega$ wzorem $\tilde{g}(n) = g(a_{h(n)+1})$. Pokażemy, że dla każdego $\alpha < \kappa$ zbiór $\{n \in A : f_\alpha(n) \geqslant \tilde{g}(n)\}$ jest skończony.

Przypuśćmy, że istnieje $\alpha < \kappa$ takie, że zbiór $\{n \in A : f_\alpha(n) \geqslant \tilde{g}(n)\}$ jest nieskończony. Wówczas istnieje ściśle rosnąca funkcja $\phi \in \omega^\omega$ taka, że $f_\alpha(\phi(n)) \geqslant \tilde{g}(\phi(n)) = g(a_{h(\phi(n)+1)})$ dla wszystkich $n \in \omega$. Ponieważ f_α jest funkcją rosnącą, otrzymujemy, że $A \cap \bigcup_{n\in\omega}[a_{\phi(n)}, a_{h(\phi(n)+1)}] \subseteq A \cap \bigcup_{n\in\omega}[\phi(n), a_{h(\phi(n)+1)}] \subseteq \{n \in A : f_\alpha(n) \geqslant g(n)\} \in \mathcal{I}$. Sprzeczność z wyborem odwzorowania h.

Zdefiniujmy funkcję $\tilde{\tilde{g}} \in \omega^\omega$ wzorem $\tilde{\tilde{g}}(n) = \tilde{g}(a_n)$. Ustalmy $\alpha < \kappa$. Istnieje $N \in \omega$ takie, że $f_\alpha(n) \leqslant f_\alpha(a_n) < \tilde{g}(a_n)$ dla każdego $n > N$. Zatem $\{n \in \omega : f_\alpha(n) \geqslant \tilde{\tilde{g}}(n)\} \in \mathrm{Fin}$ dla wszystkich $\alpha < \kappa$. Stąd $\kappa < \mathfrak{b}$. □

Problem 1 *Czy jest niesprzeczne z teorią mnogości ZFC istnienie ideałów, dla których $\mathfrak{b}(\mathcal{I}) < \mathfrak{b}^*(\mathcal{I})$?*

1.5 Kombinatoryczne własności ideałów

W tej części wprowadzimy kilka kombinatorycznych własności opisujących wzajemne relacje między trzema ideałami, które będą nam potrzebne w dalszych rozważaniach.

1.5.1 κ-$P(\mathcal{I},\mathcal{J})$-ideały

Definicja 1.6 (por. [47]) Niech $\mathcal{I},\mathcal{K}$ będą ideałami na ω, $\mathcal{J}$ będzie ideałem na ω lub $\mathcal{J}=\mathcal{P}(\omega)$ i niech κ będzie pewną liczbą kardynalną. Mówimy, że ideał $\mathcal{K}$ jest κ-$P(\mathcal{I},\mathcal{J})$-*ideałem*, jeżeli dla dowolnej rodziny $\{E_\alpha : \alpha<\kappa\}\subseteq\mathcal{K}$ istnieje zbiór $A\in\mathcal{J}$ taki, że $E_\alpha\setminus A\in\mathcal{I}$ dla każdego $\alpha<\kappa$.

Jeżeli ideał $\mathcal{K}$ jest κ-$P(\mathrm{Fin},\mathcal{K})$-ideałem, to $\mathcal{K}$ nazywamy κ-P-*ideałem*. Ponadto ω-P-ideały będziemy nazywać P-*ideałami*. W przypadku, gdy $\mathcal{K}$ jest ω-$P(\mathcal{I},\mathcal{K})$-ideałem otrzymujemy własność $AP(\mathcal{K},\mathcal{I})$ wprowadzoną przez Maćaja i Sleziaka w [39, Definicja 3.10] (w pracy [24] takie ideały nazywaliśmy $P(\mathcal{I})$-*ideałami*).

Następujące własności wynikają bezpośrednio z definicji.

Fakt 1.7 *Załóżmy, że κ,λ są liczbami kardynalnymi oraz $\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K}$ są ideałami.*

(1) *Jeżeli $\mathcal{J}$ jest P-ideałem, to $\mathcal{J}$ jest ω-$P(\mathcal{I},\mathcal{J})$-ideałem dla każdego ideału $\mathcal{I}$.*

(2) *Jeżeli ideały $\mathcal{I},\mathcal{J}$ są ortogonalne, to $\mathcal{I}$ jest κ-$P(\mathcal{I},\mathcal{J})$-ideałem oraz $\mathcal{J}$ jest κ-$P(\mathcal{J},\mathcal{I})$-ideałem dla dowolnego κ.*

(3) *Jeżeli $\mathcal{K}\subseteq\mathcal{I}$, to $\mathcal{K}$ jest κ-$P(\mathcal{I},\mathcal{J})$-ideałem dla każdego ideału $\mathcal{J}$ i dowolnej liczby kardynalnej κ.*

(4) *Dla $\kappa\leqslant\lambda$, jeżeli $\mathcal{K}$ jest λ-$P(\mathcal{I},\mathcal{J})$-ideałem, to $\mathcal{K}$ jest również κ-$P(\mathcal{I},\mathcal{J})$-ideałem.*

Przykład 1.8 *Ideały $\mathcal{I}_d$ i $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$ są P-ideałami, a $\mathrm{Fin}\otimes\emptyset$ nie jest P-ideałem. Z definicji liczby $\mathfrak{b}$ wynika, że ideał $\emptyset\otimes\mathrm{Fin}$ jest κ-P-ideałem dla każdego $\kappa<\mathfrak{b}$ i nie jest $\mathfrak{b}$-P-ideałem. Przy założeniu aksjomatu Martina zachodzi równość $\mathfrak{b}=\mathfrak{c}$, więc jest niesprzeczne z ZFC, że $\omega_1<\mathfrak{c}$, $\emptyset\otimes\mathrm{Fin}$ jest ω_1-P-ideałem i nie jest $\mathfrak{c}$-P-ideałem.*

Fakt 1.9 *Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem na ω. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *$\mathcal{I}$ jest $\mathfrak{c}$-P-ideałem.*

(2) *$\mathcal{I}\simeq\mathrm{Fin}$ lub $\mathcal{I}\simeq\mathrm{Fin}\oplus\mathcal{P}(\omega)$.*

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2). Niech $A\in\mathcal{I}$ będzie takim zbiorem, że $B\setminus A\in\mathrm{Fin}$ dla każdego zbioru $B\in\mathcal{I}$. Jeżeli zbiór A jest skończony, to oczywiście $\mathcal{I}\simeq\mathrm{Fin}$. Załóżmy zatem, że A jest zbiorem nieskończonym. Niech $g : \omega \to \omega \setminus A$ i $h : \omega \to A$ będą dowolnymi bijekcjami. Zdefiniujmy funkcję $f : \{0,1\} \times \omega \to \omega$ wzorem

$$f(i,n) = \begin{cases} g(n) & \text{gdy } i = 0, \\ h(n) & \text{gdy } i = 1. \end{cases}$$

Łatwo zauważyć, że f jest izomorfizmem ideałów $\mathrm{Fin} \oplus \mathcal{P}(\omega)$ i $\mathcal{I}$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Dowód jest natychmiastowy w przypadku, gdy $\mathcal{I} \simeq \mathrm{Fin}$. Załóżmy, że $\mathcal{I} \simeq \mathrm{Fin} \oplus \mathcal{P}(\omega)$ i niech $f : \omega \to \{0,1\} \times \omega$ będzie izomorfizmem pomiędzy tymi ideałami. Zdefiniujmy zbiór $A = f^{-1}[\{1\} \times \omega]$. Wówczas $B \setminus A \in \mathrm{Fin}$ dla każdego zbioru $B \in \mathcal{I}$. □

Definicja 1.10 Niech κ będzie liczbą kardynalną. Mówimy, że ideał $\mathcal{I}$ jest *κ-przeliczalnie generowany*, jeżeli dla dowolnej rodziny $\{E_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \mathcal{I}$ istnieje ciąg zbiorów $A_0, A_1, \ldots \in \mathcal{I}$ taki, że dla każdego $\alpha < \kappa$ istnieje $n \in \omega$ takie, że $E_\alpha \subseteq A_n$.

Łatwo zauważyć, że ideał $\mathcal{I}$ jest $\mathfrak{c}$-przeliczalnie generowany wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{I}$ jest przeliczalnie generowany.

Stwierdzenie 1.11 *Niech κ będzie nieskończoną liczbą kardynalną i niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem na ω. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *$\mathcal{I}$ jest κ-przeliczalnie generowanym P-ideałem.*

(2) *$\mathcal{I}$ jest κ-P-ideałem.*

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2). Ustalmy rodzinę $\{E_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \mathcal{I}$. Ponieważ $\mathcal{I}$ jest ideałem κ-przeliczalnie generowanym, więc istnieją takie zbiory $A_0, A_1, \ldots \in \mathcal{I}$, że dla każdego $\alpha < \kappa$ istnieje $n \in \omega$, dla którego $E_\alpha \subseteq A_n$. Ponadto istnieje taki zbiór $A \in \mathcal{I}$, że $A_n \setminus A \in \mathrm{Fin}$ dla wszystkich $n \in \omega$ (gdyż $\mathcal{I}$ jest P-ideałem). Wówczas $E_\alpha \setminus A \in \mathrm{Fin}$ dla każdego $\alpha < \kappa$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Ponieważ $\mathcal{I}$ jest κ-P-ideałem i $\omega \leqslant \kappa$, więc $\mathcal{I}$ jest również P-ideałem (por. Fakt 1.7(4)). Pokażemy teraz, że ideał $\mathcal{I}$ jest κ-przeliczalnie generowany.

Ustalmy rodzinę $\{E_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \mathcal{I}$. Z założenia (2) istnieje taki zbiór $A \in \mathcal{I}$, że $E_\alpha \setminus A \in \mathrm{Fin}$ dla każdego $\alpha < \kappa$. Zdefiniujmy zbiory $A_n = A \cup \{0, 1, ..., n\}$ dla wszystkich $n \in \omega$. Wówczas dla każdego $\alpha < \kappa$ istnieje $n \in \omega$ takie, że $E_\alpha \subseteq A_n$. □

Uwaga 1.12 Z każdym gęstym ideałem $\mathcal{I}$ na ω stowarzyszamy następującą liczbę kardynalną

$$\mathrm{add}^*(\mathcal{I}) = \min\Big\{ |\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \ \wedge\ \forall_{X \in \mathcal{I}}\, \exists_{A \in \mathcal{A}}\, A \setminus X \in \mathrm{Fin}^+ \Big\}$$

(por. [28]). Nietrudno zauważyć, że gęsty ideał $\mathcal{I}$ jest κ-P-ideałem wtedy i tylko wtedy, gdy $\kappa < \mathrm{add}^*(\mathcal{I})$. W [28] Hernández-Hernández i Hrušák pokazali, że

$\mathrm{add}^*(\mathcal{I}) \leqslant \mathfrak{b}$ dla gęstych analitycznych P-ideałów. Zatem gęsty analityczny P-ideał nie jest $\mathfrak{b}$-P-ideałem i jest niesprzeczne z ZFC, że nie jest ω_1-P-ideałem. W [51] Todorčevic udowodnił, że jest niesprzeczne z ZFC, iż $\omega_1 < \mathrm{add}^*(\mathcal{I}) = \mathfrak{c}$ dla gęstych analitycznych P-ideałów, zatem są one ω_1-P-ideałami i nie są $\mathfrak{c}$-P-ideałami. W tym przypadku gęste analityczne P-ideały są również ω_1-przeliczalnie generowanymi na mocy Stwierdzenia 1.11.

1.5.2 Własność $\mathrm{W}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$

Definicja 1.13 (por. [47]) Niech $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ będą ideałami na ω. Mówimy, że *zachodzi własność* $\mathrm{W}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$, jeżeli dla dowolnej partycji $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{J}$ zbioru ω istnieje taki zbiór $S \in \mathcal{I}^+$, że $A_0 \cap S \in \mathcal{I}$ oraz $A_{n+1} \cap S \in \mathcal{K}$ dla wszystkich $n \in \omega$.

Ta własność okaże się kluczowa w badaniu współczynnika kardynalnego, który zdefiniujemy w części 1.5.4. W przypadku, gdy $\mathcal{K} = \mathcal{I}$ otrzymujemy własność $\mathrm{W}(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ wprowadzoną w pracy [24].

Następujące własności wynikają bezpośrednio z definicji.

Fakt 1.14 *Niech $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ będą ideałami na ω.*

(1) *Jeżeli ideały $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ są ortogonalne, to własność $\mathrm{W}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$ nie jest spełniona dla dowolnego ideału $\mathcal{K}$.*

(2) *Jeżeli $\mathcal{J}$ jest ω-$P(\mathcal{K}, \mathcal{I})$-ideałem i ideały $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ nie są ortogonalne, to zachodzi własność $\mathrm{W}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$.*

(3) *Jeżeli ideały $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ są takie, że $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ nie są ortogonalne oraz $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{K}$, to spełniona jest własność $\mathrm{W}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$.*

(4) *Jeżeli ideały $\mathcal{I}, \mathcal{K}$ są ortogonalne oraz ideały $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ nie są ortogonalne, to zachodzi własność $\mathrm{W}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$.*

Następny przykład pokazuje, iż z faktu, że dla pewnych ideałów własność $\mathrm{W}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$ nie jest spełniona nie wynika, że ideały $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ muszą być ortogonalne.

Przykład 1.15 *Niech $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ będą ideałami na ω. Wówczas ideały $\emptyset \otimes \mathcal{I}$ i $\mathcal{J} \otimes \emptyset$ nie są ortogonalne i nie zachodzi własność $\mathrm{W}(\emptyset \otimes \mathcal{I}, \mathcal{J} \otimes \emptyset, \emptyset \otimes \mathcal{I})$.*

Dowód. Jeżeli $A \in \mathcal{J} \otimes \emptyset$, to istnieje $n \in \omega$ takie, że $A \cap (\{n\} \times \omega) = \emptyset$, więc $(\omega \times \omega) \setminus A \in (\emptyset \otimes \mathcal{I})^+$. Zatem ideały $\emptyset \otimes \mathcal{I}$ i $\mathcal{J} \otimes \emptyset$ nie są ortogonalne.

Pokażemy teraz, że własność $\mathrm{W}(\emptyset \otimes \mathcal{I}, \mathcal{J} \otimes \emptyset, \emptyset \otimes \mathcal{I})$ nie jest spełniona. Niech $A_n = \{n\} \times \omega$ dla $n \in \omega$. Wtedy $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{J} \otimes \emptyset$ jest wymaganą partycją. Istotnie, niech $S \subseteq \omega \times \omega$ będzie zbiorem takim, że $A_n \cap S \in \emptyset \otimes \mathcal{I}$ dla każdego $n \in \omega$. Wówczas $\{k \in \omega : (n, k) \in S\} \in \mathcal{I}$ dla dowolnego $n \in \omega$. Stąd $S \in \emptyset \otimes \mathcal{I}$. □

W poniższym stwierdzeniu określamy, jaka jest struktura ideału $\mathcal{I}$ przy założeniu, że własność $\mathrm{W}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$ nie jest spełniona oraz ideały $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ nie są ortogonalne.

Stwierdzenie 1.16 *Jeżeli $\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K}$ są ideałami na ω, dla których nie zachodzi własność* $\mathrm{W}(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K})$*, to $\mathcal{I},\mathcal{J}$ są ortogonalne lub $\mathcal{I}$ zawiera izomorficzną kopię ideału* $\emptyset\otimes\mathrm{Fin}$.

Dowód. Niech $\{A_n : n\in\omega\}\subseteq\mathcal{J}$ będzie taką partycją zbioru ω, że jeżeli $S\in\mathcal{I}^+$, to $A_0\cap S\in\mathcal{I}^+$ lub $A_{n+1}\cap S\in\mathcal{K}^+$ dla pewnego $n\in\omega$. Zdefiniujmy zbiór $A=\{n\in\omega : A_n \text{ jest zbiorem nieskończonym}\}$.

Załóżmy najpierw, że zbiór A jest skończony. Niech $B=\bigcup\{A_n : n\in A\}\in\mathcal{J}$. Pokażemy, że $\omega\setminus B\in\mathcal{I}$ (będzie to oznaczało, że ideały $\mathcal{I},\mathcal{J}$ są ortogonalne).

Przypuśćmy przeciwnie, że $S=\omega\setminus B\in\mathcal{I}^+$. Wtedy $A_0\cap S\in\mathcal{I}^+$ lub $A_n\cap S\in\mathcal{K}^+$ dla pewnego $n\in\omega\setminus(A\cup\{0\})$. Stąd dla pewnego $m\in\omega\setminus A$ zbiór $A_m\cap S$ jest nieskończony. Z drugiej strony, jeżeli $m\in\omega\setminus A$, to A_m jest zbiorem skończonym, a zatem zbiór $A_m\cap S$ jest skończony. Otrzymaliśmy sprzeczność.

Załóżmy teraz, że zbiór A jest nieskończony. Niech $A=\{a_n : n\in\omega\}$ będzie różnowartościowym ponumerowaniem zbioru A i niech $\phi:\omega\to\omega\times\omega$ będzie taką bijekcją, że

$$\phi\left[A_{a_0}\cup\bigcup\{A_n : n\in\omega\setminus A\}\right]=\{0\}\times\omega$$

i $\phi[A_{a_n}]=\{n\}\times\omega$ dla $n\geqslant 1$. Twierdzimy, że $\phi^{-1}[B]\in\mathcal{I}$ dla każdego $B\in\emptyset\otimes\mathrm{Fin}$ (zatem $\mathcal{I}$ zawiera izomorficzną kopię ideału $\emptyset\otimes\mathrm{Fin}$).

Niech $B\in\emptyset\otimes\mathrm{Fin}$. Pokażemy, że $A_n\cap\phi^{-1}[B]\in\mathrm{Fin}$ dla każdego $n\in\omega$. Jeżeli $n\in\omega\setminus A$, to $A_n\cap\phi^{-1}[B]\subseteq A_n\in\mathrm{Fin}$. Załóżmy teraz, że $n\in A$. Istnieje $k\in\omega$ takie, że $n=a_k$. Niech $B_i=\{m\in\omega : (i,m)\in B\}$ dla każdego $i\in\omega$. Wówczas każdy zbiór B_i jest skończony oraz

$$A_n\cap\phi^{-1}[B]=A_n\cap\phi^{-1}\left[\bigcup_i\{i\}\times B_i\right]=A_n\cap\bigcup_i\phi^{-1}[\{i\}\times B_i]=$$

$$A_n\cap\phi^{-1}[\{k\}\times B_k]\subseteq\phi^{-1}[\{k\}\times B_k]\in\mathrm{Fin}.$$

Zatem $A_n\cap\phi^{-1}[B]\in\mathrm{Fin}$ dla każdego $n\in\omega$. Stąd $\phi^{-1}[B]\in\mathcal{I}$ (z założenia, że nie zachodzi własność $\mathrm{W}(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K})$). □

Zauważmy, że jeżeli $\mathcal{I}=\mathcal{J}=\mathcal{K}=\emptyset\otimes\mathrm{Fin}$, to ideał $\mathcal{I}$ zawiera izomorficzną kopię ideału $\emptyset\otimes\mathrm{Fin}$, ale własność $\mathrm{W}(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K})$ jest spełniona. Zatem implikacji w Stwierdzeniu 1.16 nie możemy odwrócić.

1.5.3 Własność $\mathrm{B}(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K},\kappa)$

Definicja 1.17 (por. [47]) Niech $\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K}$ będą ideałami na ω i niech κ będzie dowolną liczbą kardynalną. Mówimy, że zachodzi własność $\mathrm{B}(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K},\kappa)$, jeżeli dla dowolnej rodziny $\{E_n^\alpha : n\in\omega,\alpha<\kappa\}\subseteq\mathcal{K}$ takiej, że $E_n^\alpha\cap E_k^\alpha=\emptyset$ dla $n\neq k,\alpha<\kappa$, istnieje partycja $\{A_n : n\in\omega\}\subseteq\mathcal{J}$ zbioru ω taka, że

$$\bigcup_{n\in\omega}\left(A_{n+1}\cap\bigcup_{i\leqslant n}E_i^\alpha\right)\in\mathcal{I}$$

dla każdego $\alpha < \kappa$.

Własność $\mathrm{B}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}, \kappa)$ będzie nam potrzebna do zdefiniowania współczynnika kardynalnego $\mathfrak{b}\,(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$ w następnej części rozprawy.

Stwierdzenie 1.18 $\mathrm{B}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}, \kappa)$ *zachodzi dla każdego κ wtedy i tylko wtedy, gdy nie zachodzi własność* $\mathrm{W}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$.

Dowód. ($\Rightarrow$) Załóżmy, że $\{\{E_n^\alpha : n \in \omega\} : \alpha < \mathfrak{c}\}$ jest zbiorem wszystkich rodzin $\{E_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{K}$, składających się ze zbiorów parami rozłącznych. Z założenia $\mathrm{B}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}, \mathfrak{c})$ istnieje taka partycja $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{J}$ zbioru ω, że

$$\bigcup_{n\in\omega} \left(A_{n+1} \cap \bigcup_{i \leqslant n} E_i^\alpha \right) \in \mathcal{I}$$

dla wszystkich $\alpha < \mathfrak{c}$. Pokażemy, że nie zachodzi własność $\mathrm{W}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$.

Niech $S \subseteq \omega$ będzie takim zbiorem, że $A_0 \cap S \in \mathcal{I}$ oraz $A_{n+1} \cap S \in \mathcal{K}$ dla każdego $n \in \omega$. Istnieje takie $\alpha < \mathfrak{c}$, że $E_n^\alpha = A_{n+1} \cap S$ dla wszystkich $n \in \omega$. Wówczas

$$S = (A_0 \cap S) \cup \bigcup_{n\in\omega} (A_{n+1} \cap E_n^\alpha) \subseteq (A_0 \cap S) \cup \bigcup_{n\in\omega} \left(A_{n+1} \cap \bigcup_{i \leqslant n} E_i^\alpha \right) \in \mathcal{I}.$$

($\Leftarrow$) Ustalmy liczbę kardynalną κ oraz rodzinę $\{E_n^\alpha : n \in \omega, \alpha < \kappa\} \subseteq \mathcal{K}$ spełniającą $E_n^\alpha \cap E_k^\alpha = \emptyset$ dla $n \neq k, \alpha < \kappa$. Z założenia, że nie zachodzi własność $\mathrm{W}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$, istnieje taka partycja $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{J}$ zbioru ω, że dla każdego $S \in \mathcal{I}^+$ istnieje $n \in \omega$ takie, że $A_{n+1} \cap S \in \mathcal{K}^+$ lub $A_0 \cap S \in \mathcal{I}^+$. Aby zakończyć dowód stwierdzenia wystarczy pokazać, że

$$\bigcup_{n\in\omega} \left(A_{n+1} \cap \bigcup_{i \leqslant n} E_i^\alpha \right) \in \mathcal{I}$$

dla wszystkich $\alpha < \kappa$.

Przypuśćmy przeciwnie, że $S = \bigcup_{n\in\omega} (A_{n+1} \cap \bigcup_{i\leqslant n} E_i^\alpha) \in \mathcal{I}^+$ dla pewnego $\alpha < \kappa$. Ponieważ $A_0 \cap S = \emptyset$, więc istnieje $n_0 \in \omega$ takie, że $A_{n_0+1} \cap S \in \mathcal{K}^+$. Z drugiej strony, $A_{n_0+1} \cap S = A_{n_0+1} \cap \bigcup_{i \leqslant n_o} E_i^\alpha \in \mathcal{K}$, a zatem otrzymaliśmy sprzeczność. □

Stwierdzenie 1.19 *Niech $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$, $\mathcal{K}$ będą ideałami na ω. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Własność* $\mathrm{B}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}, s)$ *zachodzi dla wszystkich $s \in \omega$.*

(2) *Zachodzi własność* $\mathrm{B}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}, 1)$.

(3) *$\mathcal{K}$ jest ω-$P\,(\mathcal{J}, \mathcal{I})$-ideałem.*

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2). Oczywiste.

(2) $\Rightarrow$ (3). Niech $\{E_k : k \in \omega\} \subseteq \mathcal{K}$. Z założenia $\mathrm{B}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}, 1)$ wynika, że istnieje taka partycja $\{A_k : k \in \omega\} \subseteq \mathcal{J}$ zbioru ω, że $B = \bigcup_{n\in\omega}(A_{n+1} \cap \bigcup_{i\leqslant n} E_i) \in \mathcal{I}$. Wówczas $E_k \setminus B \subseteq A_0 \cup \bigcup_{n<k}(A_{n+1} \cap \bigcup_{i\leqslant n} E_i) \in \mathcal{J}$ dla dowolnego $k \in \omega$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Niech $s \in \omega$ i niech $\{E_n^m : n \in \omega, m \leqslant s\} \subseteq \mathcal{K}$ będzie taką rodziną, że $E_n^m \cap E_k^m = \emptyset$ dla $n \neq k$, $m \leqslant s$. Ponieważ $\mathcal{K}$ jest ω-$P\,(\mathcal{J},\mathcal{I})$-ideałem, więc istnieje taki zbiór $B \in \mathcal{I}$, że $E_n^m \setminus B \in \mathcal{J}$ dla każdego $n \in \omega$, $m \leqslant s$. Zdefiniujmy zbiory $B_0 = \bigcup_{m\leqslant s}(E_0^m \setminus B)$ oraz $B_k = (\bigcup_{m\leqslant s} E_k^m \setminus B) \cap (\omega \setminus \bigcup_{n<k} B_n)$ dla $k \geqslant 1$. Niech $\{e_k : k \in \omega\}$ będzie różnowartościowym ponumerowaniem zbioru $(\omega \setminus \bigcup_{m\leqslant s} \bigcup_{n\in\omega} E_n^m) \cup B$ (w przypadku, gdy ten zbiór jest skończony dalszy ciąg dowodu będzie analogiczny do następującego). Zdefiniujmy teraz zbiory $A_k = B_k \cup \{e_k\}$ dla wszystkich $k \in \omega$. Wówczas $\{A_k : k \in \omega\} \subseteq \mathcal{J}$ jest partycją ω. Aby zakończyć dowód stwierdzenia wystarczy pokazać, że $\bigcup_{k\in\omega}(A_{k+1} \cap \bigcup_{i\leqslant k} E_i^m) \subseteq B \in \mathcal{I}$ dla każdego $m \leqslant s$.

Ustalmy $m \leqslant s$. Przypuśćmy, że $n \in (A_{k+1} \cap \bigcup_{i\leqslant k} E_i^m)$ dla pewnego $k \in \omega$. Ponieważ $n \in A_{k+1}$, więc $n \in (\omega \setminus \bigcup_{i\leqslant k} E_i^m) \cup \{e_{k+1}\}$. Z drugiej strony założyliśmy, że $n \in \bigcup_{i\leqslant k} E_i^m$, a zatem $n = e_{k+1} \in B$. $\square$

Definicja 1.20 (por. [47]) *Niech $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ będą ideałami na ω. Mówimy, że zachodzi własność $P(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$, jeżeli dla każdej rodziny $\{E_k : k \in \omega\} \subseteq \mathcal{K}$ istnieją zbiory $A \in \mathcal{J}$ i $B \in \mathcal{I}$ takie, że $E_k \setminus A \in \mathcal{I}$ oraz $E_k \setminus B \in \mathcal{J}$ dla każdego $k \in \omega$.*

Łatwo zauważyć, że własność $P(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{K}$ jest jednocześnie ω-$P\,(\mathcal{I},\mathcal{J})$-ideałem i ω-$P\,(\mathcal{J},\mathcal{I})$-ideałem.

Stwierdzenie 1.21 $\mathrm{B}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}, \omega)$ *zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy spełniona jest własność $P(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$.*

Dowód. ($\Rightarrow$) Przypuśćmy przeciwnie, że nie jest spełniona własność $P(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$. Niech $\{E_k : k \in \omega\} \subseteq \mathcal{K}$ będzie taką rodziną, że dla dowolnych zbiorów $A \in \mathcal{J}$ i $B \in \mathcal{I}$ istnieje $k \in \omega$ takie, że $E_k \setminus A \in \mathcal{I}^+$ lub $E_k \setminus B \in \mathcal{J}^+$. Zdefiniujmy $E_k^0 = E_k$ i $E_0^k = E_k$ dla każdego $k \in \omega$ oraz $E_n^k = \emptyset$ dla $k, n \geqslant 1$. Niech $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{J}$ będzie partycją ω taką, że $B_m = \bigcup_{n\in\omega}(A_{n+1} \cap \bigcup_{i\leqslant n} E_i^m) \in \mathcal{I}$ dla każdego $m \in \omega$. Wówczas istnieje $k_0 \in \omega$ takie, że $E_{k_0}^0 \setminus A_0 \in \mathcal{I}^+$ lub $E_{k_0}^0 \setminus B_0 \in \mathcal{J}^+$. Jeżeli $E_{k_0}^0 \setminus B_0 \in \mathcal{J}^+$, to mamy sprzeczność z

$$E_{k_0}^0 \setminus B_0 \subseteq A_0 \cup \bigcup_{k<k_0}\left(A_{k+1} \cap \bigcup_{i\leqslant k} E_i^0\right) \in \mathcal{J}.$$

Jeżeli $E_{k_0}^0 \setminus A_0 \in \mathcal{I}^+$, to $B_{k_0} = E_0^{k_0} \setminus A_0 \in \mathcal{I}^+$ (ponieważ $E_{k_0}^0 = E_0^{k_0}$), więc również otrzymujemy sprzeczność.

($\Leftarrow$) Niech $\{E_n^m : n, m \in \omega\} \subseteq \mathcal{K}$ będzie taką rodziną, że $E_n^m \cap E_k^m = \emptyset$ dla $n \neq k$, $m \in \omega$. Istnieją zbiory $A \in \mathcal{J}$ i $B \in \mathcal{I}$, dla których $E_n^m \setminus A \in \mathcal{I}$ oraz

$E_n^m \setminus B \in \mathcal{J}$ dla wszystkich $n, m \in \omega$. Niech $\{e_k : k \in \omega\}$ będzie różnowartościowym ponumerowaniem zbioru $(\omega \setminus \bigcup_{m\in\omega}\bigcup_{n\in\omega} E_n^m) \cup B$ (w przypadku, gdy ten zbiór jest skończony dalszy ciąg dowodu będzie analogiczny do następującego). Zdefiniujmy

$$A_0 = \left(E_0^0 \setminus B\right) \cup A \cup \{e_0\},$$

$$A_k = \left(\left(\bigcup_{i\leqslant k}\bigcup_{j\leqslant k} E_i^j \setminus B\right) \cup \{e_k\}\right) \cap \left(\omega \setminus \bigcup_{n<k} A_n\right)$$

dla wszystkich $k \geqslant 1$. Wówczas $\{A_k : k \in \omega\} \subseteq \mathcal{J}$ jest partycją ω. Pokażemy, że

$$\bigcup_{k\in\omega}\left(A_{k+1} \cap \bigcup_{i\leqslant k} E_i^m\right) \subseteq \bigcup_{i<m} (E_i^m \setminus A) \cup B \in \mathcal{I}$$

dla każdego $m \in \omega$ (zatem zachodzi $\mathrm{B}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}, \omega)$).

Ustalmy $m \in \omega$. Przypuśćmy, że $n \in A_{k+1} \cap \bigcup_{i\leqslant k} E_i^m$ dla pewnego $k \in \omega$. Ponieważ $n \in \bigcup_{i>0} A_i$, więc $n \in \omega \setminus A$. Ponadto $n \in (\omega \setminus \bigcup_{i\leqslant k}\bigcup_{j\leqslant k} E_i^j) \cup \{e_{k+1}\}$, gdyż $n \in A_{k+1}$. Z drugiej strony założyliśmy, że $n \in \bigcup_{i\leqslant k} E_i^m$. Stąd, jeżeli $n = e_{k+1}$, to $n \in B$. W przeciwnym przypadku $k < m$, a zatem $n \in \bigcup_{i<m} E_i^m$. □

Poniższy wniosek wynika ze Stwierdzeń 1.18 i 1.21.

Wniosek 1.22 *Jeżeli nie zachodzi własność* $\mathrm{W}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$*, to spełniona jest własność* $P(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$.

Stwierdzenie 1.23 $\mathrm{B}(\mathrm{Fin}, \mathcal{J}, \mathrm{Fin}, \kappa)$ *zachodzi dla każdego* $\mathcal{J}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\kappa < \mathfrak{b}$.

Dowód. ($\Rightarrow$) Przypuśćmy przeciwnie, że $\kappa \geqslant \mathfrak{b}$ oraz zachodzi $\mathrm{B}(\mathrm{Fin}, \mathcal{J}, \mathrm{Fin}, \kappa)$. Wówczas $\mathrm{B}(\mathrm{Fin}, \mathcal{J}, \mathrm{Fin}, \mathfrak{b})$ również zachodzi (co wynika wprost z definicji). Niech $\{f_\alpha \in \omega^\omega : \alpha < \mathfrak{b}\}$ będzie rodziną, dla której nie istnieje funkcja $g \in \omega^\omega$ taka, że $\{n \in \omega : f_\alpha(n) \geqslant g(n)\} \in \mathrm{Fin}$ dla wszystkich $\alpha < \mathfrak{b}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że każda funkcja f_α jest ściśle rosnąca. Dla każdego $\alpha < \mathfrak{b}$ zdefiniujmy zbiory $E_0^\alpha = \{i \in \omega : i \leqslant f_\alpha(1)\}$ oraz $E_n^\alpha = \{i \in \omega : f_\alpha(n) < i \leqslant f_\alpha(n+1)\}$ dla wszystkich $n \geqslant 1$. Ponieważ zachodzi własność $\mathrm{B}(\mathrm{Fin}, \mathcal{J}, \mathrm{Fin}, \mathfrak{b})$, więc istnieje taka partycja $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{J}$ zbioru ω, że

$$\bigcup_{n\in\omega}\left(A_{n+1} \cap \bigcup_{i\leqslant n} E_i^\alpha\right) \in \mathrm{Fin}$$

dla każdego $\alpha < \mathfrak{b}$. Zbiory A_n są parami rozłączne, zatem dla każdego $\alpha < \mathfrak{b}$ istnieje $N_\alpha \in \omega$ takie, że $A_{n+1} \cap \bigcup_{i\leqslant n} E_i^\alpha = \emptyset$ dla wszystkich $n > N_\alpha$. Niech (k_n) będzie rosnącym ciągiem tych wszystkich indeksów, dla których zbiory A_{k_n} są niepuste. Dla każdego $n \in \omega$ wybierzmy punkt $a_{k_n} \in A_{k_n}$ i zdefiniujmy funkcję $g \in \omega^\omega$ wzorem $g(n) = a_{k_n}$. Twierdzimy, że $\{n \in \omega : f_\alpha(n) \geqslant g(n)\} \in \mathrm{Fin}$ dla każdego $\alpha < \mathfrak{b}$ (wtedy otrzymamy sprzeczność z wyborem f_α).

Ustalmy $\alpha < \mathfrak{b}$. Ponieważ $A_{n+1} \cap \bigcup_{i \leqslant n} E_i^\alpha = \emptyset$ dla wszystkich $n > N_\alpha$, więc również $A_{k_{n+1}} \cap \bigcup_{i \leqslant n} E_i^\alpha = \emptyset$ dla każdego $n > N_\alpha$. Ponadto $\bigcup_{i \leqslant n} E_i^\alpha = \{i \in \omega : i \leqslant f_\alpha(n+1)\}$. Zatem $g(n+1) > f_\alpha(n+1)$ dla wszystkich $n > N_\alpha$.

($\Leftarrow$) Ustalmy $\kappa < \mathfrak{b}$. Niech $\{E_n^\alpha : n \in \omega, \alpha < \kappa\} \subseteq \mathrm{Fin}$ będzie taką rodziną, że $E_n^\alpha \cap E_k^\alpha = \emptyset$ dla $n \neq k, \alpha < \kappa$. Dla każdego $\alpha < \kappa$ zdefiniujmy $f_\alpha \in \omega^\omega$ wzorem $f_\alpha(n) = \max(\bigcup_{i \leqslant n} E_i^\alpha \cup \{0\})$. Ponieważ $\kappa < \mathfrak{b}$, więc istnieje funkcja $g \in \omega^\omega$ taka, że $\{n \in \omega : f_\alpha(n) \geqslant g(n)\} \in \mathrm{Fin}$ dla wszystkich $\alpha < \kappa$. Bez straty ogólności możemy założyć, że g jest ściśle rosnąca. Zdefiniujmy zbiory $A_0 = \{i \in \omega : i \leqslant g(0)\}$ oraz $A_n = \{i \in \omega : g(n-1) < i \leqslant g(n)\}$ dla $n \geqslant 1$. Wówczas $\{A_n : n \in \omega\}$ jest partycją zbioru ω i $A_n \in \mathrm{Fin} \subseteq \mathcal{J}$. Twierdzimy, że

$$\bigcup_{n \in \omega} \left(A_{n+1} \cap \bigcup_{i \leqslant n} E_i^\alpha \right) \in \mathrm{Fin}$$

dla każdego $\alpha < \kappa$ (zatem zachodzi własność $\mathrm{B}(\mathrm{Fin}, \mathcal{J}, \mathrm{Fin}, \kappa)$).

Niech $\alpha < \kappa$. Przypomnijmy, że $\{n \in \omega : f_\alpha(n) \geqslant g(n)\} \in \mathrm{Fin}$, zatem istnieje $N \in \omega$ takie, że $f_\alpha(n) < g(n)$ dla każdego $n \geqslant N$. Ponieważ $f_\alpha(n) = \max(\bigcup_{i \leqslant n} E_i^\alpha \cup \{0\})$ i $g(n) < \min(A_{n+1})$, więc $A_{n+1} \cap \bigcup_{i \leqslant n} E_i^\alpha = \emptyset$ dla $n \geqslant N$. Stąd

$$\bigcup_{n \in \omega} \left(A_{n+1} \cap \bigcup_{i \leqslant n} E_i^\alpha \right) = \bigcup_{n < N} \left(A_{n+1} \cap \bigcup_{i \leqslant n} E_i^\alpha \right) \in \mathrm{Fin}.$$

□

Stwierdzenie 1.24 *Jeżeli $\mathcal{K}$ jest ω-$P(\mathrm{Fin}, \mathcal{I})$-ideałem, to $\mathrm{B}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}, \kappa)$ zachodzi dla każdych $\mathcal{J}$ oraz $\kappa < \mathfrak{b}$.*

Dowód. Ustalmy $\kappa < \mathfrak{b}$. Niech $\{E_n^\alpha : n \in \omega, \alpha < \kappa\} \subseteq \mathcal{K}$ będzie taką rodziną, że $E_n^\alpha \cap E_k^\alpha = \emptyset$ dla $n \neq k$, $\alpha < \kappa$. Ponieważ $\mathcal{K}$ jest ω-$P(\mathrm{Fin}, \mathcal{I})$-ideałem, więc dla każdego $\alpha < \kappa$ istnieje zbiór $E_\alpha \in \mathcal{I}$ taki, że $E_n^\alpha \setminus E_\alpha \in \mathrm{Fin}$ dla wszystkich $n \in \omega$. Dla każdego $\alpha < \kappa$ zdefiniujmy $f_\alpha \in \omega^\omega$ wzorem $f_\alpha(n) = \max(\bigcup_{i \leqslant n} E_i^\alpha \setminus E_\alpha \cup \{0\})$. Ponieważ $\kappa < \mathfrak{b}$, więc istnieje taka funkcja $g \in \omega^\omega$, że $\{n \in \omega : f_\alpha(n) \geqslant g(n)\} \in \mathrm{Fin}$ dla wszystkich $\alpha < \kappa$. Bez straty ogólności możemy założyć, że g jest ściśle rosnąca. Zdefiniujmy zbiory $A_0 = \{i \in \omega : i \leqslant g(0)\}$ oraz $A_n = \{i \in \omega : g(n-1) < i \leqslant g(n)\}$ dla $n \geqslant 1$. Wówczas $\{A_n : n \in \omega\}$ jest partycją ω i $A_n \in \mathrm{Fin} \subseteq \mathcal{J}$ dla $n \in \omega$. Twierdzimy, że

$$\bigcup_{n \in \omega} \left(A_{n+1} \cap \bigcup_{i \leqslant n} E_i^\alpha \right) \in \mathcal{I}$$

dla każdego $\alpha < \kappa$ (zatem zachodzi własność $\mathrm{B}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}, \kappa)$).

Niech $\alpha < \kappa$. Istnieje $N \in \omega$ takie, że $f_\alpha(n) < g(n)$ dla każdego $n \geqslant N$. Ponieważ $f_\alpha(n) = \max(\bigcup_{i \leqslant n} E_i^\alpha \setminus E_\alpha \cup \{0\})$ i $g(n) < \min(A_{n+1})$, więc

$$A_{n+1} \cap \left(\bigcup_{i \leqslant n} E_i^\alpha \setminus E_\alpha \right) = \emptyset$$

dla $n \geqslant N$. Stąd

$$\bigcup_{n\in\omega}\left(A_{n+1}\cap\bigcup_{i\leqslant n}E_i^\alpha\right)\subseteq\bigcup_{n\in\omega}\left(A_{n+1}\cap\left(\bigcup_{i\leqslant n}E_i^\alpha\setminus E_\alpha\right)\right)\cup E_\alpha$$

$$=\bigcup_{n<N}\left(A_{n+1}\cap\left(\bigcup_{i\leqslant n}E_i^\alpha\setminus E_\alpha\right)\right)\cup E_\alpha\in\mathcal{I}.$$

□

1.5.4 Współczynnik kardynalny $\mathfrak{b}\left(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K}\right)$

Niech $\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K}$ będą ideałami na ω. Zdefiniujmy następujący współczynnik kardynalny

$$\mathfrak{b}\left(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K}\right)=\min\left(\{\kappa\leqslant\mathfrak{c}:\mathrm{B}(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K},\kappa)\text{ nie zachodzi}\}\cup\{\mathfrak{c}^+\}\right).$$

Współczynnik $\mathfrak{b}\left(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K}\right)$ będzie odgrywał kluczową rolę w badaniu $\mathcal{K}$-zbieżnych ciągów funkcyjnych, które są również $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-e-zbieżne do tej samej granicy. W przypadku, gdy $\mathcal{K}=\mathcal{I}$ otrzymujemy współczynnik kardynalny $\mathfrak{b}\left(\mathcal{I},\mathcal{J}\right)$ wprowadzony w pracy [24].

Uwaga 1.25 Dla ideału $\mathcal{K}$ na ω moc zbioru wszystkich rodzin $\{E_n:n\in\omega\}\subseteq\mathcal{K}$, składających się ze zbiorów parami rozłącznych, wynosi continuum. Ze Stwierdzenia 1.18 wynika, że jeżeli jest spełniona własność $\mathrm{W}(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K})$, to istnieje takie κ, że $\mathrm{B}(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K},\kappa)$ nie zachodzi. Zatem w tym przypadku $\mathfrak{b}\left(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K}\right)\leqslant\mathfrak{c}$. Z drugiej strony, jeżeli nie jest spełniona własność $\mathrm{W}(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K})$, to $\mathrm{B}(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K},\kappa)$ zachodzi dla wszystkich κ (por. ponownie Stwierdzenie 1.18). Stąd wynika potrzeba użycia następnika kardynalnego liczby $\mathfrak{c}$ w definicji współczynnika $\mathfrak{b}\left(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K}\right)$.

Poniższe twierdzenie wynika ze Stwierdzeń 1.18, 1.19 i 1.21.

Twierdzenie 1.26 *Niech $\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K}$ będą ideałami na ω.*

(1) *Jeżeli własność $\mathrm{W}(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K})$ nie zachodzi, to $\mathfrak{b}\left(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K}\right)=\mathfrak{c}^+$.*

(2) *Jeżeli własność $\mathrm{W}(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K})$ zachodzi, to $\mathfrak{b}\left(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K}\right)\leqslant\mathfrak{c}$.*

(3) *Jeżeli własność $P(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K})$ nie zachodzi, to $\mathfrak{b}\left(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K}\right)\leqslant\omega$.*

(4) *Jeżeli własność $P(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K})$ zachodzi, to $\mathfrak{b}\left(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K}\right)>\omega$.*

(5) *Jeżeli $\mathcal{K}$ jest ω-$P\left(\mathcal{J},\mathcal{I}\right)$-ideałem, to $\mathfrak{b}\left(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K}\right)\geqslant\omega$.*

(6) *Jeżeli $\mathcal{K}$ nie jest ω-$P\left(\mathcal{J},\mathcal{I}\right)$-ideałem, to $\mathfrak{b}\left(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K}\right)=1$.*

Poniższe twierdzenie wynika ze Stwierdzeń 1.23 i 1.24.

Twierdzenie 1.27 *Niech $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ będą ideałami na ω.*

(1) $\mathfrak{b}(\mathrm{Fin}, \mathcal{J}, \mathrm{Fin}) = \mathfrak{b}$.

(2) *Jeżeli $\mathcal{K}$ jest ω-$P(\mathrm{Fin}, \mathcal{I})$-ideałem, to $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{b}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$.*

Wniosek 1.28 *Załóżmy aksjomat Martina. Niech $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ będą ideałami na ω.*

(1) $\mathfrak{b}(\mathrm{Fin}, \mathcal{J}, \mathrm{Fin}) = \mathfrak{c}$.

(2) *Jeżeli $\mathcal{K}$ jest ω-$P(\mathrm{Fin}, \mathcal{I})$-ideałem oraz zachodzi własność $\mathrm{W}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$, to wówczas $\mathfrak{b}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}) = \mathfrak{c}$.*

Dowód. Przy założeniu aksjomatu Martina $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, zatem teza wynika z Twierdzeń 1.26 i 1.27. □

Rozdział 2

Porównanie e-zbieżności idealowej z innymi rodzajami zbieżności

2.1 E-zbieżność idealowa

W tej części wprowadzimy, najważniejszą w całej pracy, definicję e-zbieżności idealowej ciągów funkcyjnych.

Dla uproszczenia ciągi liczbowe $(x_n)_{n\in\omega}$, funkcyjne $(f_n)_{n\in\omega}$ oraz ciągi zbiorów $(A_n)_{n\in\omega}$ będziemy często oznaczać (x_n), (f_n) oraz (A_n).

Definicja 2.1 (por. [32]) Niech $\mathcal{J}$ będzie ideałem na ω. Mówimy, że ciąg liczb rzeczywistych (x_n) jest *$\mathcal{J}$-zbieżny do* $x \in \mathbb{R}$, jeżeli $\{n \in \omega : |x_n - x| \geqslant \varepsilon\} \in \mathcal{J}$ dla każdego $\varepsilon > 0$. W tym przypadku będziemy pisać $(x_n) \xrightarrow{\mathcal{J}} x$.

Definicja 2.2 (por. [23]) Niech $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ będą ideałami na ω. Załóżmy, że f_n $(n \in \omega)$ i f są funkcjami rzeczywistymi określonymi na zbiorze X. Mówimy, że ciąg (f_n) jest *$(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-e-zbieżny do* f, jeżeli istnieje taki $\mathcal{J}$-zbieżny do 0 ciąg dodatnich liczb rzeczywistych (ε_n), że $\{n \in \omega : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}$ dla każdego $x \in X$. W takim przypadku przyjmujemy oznaczenie $(f_n) \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})-e} f$.

Dla ideałów $\mathcal{I} = \mathcal{J} = \mathrm{Fin}$ otrzymujemy równą zbieżność (ang. equal convergence) wprowadzoną przez Császára i Laczkovicha w [15]. Będziemy pisać $(f_n) \xrightarrow{e} f$ zamiast $(f_n) \xrightarrow{(\mathrm{Fin},\mathrm{Fin})-e} f$.

Definicja $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-e-zbieżności uogólnia wprowadzone wcześniej przez Dasa Duttę i Pala w [19] oraz Filipowa i Szucę w [25] definicje e-zbieżności idealowej: e-zbieżność idealowa z pracy [19] jest równoważna $(\mathcal{I}, \mathcal{I})$-e-zbieżności, natomiast e-zbieżność idealowa z pracy [25] jest równoważna $(\mathcal{I}, \mathrm{Fin})$-e-zbieżności w naszej notacji. Ponadto w [23] pokazaliśmy, że e-zbieżności wprowadzone w [19] i [25] są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{I}$ jest P-ideałem (por. [23, Wnioski 3.3 i 3.5]).

Istnieje pewna klasa par ideałów, które nie będą dla nas szczególnie interesujące, bowiem okazuje się, że ciąg funkcyjny może być $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-e-zbieżny do wielu funkcji. W poniższym twierdzeniu charakteryzujemy ideały, dla których granica jest wyznaczona jednoznacznie.

Twierdzenie 2.3 *Załóżmy, że X jest niepustym zbiorem. Niech $\mathcal{I},\mathcal{J}$ będą ideałami na ω. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Dla dowolnego ciągu (f_n) funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze X, jeżeli $(f_n) \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})-e} f$ i $(f_n) \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})-e} g$ dla pewnych $f,g \in \mathbb{R}^X$, to $f = g$.*

(2) *Ideały $\mathcal{I},\mathcal{J}$ nie są ortogonalne.*

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2). Załóżmy, że ideały $\mathcal{I},\mathcal{J}$ są ortogonalne. Niech $A \in \mathcal{I}$ będzie takim zbiorem, że $\omega \setminus A \in \mathcal{J}$. Zdefiniujmy funkcje $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \omega)$ wzorem $f_n(x) = f(x) = 0$ dla wszystkich $n \in \omega$ oraz $x \in X$. Wówczas ciąg (f_n) jest $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-e-zbieżny do f.

Niech $g : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją daną wzorem $g(x) = 1$ dla wszystkich $x \in X$. Zdefiniujmy ciąg liczb dodatnich (ε_n) w następujący sposób:

$$\varepsilon_n = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{gdy } n \in A, \\ 2 & \text{gdy } n \in \omega \setminus A. \end{cases}$$

Wówczas $(\varepsilon_n) \xrightarrow{\mathcal{J}} 0$ i $\{n \in \omega : |f_n(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon_n\} = A \in \mathcal{I}$ dla każdego $x \in X$. Stąd (f_n) jest $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-e-zbieżny do g. Ponadto $g \neq f$, a zatem nie zachodzi (1).

(2) $\Rightarrow$ (1). Załóżmy, że istnieje ciąg funkcyjny (f_n), który jest $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-e-zbieżny do dwóch różnych funkcji f i g.

Oznaczmy przez x_0 element zbioru X, dla którego $f(x_0) \neq g(x_0)$. Istnieją takie $\mathcal{J}$-zbieżne do 0 ciągi dodatnich liczb rzeczywistych (η_n) i (ζ_n), że $A_\eta = \{n \in \omega : |f_n(x_0) - f(x_0)| \geqslant \eta_n\} \in \mathcal{I}$ i $A_\zeta = \{n \in \omega : |f_n(x_0) - g(x_0)| \geqslant \zeta_n\} \in \mathcal{I}$. Niech $\varepsilon = |f(x_0) - g(x_0)|/2 > 0$. Zdefiniujmy zbiory $B_\eta = \{n \in \omega : \eta_n \geqslant \varepsilon\}$ oraz $B_\zeta = \{n \in \omega : \zeta_n \geqslant \varepsilon\}$. Wtedy $B = B_\eta \cup B_\zeta \in \mathcal{J}$. Pokażemy, że $\omega \setminus B \subseteq A_\eta \cup A_\zeta \in \mathcal{I}$. Wówczas otrzymamy, że nie zachodzi (2).

Przypuśćmy przeciwnie, że istnieje $n \in \omega \setminus B$ takie, że $n \notin A_\eta$ i $n \notin A_\zeta$. Wtedy $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \eta_n < \varepsilon$ i $|f_n(x_0) - g(x_0)| < \zeta_n < \varepsilon$. Stąd $|f(x_0) - g(x_0)| \leqslant |f(x_0) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - g(x_0)| < 2\varepsilon$. Otrzymaliśmy sprzeczność z wyborem ε. □

Odnotujmy jeszcze jedną prostą obserwację, którą pozostawiamy bez dowodu.

Fakt 2.4 *Niech f, f_n $(n \in \omega)$ będą funkcjami rzeczywistymi określonymi na zbiorze X oraz niech $\mathcal{I}_0, \mathcal{I}_1, \mathcal{J}_0, \mathcal{J}_1$ będą ideałami na ω.*

(1) *Jeżeli $\mathcal{I}_0 \subseteq \mathcal{I}_1$, to $(f_n) \xrightarrow{(\mathcal{I}_0,\mathcal{J})-e} f$ implikuje $(f_n) \xrightarrow{(\mathcal{I}_1,\mathcal{J})-e} f$.*

(2) *Jeżeli $\mathcal{J}_0 \subseteq \mathcal{J}_1$, to $(f_n) \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J}_0)-e} f$ implikuje $(f_n) \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J}_1)-e} f$.*

2.2 Zbieżności ideałowe

Jak nadmieniliśmy we wstępie niniejszej rozprawy, e-zbieżność wpisuje się pomiędzy zbieżność jednostajną i zbieżność punktową: jeżeli ciąg funkcji rzeczywistych jednostajnie zbiega do pewnej funkcji, to jest on również e-zbieżny do tej funkcji i podobnie z e-zbieżności dowolnego ciągu funkcyjnego wynika jego punktowa zbieżność (por.[15]). Ponadto e-zbieżność nie jest równoważna jednostajnej ani punktowej zbieżności dla ciągów funkcyjnych określonych na przykład na zbiorze liczb rzeczywistych (por. [6]). W tym rozdziale sprawdzimy konieczne i dostateczne warunki na to, aby związki zachodzące między ideałowymi analogami wspomnianych zbieżności były takie same jak w przypadku klasycznym.

2.2.1 Zbieżność punktowa

Definicja 2.5 (por. [32]) Niech $\mathcal{K}$ będzie ideałem na ω. Załóżmy, że f_n $(n \in \omega)$ i f są funkcjami rzeczywistymi określonymi na pewnym zbiorze X. Mówimy, że ciąg (f_n) jest *$\mathcal{K}$-zbieżny do f*, jeżeli $\{n \in \omega : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} \in \mathcal{K}$ dla każdych $x \in X$ oraz $\varepsilon > 0$. W takim przypadku przyjmujemy oznaczenie $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{K}} f$.

Poniżej podajemy twierdzenia charakteryzujące, kiedy $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-e-zbieżność implikuje $\mathcal{K}$-zbieżność (por. Twierdzenie 2.6) oraz kiedy zachodzi implikacja przeciwna (por. Twierdzenia 2.7 i 2.12). Uzyskane wyniki wykorzystamy do podania odpowiedzi na pytanie postawione przez Dasa, Duttę i Pala w [19] (por. Uwaga 2.15) oraz pokażemy, jak rezultaty uzyskane przez Šupinę w [49] można wyprowadzić z naszych twierdzeń (por. Wnioski 2.16 i 2.17).

Twierdzenie 2.6 *Załóżmy, że X jest niepustym zbiorem. Niech $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ będą ideałami na ω. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Dla dowolnego ciągu (f_n) funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze X, jeżeli $(f_n) \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})-e} f$ dla pewnego $f \in \mathbb{R}^X$, to $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{K}} f$.*

(2) $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{K}$ *i* $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{K}$.

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2). Pokażemy, że $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{K}$ (dowód zawierania $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{K}$ jest analogiczny). Przypuśćmy przeciwnie, że istnieje taki zbiór $A \in \mathcal{I}$, że $A \in \mathcal{K}^+$. Zdefiniujmy funkcje $f_n, f : X \to \mathbb{R}\,(n \in \omega)$ w następujący sposób:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } n \in A, \\ 0 & \text{gdy } n \in \omega \setminus A \end{cases}$$

oraz $f(x) = 0$ dla każdego $x \in X$. Wówczas ciąg (f_n) jest $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f, ale nie jest $\mathcal{K}$-zbieżny do f. Otrzymaliśmy sprzeczność z założeniem (1).

(2) $\Rightarrow$ (1). Załóżmy, że $f, f_n \in \mathbb{R}^X$ $(n \in \omega)$ są takimi funkcjami, że ciąg (f_n) jest $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f. Ustawmy w ciąg $(x_\alpha)_{\alpha<|X|}$ wszystkie punkty zbioru

X. Niech (ε_n) będzie takim $\mathcal{J}$-zbieżnym do 0 ciągiem o wyrazach dodatnich, że $B_\alpha = \{n \in \omega : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geqslant \varepsilon_n\} \in \mathcal{I} \subseteq \mathcal{K}$ dla każdego $\alpha < |X|$. Zdefiniujmy zbiory $A_0 = \{n \in \omega : \varepsilon_n \geqslant 1\}$ i $A_k = \{n \in \omega : 1/(k+1) \leqslant \varepsilon_n < 1/k\}$ dla $k \geqslant 1$. Wówczas $\{A_k : k \in \omega\} \subseteq \mathcal{J} \subseteq \mathcal{K}$ jest partycją zbioru ω. Niech $k \in \omega$ i $\alpha < |X|$. Wtedy $|f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| < \varepsilon_n < 1/k$ dla każdego $n \in (\bigcup_{m \geqslant k} A_m) \setminus B_\alpha$, więc $\{n \in \omega : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geqslant 1/k\} \subseteq (\bigcup_{m<k} A_m) \cup B_\alpha \in \mathcal{K}$. $\square$

Twierdzenie 2.7 *Załóżmy, że X jest niepustym zbiorem. Niech $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ będą ideałami na ω takimi, że $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{I}$.*

(1) *Jeżeli zachodzi własność $\mathrm{W}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$, to następujące warunki są równoważne.*

  (*a*) *Dla dowolnego ciągu (f_n) funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze X, jeżeli $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{K}} f$ dla pewnego $f \in \mathbb{R}^X$, to $(f_n) \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})-e} f$.*

  (*b*) $|X| < \mathfrak{b}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$.

(2) *Jeżeli nie zachodzi własność $\mathrm{W}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$, to dla dowolnych funkcji rzeczywistych f, f_n $(n \in \omega)$ określonych na zbiorze X, zbieżność $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{K}} f$ implikuje $(f_n) \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})-e} f$.*

Dowód. **Część (1):** $(a) \Rightarrow (b)$. Załóżmy, że $|X| \geqslant \mathfrak{b}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$. Ponieważ zachodzi własność $\mathrm{W}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$, więc z Twierdzenia 1.26(2) wynika, że $\mathfrak{b}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}) \leqslant \mathfrak{c}$. Niech $\{E_n^\alpha : n \in \omega, \alpha < \mathfrak{b}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})\} \subseteq \mathcal{K}$, $E_n^\alpha \cap E_k^\alpha = \emptyset$ dla $n \neq k$, $\alpha < \kappa$, będzie taką rodziną, że dla dowolnej partycji $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{J}$ zbioru ω istnieje $\alpha < \mathfrak{b}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$ takie, że $\bigcup_{n\in\omega}(A_{n+1} \cap \bigcup_{i \leqslant n} E_i^\alpha) \in \mathcal{I}^+$. Ustawmy w ciąg $(x_\alpha)_{\alpha<|X|}$ wszystkie punkty zbioru X. Zdefiniujmy funkcje $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \omega)$ w następujący sposób:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{k+1} & \text{gdy } n \in E_k^\alpha \text{ i } x = x_\alpha \text{ dla pewnego } \alpha < \mathfrak{b}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}), \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

oraz $f(x) = 0$ dla wszystkich $x \in X$. Wówczas $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{K}} f$. Pokażemy teraz, że ciąg (f_n) nie jest $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f.

Przypuśćmy przeciwnie, że istnieje taki $\mathcal{J}$-zbieżny do 0 ciąg o wyrazach dodatnich (ε_n), że $\{n \in \omega : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geqslant \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}$ dla każdego $\alpha < |X|$. Zdefiniujmy zbiory $A_0 = \{n \in \omega : \varepsilon_n \geqslant 1/2\}$ oraz $A_k = \{n \in \omega : 1/(k+2) \leqslant \varepsilon_n < 1/(k+1)\}$ dla $k \geqslant 1$. Wówczas $\{A_k : k \in \omega\} \subseteq \mathcal{J}$ jest partycją zbioru ω, więc istnieje $\alpha_0 < |X|$ takie, że $B_{\alpha_0} = \bigcup_{n\in\omega}(A_{n+1} \cap \bigcup_{i \leqslant n} E_i^{\alpha_0}) \in \mathcal{I}^+$. Pokażemy teraz, że $B_{\alpha_0} \subseteq \{n \in \omega : |f_n(x_{\alpha_0}) - f(x_{\alpha_0})| \geqslant \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}$ (a zatem otrzymamy sprzeczność).

Niech $n \in B_{\alpha_0}$. Istnieje takie $k_0 \geqslant 1$, że $n \in A_{k_0} \cap \bigcup_{i<k_0} E_i^{\alpha_0}$. Stąd otrzymujemy, że $\varepsilon_n < 1/(k_0+1) < |f_n(x_{\alpha_0}) - f(x_{\alpha_0})|$.

$(b) \Rightarrow (a)$. Załóżmy, że $f, f_n \in \mathbb{R}^X$ $(n \in \omega)$ są takimi funkcjami, że ciąg (f_n) jest $\mathcal{K}$-zbieżny do f. Ponumerujmy x_α $(\alpha < |X|)$ wszystkie punkty zbioru X. Zdefiniujmy zbiory $E_0^\alpha = \{n \in \omega : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geqslant 1/2\}$ i $E_k^\alpha = \{n \in \omega :$

$1/(k+2) \leqslant |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| < 1/(k+1)\}$ dla $k \geqslant 1$, $\alpha < |X|$. Zauważmy, że $E_k^\alpha \in \mathcal{K}$ dla każdego $k \in \omega$, $\alpha < |X|$ oraz $E_m^\alpha \cap E_l^\alpha = \emptyset$, jeżeli $m \neq l$. Z założenia $|X| < \mathfrak{b}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$ wynika, że istnieje taka partycja $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{J}$ zbioru ω, że $B_\alpha = \bigcup_{n\in\omega}(A_{n+1} \cap \bigcup_{i\leqslant n} E_i^\alpha) \in \mathcal{I}$ dla każdego $\alpha < |X|$. Zdefiniujmy $\mathcal{J}$-zbieżny do 0 ciąg liczb dodatnich (ε_n) wzorem $\varepsilon_n = 1/(k+1)$, gdy $n \in A_k$. Pokażemy, że $\{n \in \omega : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geqslant \varepsilon_n\} \subseteq B_\alpha \cup E_0^\alpha \in \mathcal{I}$ dla każdego $\alpha < |X|$, a więc (f_n) jest $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f.

Ustalmy $\alpha < |X|$. Niech $n \in \omega \setminus B_\alpha$ będzie takie, że $|f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geqslant \varepsilon_n$. Gdyby $n \in A_{k_0+1}$ dla pewnego $k_0 \in \omega$, to wówczas $n \in (\omega \setminus \bigcup_{i\leqslant k_0} E_i^\alpha)$. Zatem w tym przypadku otrzymalibyśmy sprzeczność, gdyż $|f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| < 1/(k_0+2) = \varepsilon_n$. Stąd $n \in A_0$. Wówczas $|f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geqslant \varepsilon_n = 1$, więc $n \in E_0^\alpha$.

Część (2): Załóżmy, że $f, f_n \in \mathbb{R}^X$ $(n \in \omega)$ są takimi funkcjami, że ciąg (f_n) jest $\mathcal{K}$-zbieżny do f. Ustawmy w ciąg $(x_\alpha)_{\alpha<|X|}$ wszystkie punkty zbioru X. Niech $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{J}$ będzie taką partycją zbioru ω, że dla każdego $S \in \mathcal{I}^+$ istnieje takie $k \in \omega$, że $A_{k+1} \cap S \in \mathcal{K}^+$ lub $A_0 \cap S \in \mathcal{I}^+$. Zdefiniujmy $\mathcal{J}$-zbieżny do 0 ciąg liczb dodatnich (ε_n) wzorem $\varepsilon_n = 1/(k+1)$, gdy $n \in A_k$. Pokażemy, że $\{n \in \omega : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}$ dla wszystkich $x \in X$.

Przypuśćmy przeciwnie, że $B_\alpha = \{n \in \omega : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geqslant \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}^+$ dla pewnego $\alpha < |X|$. Wówczas $A_0 \cap S \in \mathcal{I}^+$ lub $A_{k+1} \cap S \in \mathcal{K}^+$ dla pewnego k.

Jeżeli $A_0 \cap B_\alpha \in \mathcal{I}^+$, to $\{n \in A_0 : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geqslant 1\} = \{n \in A_0 : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geqslant \varepsilon_n\} = A_0 \cap B_\alpha \in \mathcal{K}^+$ (gdyż $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{I}$). Otrzymujemy sprzeczność z założeniem, że ciąg (f_n) jest $\mathcal{K}$-zbieżny do f.

Jeżeli istnieje takie $k_0 \in \omega$, że $A_{k_0+1} \cap B_\alpha \in \mathcal{K}^+$, to również otrzymujemy sprzeczność, gdyż $A_{k_0+1} \cap B_\alpha \subseteq \{n \in \omega : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geqslant 1/(k_0+2)\} \in \mathcal{K}$. □

W przypadku, gdy ideał $\mathcal{K}$ nie jest zawarty w ideale $\mathcal{I}$ charakteryzację ideałów, dla których $\mathcal{K}$-zbieżność implikuje $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-e-zbieżność uzyskamy przy dodatkowym założeniu, że ideał $\mathcal{I}$ ma dziedziczną własność Baire'a (por. Twierdzenie 2.12). Udowodnimy najpierw kilka ogólniejszych stwierdzeń, a następnie pokażemy wspomnianą charakteryzację.

Stwierdzenie 2.8 *Załóżmy, że X jest niepustym zbiorem oraz $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ są ideałami na ω takimi, że dla każdego ciągu (f_n) funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze X, jeżeli (f_n) jest $\mathcal{K}$-zbieżny do pewnej funkcji $f \in \mathbb{R}^X$, to jest również $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f. Wówczas $\mathcal{K}$ jest $|X|$-$P(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-ideałem.*

Dowód. Załóżmy, że $\mathcal{K}$ nie jest $|X|$-$P(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-ideałem. Niech $\{E_\alpha : \alpha < |X|\} \subseteq \mathcal{K}$ będzie taką rodziną, że dla każdego zbioru $A \in \mathcal{J}$ istnieje $\alpha < |X|$, dla którego $E_\alpha \setminus A \in \mathcal{I}^+$. Ustawmy w ciąg $(x_\alpha)_{\alpha<|X|}$ wszystkie punkty zbioru X. Zdefiniujmy funkcje f_n, $f : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \omega)$ w następujący sposób:

$$f_n(x) = \begin{cases} 2 & \text{gdy } n \in E_\alpha \text{ i } x = x_\alpha \text{ dla pewnego } \alpha < |X|, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

oraz $f(x) = 0$ dla wszystkich $x \in X$. Wówczas $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{K}} f$. Pokażemy teraz, że ciąg (f_n) nie jest $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f.

Przypuśćmy przeciwnie, że istnieje taki $\mathcal{J}$-zbieżny do 0 ciąg o wyrazach dodatnich (ε_n), że $B_\alpha = \{n \in \omega : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geqslant \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}$ dla każdego $\alpha < |X|$. Wówczas dla zbioru $A = \{n \in \omega : \varepsilon_n \geqslant 1\} \in \mathcal{J}$ istnieje $\alpha_0 < |X|$ takie, że $E_{\alpha_0} \setminus A \in \mathcal{I}^+$. Z drugiej strony $E_{\alpha_0} \setminus A \subseteq B_{\alpha_0} \in \mathcal{I}$. Otrzymaliśmy sprzeczność. $\square$

Stwierdzenie 2.9 *Załóżmy, że X jest zbiorem i $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ są ideałami na ω takimi, że $|X| \geqslant \mathfrak{b}^*(\mathcal{I})$ oraz dla każdego ciągu (f_n) funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze X, jeżeli (f_n) jest $\mathcal{K}$-zbieżny do pewnej funkcji $f \in \mathbb{R}^X$, to jest również $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f. Wówczas $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{I}$.*

Dowód. Przypuśćmy, że istnieje taki zbiór $K \in \mathcal{K}$, że $K \in \mathcal{I}^+$. Wówczas istnieje taka rodzina $\{g_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}^*(\mathcal{I})\} \subseteq \omega^\omega$, że dla każdej funkcji $g \in \omega^\omega$ istnieje $\alpha < \mathfrak{b}^*(\mathcal{I})$, dla którego $\{n \in K : g_\alpha(n) \geqslant g(n)\} \in \mathcal{I}^+$. Ustawmy w ciąg $(x_\alpha)_{\alpha<|X|}$ wszystkie punkty zbioru X. Zdefiniujmy funkcje $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \omega)$ w następujący sposób:

$$f_n(x) = \begin{cases} g_\alpha(n) & \text{gdy } n \in K \text{ i } x = x_\alpha, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

oraz $f(x) = 0$ dla wszystkich $x \in X$. Wówczas $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{K}} f$. Z założeń stwierdzenia wynika, że (f_n) jest również $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f, więc istnieje taki $\mathcal{J}$-zbieżny do 0 ciąg o wyrazach dodatnich (ε_n), że $\{n \in \omega : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geqslant \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}$ dla każdego $\alpha < |X|$. Zdefiniujmy $g : \omega \to \omega$ wzorem $g(n) = \min\{k \in \omega : k \geqslant \varepsilon_n\}$ dla każdego $n \in \omega$. Istnieje $\alpha < \mathfrak{b}^*(\mathcal{I})$ takie, że $\{n \in K : g_\alpha(n) \geqslant g(n)\} \in \mathcal{I}^+$. Stąd

$$\{n \in \omega : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geqslant \varepsilon_n\} \supseteq \{n \in K : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geqslant \varepsilon_n\} \supseteq$$

$$\{n \in K : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geqslant g(n)\} = \{n \in K : g_\alpha(n) \geqslant g(n)\} \in \mathcal{I}^+.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, a więc $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{I}$. $\square$

Stwierdzenie 2.10 *Załóżmy, że X jest niepustym zbiorem i $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ są ideałami na ω takimi, że $|X| < \mathfrak{b}(\mathcal{I})$, $\mathcal{K}$ jest $|X|$-$P(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-ideałem oraz jest spełniona własność* $\mathrm{W}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$. *Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Dla dowolnego ciągu (f_n) funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze X, jeżeli $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{K}} f$ dla pewnego $f \in \mathbb{R}^X$, to $(f_n) \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})-e} f$.*

(2) $|X| < \mathfrak{b}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$.

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2). Dowód jest analogiczny do dowodu Twierdzenia 2.7(1).

(2) $\Rightarrow$ (1). Załóżmy, że $f, f_n \in \mathbb{R}^X$ $(n \in \omega)$ są takimi funkcjami, że ciąg (f_n) jest $\mathcal{K}$-zbieżny do f. Ustawmy w ciąg $(x_\alpha)_{\alpha<|X|}$ wszystkie punkty zbioru X. Dla

każdych $k \geqslant 1$ i $\alpha < |X|$ zdefiniujmy zbiory $E_0^\alpha = \{n \in \omega : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geqslant 1/2\}$ oraz $E_k^\alpha = \{n \in \omega : 1/(k+2) \leqslant |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| < 1/(k+1)\}$. Wtedy $E_k^\alpha \in \mathcal{K}$ dla wszystkich $k \in \omega$, $\alpha < |X|$ i $E_m^\alpha \cap E_l^\alpha = \emptyset$, jeżeli $m \neq l$. Ponieważ $\mathcal{K}$ jest $|X|$-$P(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-ideałem, więc dla rodziny $\{E_0^\alpha : \alpha < |X|\}$ istnieje taki zbiór $A \in \mathcal{J}$, że $E_0^\alpha \setminus A \in \mathcal{I}$ dla każdego $\alpha < |X|$. Z założenia $|X| < \mathfrak{b}(\mathcal{I})$ wynika, że istnieje taka funkcja $g \in \omega^\omega$, że $\{n \in A : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geqslant g(n)\} \in \mathcal{I}$ dla każdego $\alpha < |X|$. Z kolei z założenia $|X| < \mathfrak{b}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$ otrzymujemy, że istnieje partycja $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{J}$ zbioru ω taka, że $B_\alpha = \bigcup_{n \in \omega}(A_{n+1} \cap \bigcup_{i \leqslant n} E_i^\alpha) \in \mathcal{I}$ dla każdego $\alpha < |X|$. Zdefiniujmy $\mathcal{J}$-zbieżny do 0 ciąg liczb dodatnich (ε_n) w następujący sposób:

$$\varepsilon_n = \begin{cases} \frac{1}{k+1} & \text{gdy } n \in A_k \setminus A, \\ g(n) + 1 & \text{gdy } n \in A. \end{cases}$$

Niech $\alpha < |X|$. Pokażemy, że $\{n \in \omega \setminus A : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geqslant \varepsilon_n\} \subseteq B_\alpha \cup (E_0^\alpha \setminus A)$.

Niech $n \in \omega \setminus (A \cup B_\alpha)$ będzie takie, że $|f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geqslant \varepsilon_n$. Gdyby $n \in A_{k_0+1}$ dla pewnego $k_0 \in \omega$, to $n \in \omega \setminus \bigcup_{i \leqslant k_0} E_i^\alpha$. Zatem otrzymalibyśmy sprzeczność, gdyż $|f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| < 1/(k_0 + 2) = \varepsilon_n$. Stąd wynika, że $n \in A_0$. Ponieważ $|f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geqslant \varepsilon_n = 1$, więc $n \in E_0^\alpha \setminus A$.

Wówczas

$$\{n \in \omega : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geqslant \varepsilon_n\} = \{n \in \omega \setminus A : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geqslant \varepsilon_n\} \cup \{n \in A :$$

$$|f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geqslant \varepsilon_n\} \subseteq B_\alpha \cup (E_0^\alpha \setminus A) \cup \{n \in A : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geqslant g(n)\} \in \mathcal{I}.$$

Stąd $(f_n) \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})-e} f$. □

Stwierdzenie 2.11 *Załóżmy, że X jest niepustym zbiorem i $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ są ideałami na ω takimi, że $|X| < \mathfrak{b}(\mathcal{I})$, $\mathcal{K}$ jest $|X|$-$P(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-ideałem oraz nie zachodzi własność* $\mathrm{W}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$. *Wówczas dla każdego ciągu (f_n) funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze X, jeżeli (f_n) jest $\mathcal{K}$-zbieżny do pewnej funkcji $f \in \mathbb{R}^X$, to jest również $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f.*

Dowód. Ze Stwierdzenia 1.18 wynika, że zachodzi własność $\mathrm{B}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}, |X|)$, więc wystarczy powtórzyć drugą część dowodu Stwierdzenia 2.10. □

Ze Stwierdzeń 2.8 - 2.11 oraz z faktu, że $\mathfrak{b}^*(\mathcal{I}) = \mathfrak{b}(\mathcal{I}) = \mathfrak{b}$ dla wszystkich ideałów z dziedziczną własnością Baire'a (por. Twierdzenie 1.5), wynika następująca charakteryzacja.

Twierdzenie 2.12 *Załóżmy, że X jest niepustym zbiorem. Niech $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ będą ideałami na ω takimi, że $\mathcal{I}$ ma dziedziczną własność Baire'a oraz $\mathcal{K}$ nie jest zawarty w $\mathcal{I}$.*

(1) *Jeżeli zachodzi własność* $\mathrm{W}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$, *to następujące warunki są równoważne.*

(a) *Dla dowolnego ciągu* (f_n) *funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze* X*, jeżeli* $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{K}} f$ *dla pewnego* $f \in \mathbb{R}^X$*, to* $(f_n) \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})-e} f$.

(b) $|X| < \min\{\mathfrak{b}(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K}), \mathfrak{b}\}$ *i* $\mathcal{K}$ *jest* $|X|$*-*$P(\mathcal{I},\mathcal{J})$*-ideałem.*

(2) *Jeżeli nie zachodzi własność* $\mathrm{W}(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K})$*, to następujące warunki są równoważne.*

(a) *Dla dowolnego ciągu* (f_n) *funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze* X*, jeżeli* $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{K}} f$ *dla pewnego* $f \in \mathbb{R}^X$*, to* $(f_n) \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})-e} f$.

(b) $|X| < \mathfrak{b}$ *i* $\mathcal{K}$ *jest* $|X|$*-*$P(\mathcal{I},\mathcal{J})$*-ideałem.*

Dowód. **Część (1):**

$(a) \Rightarrow (b)$. Implikacja ta wynika z Twierdzenia 1.5 oraz ze Stwierdzeń 2.8, 2.9 i 2.10.

$(b) \Rightarrow (a)$. Implikacja ta wynika ze Stwierdzenia 2.10.

Część (2):

$(a) \Rightarrow (b)$. Implikacja ta wynika z Twierdzenia 1.5 oraz ze Stwierdzeń 2.8 i 2.9.

$(b) \Rightarrow (a)$. Implikacja ta wynika ze Stwierdzenia 2.11. □

Problem 2 *Czy tezy w częściach (1) i (2) Twierdzenia 2.12 pozostaną prawdziwe, jeżeli pominiemy założenie, że* $\mathcal{I}$ *jest ideałem z dziedziczną własnością Baire'a?*

Wniosek 2.13 *Niech* $\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K}$ *będą ideałami na* ω.

(1) *Jeżeli* X *jest niepustym zbiorem skończonym, to następujące warunki są równoważne.*

(a) *Dla dowolnego ciągu* (f_n) *funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze* X*, jeżeli* $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{K}} f$ *dla pewnego* $f \in \mathbb{R}^X$*, to* $(f_n) \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})-e} f$.

(b) $\mathcal{K}$ *jest* ω*-*$P(\mathcal{J},\mathcal{I})$*-ideałem.*

(2) *Jeżeli* X *jest nieskończonym zbiorem przeliczalnym, to następujące warunki są równoważne.*

(a) *Dla dowolnego ciągu* (f_n) *funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze* X*, jeżeli* $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{K}} f$ *dla pewnego* $f \in \mathbb{R}^X$*, to* $(f_n) \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})-e} f$.

(b) *Zachodzi własność* $P(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K})$.

Dowód. **Część (1):**

$(a) \Rightarrow (b)$. Załóżmy, że $\mathcal{K}$ nie jest ω-$P(\mathcal{J},\mathcal{I})$-ideałem. Wówczas z Twierdzenia 1.26(6) wynika, że $\mathfrak{b}(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K}) = 1 \leqslant |X|$, a więc zachodzi własność $\mathrm{W}(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K})$ (por. Stwierdzenie 1.18). Ze Stwierdzeń 2.8 i 2.10 otrzymujemy zaprzeczenie (a).

$(b) \Rightarrow (a)$. Z Twierdzenia 1.26(5) otrzymujemy, że $\mathfrak{b}(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K}) \geqslant \omega > |X|$. Ponieważ $\mathcal{K}$ jest ω-$P(\mathcal{J},\mathcal{I})$-ideałem, więc $\mathcal{K}$ jest również $|X|$-$P(\mathcal{I},\mathcal{J})$-ideałem.

Teza wynika ze Stwierdzeń 2.10 i 2.11.

Część (2):

$(a) \Rightarrow (b)$. Załóżmy, że nie zachodzi własność $P(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$. Wówczas z Twierdzenia 1.26(3) wynika, że $\mathfrak{b}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}) \leqslant \omega = |X|$, a więc zachodzi własność $\mathrm{W}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$ (por. Stwierdzenie 1.18). Ze Stwierdzeń 2.8 i 2.10 otrzymujemy zaprzeczenie (a).

$(b) \Rightarrow (a)$. Z Twierdzenia 1.26(4) otrzymujemy, że $\mathfrak{b}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}) > \omega = |X|$. Ponieważ zachodzi własność $P(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$, więc $\mathcal{K}$ jest $|X|$-$P(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-ideałem. Teza wynika ze Stwierdzeń 2.10 i 2.11. □

Wniosek 2.14 *Załóżmy, że X jest takim zbiorem, że $|X| \geqslant \mathfrak{c}$. Niech $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ będą ideałami na ω. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Dla dowolnego ciągu (f_n) funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze X, jeżeli $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{K}} f$ dla pewnego $f \in \mathbb{R}^X$, to $(f_n) \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})-e} f$.*

(2) *$\mathcal{K} \subseteq \mathcal{I}$ i nie zachodzi własność $\mathrm{W}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$.*

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2). Załóżmy, że ideał $\mathcal{K}$ nie jest zawarty w ideale $\mathcal{I}$. Wówczas ze Stwierdzenia 2.9 wynika, że nie zachodzi (1).

Załóżmy teraz, że zachodzi własność $\mathrm{W}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$. Wówczas z Twierdzenia 1.26(2) wynika, że $|X| \geqslant \mathfrak{c} \geqslant \mathfrak{b}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$. Zatem z Twierdzenia 2.7(1) otrzymujemy, zaprzeczenie (1).

(2) $\Rightarrow$ (1). Implikacja ta wynika z Twierdzenia 2.7(2). □

Z Wniosków 2.13 i 2.14 wynika, że przy założeniu hipotezy continuum, badany przez nas problem jest rozstrzygnięty dla wszystkich ideałów.

Uwaga 2.15 Powyższe wyniki są rozszerzeniem tych, które uzyskaliśmy wcześniej w pracy [23], gdzie posłużyły nam do rozwiązania problemów postawionych przez Dasa, Duttę i Pala w [19]. Między innymi w [19, Przykład 3.1] autorzy pokazali, że dla ideałów przeliczalnie generowanych $\mathcal{I}$ istnieją takie funkcje rzeczywiste f, f_n $(n \in \omega)$ określone na $\mathbb{R}$, że ciąg (f_n) jest $\mathcal{I}$-zbieżny do f, ale nie jest $(\mathcal{I}, \mathcal{I})$-e-zbieżny do f. Ponadto postawili problem, czy można pominąć założenie, że ideał $\mathcal{I}$ jest przeliczalnie generowany. Ponieważ własność $\mathrm{W}(\mathcal{I}, \mathcal{I}, \mathcal{I})$ zachodzi dla dowolnego ideału $\mathcal{I}$ (por. Fakt 1.14(3)), więc z Wniosku 2.14 wynika, że odpowiedź na to pytanie jest pozytywna (por. również [23, Przykład 4.7]).

W pracy [49] Šupina wprowadził następującą definicję: mówimy, że $\mathcal{J}$ jest słabym $P(\mathcal{I})$-ideałem, jeżeli dla dowolnej rodziny $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{J}$ istnieje taki zbiór $A \in \mathcal{J}^+$, że $A_n \cap A \in \mathcal{I}$ dla każdego $n \in \omega$. Łatwo sprawdzić, że $\mathcal{J}$ jest słabym $P(\mathcal{I})$-ideałem wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi własność $\mathrm{W}(\mathcal{J}, \mathcal{J}, \mathcal{I})$. Ponadto w [49] autor zdefiniował współczynnik kardynalny $\kappa(\mathcal{I}, \mathcal{J})$, który jest równy współczynnikowi $\mathfrak{b}(\mathcal{J}, \mathcal{J}, \mathcal{I})$ w naszej notacji. Poniżej pokazujemy, że rezultaty udowodnione niezależnie w pracy [49] dają się łatwo wyprowadzić z naszych wyników (por. Wnioski 2.16 i 2.17).

Wniosek 2.16 (Šupina [49, Twierdzenie 5.1]) *Załóżmy, że X jest niepustym zbiorem. Niech $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ będą ideałami na ω takimi, że $\mathcal{J}$ nie jest słabym $P(\mathcal{I})$-ideałem. Wówczas dla każdego ciągu (f_n) funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze X, jeśli (f_n) jest $\mathcal{I}$-zbieżny do pewnej funkcji $f \in \mathbb{R}^X$, to jest również $(\mathcal{J}, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f.*

Dowód. Z założenia, że $\mathcal{J}$ nie jest słabym $P(\mathcal{I})$-ideałem wynika, że $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$. Z Twierdzenia 2.7(2) otrzymujemy tezę. □

Wniosek 2.17 (Šupina [49, Twierdzenie 6.2]) *Załóżmy, że X jest niepustym zbiorem. Niech $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ będą ideałami na ω takimi, że $\mathcal{J}$ jest słabym $P(\mathcal{I})$-ideałem. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Dla dowolnego ciągu (f_n) funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze X, jeżeli $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{I}} f$ dla pewnego $f \in \mathbb{R}^X$, to $(f_n) \xrightarrow{(\mathcal{J},\mathcal{J})-e} f$.*

(2) $|X| < \kappa(\mathcal{I}, \mathcal{J})$.

Dowód. Jeżeli $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$, to teza wynika z Twierdzenia 2.7(1). Załóżmy, że ideał $\mathcal{I}$ nie jest zawarty w ideale $\mathcal{J}$. Wtedy $\mathcal{I}$ nie jest ω-$P(\mathcal{J}, \mathcal{J})$-ideałem, a zatem $\kappa(\mathcal{I}, \mathcal{J}) = \mathfrak{b}(\mathcal{J}, \mathcal{J}, \mathcal{I}) = 1$ (por. Twierdzenie 1.26(6)). Stąd nie zachodzi (2) (ponieważ X jest zbiorem niepustym). Pokażemy, że w tym przypadku nie zachodzi również (1).

Jeżeli $\mathcal{I}$ nie jest $|X|$-$P(\mathcal{J}, \mathcal{J})$-ideałem, to wystarczy skorzystać ze Stwierdzenia 2.8. Załóżmy zatem, że $\mathcal{I}$ jest $|X|$-$P(\mathcal{J}, \mathcal{J})$-ideałem. Niech $x \in X$. Ze Stwierdzenia 2.10 otrzymujemy, że istnieją takie funkcje $f_n, f : \{x\} \to \mathbb{R}$ $(n \in \omega)$, że $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{I}} f$ i (f_n) nie jest $(\mathcal{J}, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f. Łatwo teraz rozszerzyć (f_n) i f na X. □

Uwaga 2.18 Dla ideału $\mathcal{I}$ takie przestrzenie topologiczne X, że dla każdego ciągu ciągłych funkcji rzeczywistych (f_n) określonego na X, jeżeli (f_n) jest zbieżny do funkcji stale równej zero, to jest również $(\mathcal{I}, \mathcal{I})$-e-zbieżny do tej funkcji, nazywamy $\mathcal{I}QN$-przestrzeniami. W pracy [49] Šupina udowodnił, że każda przestrzeń topologiczna jest $\mathcal{I}QN$-przestrzenią wtedy i tylko wtedy, gdy ideał $\mathcal{I}$ zawiera izomorficzną kopię ideału $\mathrm{Fin} \otimes \mathrm{Fin}$.

2.2.2 Zbieżność jednostajna

Definicja 2.19 (por. [1]) Niech $\mathcal{K}$ będzie ideałem na zbiorze ω. Załóżmy, że f_n $(n \in \omega)$ i f są funkcjami rzeczywistymi określonymi na pewnym zbiorze X. Mówimy, że ciąg (f_n) jest *$\mathcal{K}$-jednostajnie zbieżny do f*, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ zbiór $\{n \in \omega : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon$ dla pewnego $x\} \in \mathcal{K}$. W takim przypadku przyjmujemy oznaczenie $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{K}-u} f$.

Dla ideału $\mathcal{K} = \mathrm{Fin}$ otrzymujemy klasyczną zbieżność jednostajną. Będziemy pisać $(f_n) \xrightarrow{u} f$ zamiast $(f_n) \xrightarrow{\mathrm{Fin}-u} f$.

Rozpatrzmy najpierw zagadnienie, kiedy $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-e-zbieżność ciągu funkcyjnego implikuje jego $\mathcal{K}$-jednostajną zbieżność.

Twierdzenie 2.20 *Niech $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ będą ideałami na ω.*

(1) *Jeżeli X jest niepustym zbiorem skończonym, to następujące warunki są równoważne.*

  (a) *Dla dowolnego ciągu (f_n) funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze X, jeżeli $(f_n) \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})-e} f$ dla pewnego $f \in \mathbb{R}^X$, to $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{K}-u} f$.*

  (b) *$\mathcal{I} \subseteq \mathcal{K}$ i $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{K}$.*

(2) *Jeżeli X jest zbiorem nieskończonym, to istnieją takie funkcje rzeczywiste f, f_n $(n \in \omega)$ określone na zbiorze X, że ciąg (f_n) jest $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f, ale nie jest $\mathcal{K}$-jednostajnie zbieżny do f.*

Dowód. (1) Dowód jest analogiczny do dowodu Twierdzenia 2.6.

(2) Niech $x_n \in X$ $(n \in \omega)$ będą różnymi elementami zbioru X. Zdefiniujmy ciąg (f_n) funkcji rzeczywistych określonych na X wzorem $f_n(x) = 1$, gdy $x = x_n$ i $f_n(x) = 0$ w przeciwnym przypadku. Niech $f(x) = 0$ dla wszystkich $x \in X$. Wówczas f i f_n $(n \in \omega)$ spełniają tezę (2). $\square$

Charakteryzację ideałów, dla których zachodzi implikacja przeciwna, tzn. kiedy zbieżność $\mathcal{K}$-jednostajna implikuje $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-e-zbieżność, uzyskamy przy dodatkowym założeniu, że ideał $\mathcal{I}$ ma dziedziczną własność Baire'a (por. Twierdzenia 2.26 i 2.27). Wykorzystamy fakt, że dla takich ideałów $\mathcal{I}$ prawdziwa jest równość $\mathfrak{b}^*(\mathcal{I}) = \mathfrak{b}(\mathcal{I}) = \mathfrak{b}$ (por. Twierdzenie 1.5). Udowodnimy najpierw kilka ogólniejszych stwierdzeń, a następnie pokażemy wspomnianą charakteryzację.

Stwierdzenie 2.21 *Załóżmy, że $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ są takimi ideałami na ω, że dla dowolnego niepustego zbioru X i dla każdego ciągu (f_n) funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze X, jeżeli (f_n) jest $\mathcal{K}$-jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji $f \in \mathbb{R}^X$, to jest również $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f. Wówczas $\mathcal{K}$ jest ω-$P(\mathcal{J}, \mathcal{I})$-ideałem.*

Dowód. Załóżmy, że $\mathcal{K}$ nie jest ω-$P(\mathcal{J}, \mathcal{I})$-ideałem. Niech $\{A_k : k \in \omega\} \subseteq \mathcal{K}$ będzie taką rodziną, że dla każdego zbioru $A \in \mathcal{I}$ istnieje $k \in \omega$, dla którego $A_k \setminus A \in \mathcal{J}^+$. Ponadto możemy założyć, że zbiory z rodziny $\{A_k : k \in \omega\}$ są parami rozłączne. Niech X będzie niepustym zbiorem. Zdefiniujmy funkcje $f_n, f : X \to \mathbb{R}\,(n \in \omega)$ w następujący sposób:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{k+1} & \text{gdy } n \in A_k, \\ 0 & \text{gdy } n \in \omega \setminus \bigcup_{k\in\omega} A_k \end{cases}$$

oraz $f(x) = 0$ dla każdego $x \in X$. Wówczas $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{K}-u} f$. Pokażemy, że (f_n) nie jest $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f.

Przypuśćmy przeciwnie, że istnieje taki $\mathcal{J}$-zbieżny do 0 ciąg liczb dodatnich (ε_n), że $B = \{n \in \omega : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}$ dla każdego $x \in X$. Istnieje $k_0 \in \omega$ takie, że $A_{k_0} \setminus B \in \mathcal{J}^+$. Stąd $(A_{k_0} \setminus B) \cap \{n \in \omega : \varepsilon_n < 1/(k_0 + 1)\} \neq \emptyset$. Zatem istnieje $n \in \omega \setminus B$, dla którego $|f_n(x) - f(x)| = 1/(k_0 + 1) > \varepsilon_n$, co jest sprzeczne z definicją zbioru B. □

Dowód poniższego stwierdzenia jest analogiczny do dowodu Stwierdzenia 2.9.

Stwierdzenie 2.22 *Załóżmy, że X jest zbiorem i $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ są ideałami na ω takimi, że $|X| \geqslant \mathfrak{b}^*(\mathcal{I})$ oraz dla każdego ciągu (f_n) funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze X, jeżeli (f_n) jest $\mathcal{K}$-jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji $f \in \mathbb{R}^X$, to jest również $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f. Wówczas $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{I}$.*

Stwierdzenie 2.23 *Załóżmy, że X jest niepustym zbiorem. Niech $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ będą takimi ideałami na ω, że $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{I}$ i $\mathcal{K}$ jest ω-$P(\mathcal{J}, \mathcal{I})$-ideałem. Wówczas dla każdego ciągu (f_n) funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze X, jeżeli (f_n) jest $\mathcal{K}$-jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji $f \in \mathbb{R}^X$, to jest również $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f.*

Dowód. Załóżmy, że $f, f_n \in \mathbb{R}^X$ $(n \in \omega)$ są takimi funkcjami, że ciąg (f_n) jest $\mathcal{K}$-jednostajnie zbieżny do f. Zdefiniujmy zbiory

$$A_0 = \left\{n \in \omega : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{2} \text{ dla pewnego } x \in X\right\},$$

$$A_k = \left\{n \in \omega : \frac{1}{k+2} \leqslant |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k+1} \text{ dla pewnego } x \in X\right\}$$

dla każdego $k \geqslant 1$. Wtedy $\{A_k : k \in \omega\} \subseteq \mathcal{K}$. Z założeń twierdzenia wynika, że istnieje zbiór $A \in \mathcal{I}$ taki, że $A_k \setminus A \in \mathcal{J}$ dla każdego $k \in \omega$ oraz $A_0 \in \mathcal{I}$. Zdefiniujmy ciąg liczb dodatnich (ε_n) w następujący sposób:

$$\varepsilon_n = \begin{cases} \frac{1}{k+1} & \text{gdy } n \in A_k \setminus A, \\ \frac{1}{n+1} & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wówczas $(\varepsilon_n) \xrightarrow{\mathcal{J}} 0$ i $\{n \in \omega : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_n\} \subseteq A_0 \cup A \in \mathcal{I}$ dla dowolnego $x \in X$. Zatem ciąg (f_n) jest $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f. □

Uwaga 2.24 Stwierdzenie 2.23 uogólnia wynik [19, Twierdzenie 3.1], gdzie autorzy pokazali, że dla dowolnego ciągu funkcji rzeczywistych (f_n), jeżeli (f_n) jest $\mathcal{I}$-jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji f, to jest również $(\mathcal{I}, \mathcal{I})$-e-zbieżny do f.

Stwierdzenie 2.25 *Załóżmy, że X jest niepustym zbiorem i $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ są ideałami na ω takimi, że $|X| < \mathfrak{b}(\mathcal{I})$ oraz $\mathcal{K}$ jest ω-$P(\mathcal{J}, \mathcal{I})$-ideałem. Wówczas dla dowolnego ciągu (f_n) funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze X, jeśli (f_n) jest $\mathcal{K}$-jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji $f \in \mathbb{R}^X$, to jest również $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f.*

Dowód. Załóżmy, że $f, f_n \in \mathbb{R}^X$ $(n \in \omega)$ są takimi funkcjami, że ciąg (f_n) jest $\mathcal{K}$-jednostajnie zbieżny do f. Zdefiniujmy zbiory

$$A_0 = \left\{ n \in \omega : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{2} \text{ dla pewnego } x \in X \right\},$$

$$A_k = \left\{ n \in \omega : \frac{1}{k+2} \leqslant |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k+1} \text{ dla pewnego } x \in X \right\}$$

dla każdego $k \geqslant 1$. Wówczas $\{A_k : k \in \omega\} \subseteq \mathcal{K}$. Ponieważ $\mathcal{K}$ jest ω-$P(\mathcal{J}, \mathcal{I})$-ideałem, więc istnieje zbiór $B \in \mathcal{I}$ taki, że $A_k \setminus B \in \mathcal{J}$ dla każdego $k \in \omega$. Jeżeli $A_0 \in \mathcal{I}^+$, to z założenia $|X| < \mathfrak{b}(\mathcal{I})$ wynika, że istnieje taka funkcja $g \in \omega^\omega$, że $\{n \in \omega : |f_n(x) - f(x)| \geqslant g(n)\} \in \mathcal{I}$ dla każdego $x \in X$. Zdefiniujmy $\mathcal{J}$-zbieżny do 0 ciąg liczb dodatnich (ε_n) w następujący sposób:

$$\varepsilon_n = \begin{cases} g(n) + 1 & \text{gdy } n \in A_0 \setminus B, \\ \frac{1}{k+2} & \text{gdy } n \in A_{k+1} \setminus B, \\ \frac{1}{n+1} & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wtedy $\{n \in \omega : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_n\} \subseteq \{n \in A_0 \setminus B : |f_n(x) - f(x)| \geqslant g(n)\} \cup B \in \mathcal{I}$ dla wszystkich $x \in X$. Zatem ciąg (f_n) jest $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f. Jeżeli natomiast $A_0 \in \mathcal{I}$, to możemy powtórzyć dowód Stwierdzenia 2.23. □

W dalszej części tego podrozdziału podsumujemy wyniki otrzymane w powyższych stwierdzeniach.

Twierdzenie 2.26 *Załóżmy, że X jest niepustym zbiorem. Niech $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ będą takimi ideałami na ω, że $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{I}$. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Dla dowolnego ciągu (f_n) funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze X, jeżeli $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{K}-u} f$ dla pewnego $f \in \mathbb{R}^X$, to $(f_n) \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})-e} f$.*

(2) *$\mathcal{K}$ jest ω-$P(\mathcal{J}, \mathcal{I})$-ideałem.*

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2). Implikacja ta wynika ze Stwierdzenia 2.21.

(2) $\Rightarrow$ (1). Implikacja ta wynika ze Stwierdzenia 2.23. □

Twierdzenie 2.27 *Załóżmy, że X jest niepustym zbiorem. Niech $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ będą takimi ideałami na ω, że $\mathcal{I}$ ma dziedziczną własność Baire'a i $\mathcal{K}$ nie jest zawarty w $\mathcal{I}$. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Dla dowolnego ciągu* (f_n) *funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze* X, *jeżeli* $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{K}-u} f$ *dla pewnego* $f \in \mathbb{R}^X$, *to* $(f_n) \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})-e} f$.

(2) $|X| < \mathfrak{b}$ *i* $\mathcal{K}$ *jest* ω-$P\,(\mathcal{J},\mathcal{I})$*-ideałem.*

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2). Implikacja ta wynika z Twierdzenia 1.5 oraz ze Stwierdzeń 2.21 i 2.22.

(2) $\Rightarrow$ (1). Implikacja ta wynika ze Stwierdzenia 2.25. □

Problem 3 *Czy teza Twierdzenia 2.27 pozostanie prawdziwa, jeżeli pominiemy założenie, że* $\mathcal{I}$ *jest ideałem z dziedziczną własnością Baire'a?*

Wniosek 2.28 *Załóżmy, że* X *jest niepustym zbiorem oraz* $\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K}$ *są ideałami na* ω *takimi, że* $|X| < \mathfrak{b}\,(\mathcal{I})$. *Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Dla dowolnego ciągu* (f_n) *funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze* X, *jeżeli* $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{K}-u} f$ *dla pewnego* $f \in \mathbb{R}^X$, *to* $(f_n) \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})-e} f$.

(2) $\mathcal{K}$ *jest* ω-$P\,(\mathcal{J},\mathcal{I})$*-ideałem.*

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2). Implikacja ta wynika ze Stwierdzenia 2.21.

(2) $\Rightarrow$ (1). Implikacja ta wynika ze Stwierdzenia 2.25. □

Wniosek 2.29 *Załóżmy, że* X *jest takim zbiorem, że* $|X| \geqslant \mathfrak{c}$. *Niech* $\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K}$ *będą ideałami na* ω. *Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Dla dowolnego ciągu* (f_n) *funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze* X, *jeżeli* $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{K}-u} f$ *dla pewnego* $f \in \mathbb{R}^X$, *to* $(f_n) \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})-e} f$.

(2) $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{I}$ *i* $\mathcal{K}$ *jest* ω-$P\,(\mathcal{J},\mathcal{I})$*-ideałem.*

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2). Implikacja ta wynika ze Stwierdzeń 2.21 i 2.22.

(2) $\Rightarrow$ (1). Implikacja ta wynika ze Stwierdzenia 2.23. □

Z Wniosków 2.28 i 2.29 wynika, że przy założeniu hipotezy continuum, badany przez nas problem jest rozstrzygnięty dla wszystkich ideałów.

2.2.3 Zbieżność σ-jednostajna

W pracy [16] Császár i Laczkovich udowodnili, że e-zbieżność jest równoważna zbieżności σ-jednostajnej. Opiszemy teraz związki między ideałowymi odpowiednikami tych zbieżności.

Definicja 2.30 (por. [19]) Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem na ω. Załóżmy, że f_n $(n \in \omega)$ i f są funkcjami rzeczywistymi określonymi na pewnym zbiorze X. Mówimy, że ciąg (f_n) jest *σ-$\mathcal{I}$-jednostajnie zbieżny do* f, jeżeli istnieją zbiory X_k $(k \in \omega)$ takie, że $X = \bigcup_{k\in\omega} X_k$ i $(f_n \restriction X_k) \xrightarrow{\mathcal{I}-u} f \restriction X_k$ dla każdego $k \in \omega$. W tym przypadku przyjmujemy oznaczenie $(f_n) \xrightarrow{\sigma-\mathcal{I}-u} f$.

Dla ideału $\mathcal{I} = \mathrm{Fin}$ otrzymujemy klasyczną zbieżność σ-jednostajną. Będziemy pisać $(f_n) \xrightarrow{\sigma-u} f$ zamiast $(f_n) \xrightarrow{\sigma-\mathrm{Fin}-u} f$.

Poniżej podajemy twierdzenia charakteryzujące, kiedy σ-$\mathcal{I}$-jednostajna zbieżność implikuje $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-e-zbieżność (por. Twierdzenie 2.32) oraz kiedy zachodzi implikacja przeciwna (por. Twierdzenie 2.33). Uzyskane wyniki wykorzystamy do podania odpowiedzi na pytanie postawione przez Dasa, Duttę i Pala w [19] (por. Uwaga 2.34).

Uwaga 2.31 W [19, Twierdzenie 3.2] autorzy pokazali, że dla dowolnego ciągu funkcji rzeczywistych (f_n), jeżeli (f_n) jest σ-$\mathcal{I}$-jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji f, to jest również $(\mathcal{I},\mathcal{I})$-e-zbieżny do f.

Twierdzenie 2.32 *Załóżmy, że X jest niepustym zbiorem. Niech $\mathcal{I},\mathcal{J}$ będą ideałami na ω. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Dla dowolnego ciągu (f_n) funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze X, jeżeli $(f_n) \xrightarrow{\sigma-\mathcal{I}-u} f$ dla pewnego $f \in \mathbb{R}^X$, to $(f_n) \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})-e} f$.*

(2) *$\mathcal{I}$ jest ω-$P(\mathcal{J},\mathcal{I})$-ideałem.*

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2). Implikacja ta wynika ze Stwierdzenia 2.21.

(2) $\Rightarrow$ (1). Załóżmy, że $f, f_n \in \mathbb{R}^X$ $(n \in \omega)$ są takimi funkcjami, że ciąg (f_n) jest σ-$\mathcal{I}$-jednostajnie zbieżny do f. Wówczas (f_n) jest również $(\mathcal{I},\mathcal{I})$-e-zbieżny do f (por. Uwaga 2.31). Zatem istnieje taki $\mathcal{I}$-zbieżny do 0 ciąg liczb dodatnich (ε_n), że $\{n \in \omega : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}$ dla wszystkich $x \in X$. Zdefiniujmy zbiory $A_0 = \{n \in \omega : \varepsilon_n \geqslant 1\}$ i $A_k = \{n \in \omega : 1/(k+1) \leqslant \varepsilon_n < 1/k\}$ dla każdego $k \geqslant 1$. Wówczas $\{A_k : k \in \omega\} \subseteq \mathcal{I}$.

Ponieważ $\mathcal{I}$ jest ω-$P(\mathcal{J},\mathcal{I})$-ideałem, więc istnieje taki zbiór $A \in \mathcal{I}$, że dla dowolnego $k \in \omega$ mamy $A_k \setminus A \in \mathcal{J}$. Stąd $(\varepsilon_n)_{n\in\omega\setminus A}$ jest $\mathcal{J}$-zbieżny do 0. Zdefiniujmy ciąg liczb dodatnich (η_n) w następujący sposób:

$$\eta_n = \begin{cases} \varepsilon_n & \text{gdy } n \in \omega \setminus A, \\ \frac{1}{n+1} & \text{gdy } n \in A. \end{cases}$$

Wtedy $(\eta_n) \xrightarrow{\mathcal{J}} 0$ i $\{n \in \omega : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \eta_n\} \in \mathcal{I}$ dla każdego $x \in X$. Stąd otrzymujemy, że $(f_n) \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})-e} f$. □

Twierdzenie 2.33 *Załóżmy, że X jest niepustym zbiorem. Niech $\mathcal{I},\mathcal{J}$ będą ideałami na ω. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Dla dowolnego ciągu (f_n) funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze X, jeżeli $(f_n) \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})-e} f$ dla pewnego $f \in \mathbb{R}^X$, to $(f_n) \xrightarrow{\sigma-\mathcal{I}-u} f$.*

(2) *$\mathcal{I}$ jest $|X|$-przeliczalnie generowany i $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$.*

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2). Pokażemy najpierw, że ideał $\mathcal{I}$ jest $|X|$-przeliczalnie generowany. Niech $\{A_\alpha : \alpha < |X|\} \subseteq \mathcal{I}$. Ustawmy w ciąg $(x_\alpha)_{\alpha<|X|}$ różne elementy zbioru X. Zdefiniujmy funkcje $f_n, f : X \to \mathbb{R}\,(n \in \omega)$ w następujący sposób:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x = x_\alpha \text{ i } n \in A_\alpha \text{ dla pewnego } \alpha < |X|, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

oraz $f(x) = 0$ dla każdego $x \in X$. Wówczas $(f_n) \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})-e} f$. Z założenia (1) wynika, że $(f_n) \xrightarrow{\sigma-\mathcal{I}-u} f$. Niech $X_k \subseteq X$ $(k \in \omega)$ będą takimi zbiorami, że $X = \bigcup_{k\in\omega} X_k$ i $(f_n \restriction X_k) \xrightarrow{\mathcal{I}-u} f \restriction X_k$ dla wszystkich $k \in \omega$. Dla każdego $m \in \omega$ zdefiniujmy

$$C_m = \left\{ n \in \omega : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{2} \text{ dla pewnego } x \in X_m \right\}.$$

Wówczas $\{C_m : m \in \omega\} \subseteq \mathcal{I}$. Ustalmy $\alpha < |X|$ i niech $k \in \omega$ będzie takie, że $x_\alpha \in X_k$. Wtedy $A_\alpha = \{n \in \omega : f_n(x_\alpha) = 1\} \subseteq C_k$, więc $\mathcal{I}$ jest ideałem $|X|$-przeliczalnie generowanym.

Pokażemy teraz, że $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$. Łatwo zauważyć, że dla każdego ciągu (f_n), jeżeli $(f_n) \xrightarrow{\sigma-\mathcal{I}-u} f$, to $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{I}} f$. Zatem z założenia (1) i z Twierdzenia 2.6 wynika, że $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Załóżmy, że $f, f_n \in \mathbb{R}^X$ $(n \in \omega)$ są takimi funkcjami, że ciąg (f_n) jest $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-e-zbieżny do f. Wówczas istnieje taki $\mathcal{J}$-zbieżny do 0 ciąg liczb dodatnich (ε_n), że $A_x = \{n \in \omega : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}$ dla wszystkich $x \in X$. Niech $\{C_m : m \in \omega\} \subseteq \mathcal{I}$ będzie taką rodziną, że dla każdego $x \in X$ istnieje $m \in \omega$, dla którego $A_x \subseteq C_m$. Dla dowolnego $k \in \omega$ zdefiniujmy zbiory

$$X_k = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n \text{ dla wszystkich } n \in \omega \setminus C_k\}.$$

Zauważmy, że $X = \bigcup_{k\in\omega} X_k$. Istotnie, niech $x \in X$. Istnieje $k \in \omega$ takie, że $A_x \subseteq C_k$, a zatem $x \in X_k$. Pokażemy teraz, że ciąg $(f_n \restriction X_k)$ jest $\mathcal{I}$-jednostajnie zbieżny do $f \restriction X_k$ dla każdego $k \in \omega$.

Ustalmy $k \in \omega$ i $\varepsilon > 0$. Niech $B_\varepsilon = \{n \in \omega : \varepsilon_n \geqslant \varepsilon\} \in \mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$. Wtedy $\{n \in \omega : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} \subseteq C_k \cup B_\varepsilon \in \mathcal{I}$ dla każdego $x \in X_k$. $\square$

Uwaga 2.34 Powyższe twierdzenia są rozszerzeniem wyników jakie uzyskaliśmy wcześniej w pracy [23], które posłużyły nam do rozwiązania problemów postawionych przez Dasa, Duttę i Pala w [19]. Między innymi w [19, Twierdzenie 3.2] autorzy pokazali, że jeżeli $\mathcal{I}$ jest ideałem przeliczalnie generowanym i ciąg funkcji rzeczywistych (f_n) jest $(\mathcal{I},\mathcal{I})$-e-zbieżny do pewnej funkcji f, to (f_n) jest również σ-$\mathcal{I}$-jednostajnie zbieżny do f. Ponadto postawili problem, czy można rozszerzyć ten rezultat na wszystkie ideały. Z Twierdzenia 2.33 wynika, że w tym przypadku implikacja między zbieżnościami zachodzi wyłącznie dla ideałów $|X|$-przeliczalnie generowanych, gdzie X jest dziedziną funkcji (por. również [23, Wniosek 5.4]).

2.3 Zbieżności na zbiorze z filtru dualnego do ideału

W pracy [32] Kostyrko, Šalát i Wilczyński wprowadzili następujące pojęcie zbieżności ciągów liczbowych na podzbiorze z filtru dualnego do pewnego ideału.

Definicja 2.35 Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem na ω. Mówimy, że ciąg liczb rzeczywistych (x_n) jest *$\mathcal{I}^*$-zbieżny do $x \in \mathbb{R}$*, jeżeli istnieje taki zbiór $F \in \mathcal{I}^*$, że $(x_n)_{n\in F} \to x$.

Das Dutta i Pal w podobny sposób zdefiniowali pojęcia zbieżności punktowej, jednostajnej, σ-jednostajnej oraz e-zbieżności ciągów funkcyjnych rozważanych na podzbiorze z filtru dualnego do pewnego ideału (por. [19]). W pracy [23] podaliśmy następującą definicję.

Definicja 2.36 Niech $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ będą ideałami na ω. Załóżmy, że f_n $(n \in \omega)$ oraz f są funkcjami rzeczywistymi określonymi na pewnym zbiorze X. Mówimy, że ciąg (f_n) jest *$(\mathcal{I}^*, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f*, jeżeli istnieje taki zbiór $F \in \mathcal{I}^*$, że $(f_n)_{n\in F} \xrightarrow{(\mathrm{Fin},\mathcal{J})-e} f$. W tym przypadku przyjmujemy oznaczenie $(f_n) \xrightarrow{(\mathcal{I}^*,\mathcal{J})-e} f$.

Powyższa definicja uogólnia wprowadzoną wcześniej w pracy [19] definicję e-zbieżności filtrowej, która jest równoważna $(\mathcal{I}^*, \mathrm{Fin})$-e-zbieżności w naszej notacji.

W tym podrozdziale opiszemy wzajemne relacje zachodzące pomiędzy e-zbieżnością, a zbieżnościami punktową, jednostajną i σ-jednostajną, rozważanymi na podzbiorach z filtrów dualnych do pewnych ideałów.

2.3.1 Zbieżność punktowa

Definicja 2.37 (por. [19]) Niech $\mathcal{K}$ będzie ideałem na ω. Załóżmy, że f_n $(n \in \omega)$ i f są funkcjami rzeczywistymi określonymi na zbiorze X. Mówimy, że ciąg (f_n) jest *$\mathcal{K}^*$-zbieżny do f*, jeżeli istnieje taki zbiór $F \in \mathcal{K}^*$, że $(f_n)_{n\in F} \to f$. W takim przypadku będziemy pisać $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{K}^*} f$.

Poniżej podajemy twierdzenia charakteryzujące, kiedy $(\mathcal{I}^*, \mathcal{J})$-e-zbieżność implikuje $\mathcal{K}^*$-zbieżność (por. Twierdzenie 2.38) oraz kiedy zachodzi implikacja przeciwna (por. Twierdzenia 2.39 i 2.40).

Twierdzenie 2.38 *Załóżmy, że X jest niepustym zbiorem. Niech $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ będą ideałami na ω. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Dla dowolnego ciągu (f_n) funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze X, jeżeli $(f_n) \xrightarrow{(\mathcal{I}^*,\mathcal{J})-e} f$ dla pewnego $f \in \mathbb{R}^X$, to $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{K}^*} f$.*

(2) *$\mathcal{I} \subseteq \mathcal{K}$ i $\mathcal{J}$ jest ω-$P(\mathrm{Fin}, \mathcal{K})$-ideałem.*

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2). Załóżmy najpierw, że ideał $\mathcal{I}$ nie jest zawarty w ideale $\mathcal{K}$. Niech $A \in \mathcal{I}$ będzie takim zbiorem, że $A \in \mathcal{K}^+$. Zdefiniujmy funkcje $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \omega)$ w następujący sposób:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } n \in A, \\ 0 & \text{gdy } n \in \omega \setminus A \end{cases}$$

oraz $f(x) = 0$ dla każdego $x \in X$. Wówczas ciąg (f_n) jest $(\mathcal{I}^*, \mathcal{J})$-e-zbieżny do funkcji f, ale nie jest $\mathcal{K}^*$-zbieżny do f.

Załóżmy teraz, że $\mathcal{J}$ nie jest ω-$P(\mathrm{Fin}, \mathcal{K})$-ideałem. Niech $\{A_k : k \in \omega\} \subseteq \mathcal{J}$ będzie taką rodziną, że dla każdego $A \in \mathcal{K}$ istnieje $k \in \omega$, dla którego $A_k \setminus A \in \mathrm{Fin}^+$. Ponadto możemy założyć, że zbiory z rodziny $\{A_k : k \in \omega\}$ są parami rozłączne. Zdefiniujmy funkcje $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \omega)$ w następujący sposób:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{k+2} & \text{gdy } n \in A_k, \\ 0 & \text{gdy } n \in \omega \setminus \bigcup_{k \in \omega} A_k \end{cases}$$

oraz $f(x) = 0$ dla każdego $x \in X$. Niech (ε_n) będzie ciągiem danym następującym wzorem:

$$\varepsilon_n = \begin{cases} \frac{1}{k+1} & \text{gdy } n \in A_k, \\ \frac{1}{n+1} & \text{gdy } n \in \omega \setminus \bigcup_{k \in \omega} A_k. \end{cases}$$

Wtedy $(\varepsilon_n) \xrightarrow{\mathcal{J}} 0$ i $\{n \in \omega : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_n\} = \emptyset$ dla każdego $x \in X$. Zatem ciąg (f_n) jest $(\mathcal{I}^*, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f. Pokażemy teraz, że (f_n) nie jest $\mathcal{K}^*$-zbieżny do f.

Przypuśćmy przeciwnie, że istnieje taki zbiór $A \in \mathcal{K}$, że $(f_n)_{n \in \omega \setminus A} \to f$. Wtedy istnieje $k \in \omega$, dla którego $A_k \setminus A \in \mathrm{Fin}^+$. Niech $\varepsilon = 1/(k+2)$ i $x \in X$. Wówczas $\{n \in \omega \setminus A : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} \in \mathrm{Fin}^+$. Otrzymaliśmy sprzeczność z wyborem zbioru A.

(2) $\Rightarrow$ (1). Załóżmy, że $f, f_n \in \mathbb{R}^X$ $(n \in \omega)$ są takimi funkcjami, że ciąg (f_n) jest $(\mathcal{I}^*, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f. Niech $B \in \mathcal{I} \subseteq \mathcal{K}$ będzie takim zbiorem, że $(f_n)_{n \in \omega \setminus B}$ jest $(\mathrm{Fin}, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f. Ustawmy w ciąg $(x_\alpha)_{\alpha < |X|}$ wszystkie punkty zbioru X. Istnieje taki $\mathcal{J}$-zbieżny do 0 ciąg dodatnich liczb rzeczywistych (ε_n), że $\{n \in \omega \setminus B : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geqslant \varepsilon_n\} \in \mathrm{Fin}$ dla wszystkich $\alpha < |X|$. Zdefiniujmy zbiory $A_0 = \{n \in \omega : \varepsilon_n \geqslant 1\}$ oraz $A_k = \{n \in \omega : 1/(k+1) \leqslant \varepsilon_n < 1/k\}$ dla $k \geqslant 1$. Ponieważ $\mathcal{J}$ jest ω-$P(\mathrm{Fin}, \mathcal{K})$-ideałem, więc istnieje taki zbiór $A \in \mathcal{K}$, że $A_k \setminus A \in \mathrm{Fin}$ dla każdego $k \in \omega$. Niech $K = A \cup B \in \mathcal{K}$. Pokażemy, że $(f_n)_{n \in \omega \setminus K} \to f$.

Ustalmy $\alpha < |X|$ i $k \in \omega$. Wtedy $\{n \in \omega \setminus K : \varepsilon_n \geqslant 1/k\} \subseteq \bigcup_{i<k} (A_i \setminus A) \in \mathrm{Fin}$ oraz $\{n \in \omega \setminus K : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geqslant \varepsilon_n\} \in \mathrm{Fin}$. Stąd otrzymujemy, że $\{n \in \omega \setminus K : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geqslant 1/k\} \in \mathrm{Fin}$. □

Twierdzenie 2.39 *Załóżmy, że X jest zbiorem takim, że $|X| \geqslant \mathfrak{b}$. Niech $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ będą ideałami na ω. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Dla dowolnego ciągu* (f_n) *funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze* X*, jeżeli* $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{K}^*} f$ *dla pewnego* $f \in \mathbb{R}^X$*, to* $(f_n) \xrightarrow{(\mathcal{I}^*,\mathcal{J})-e} f$*.*

(2) $\mathcal{I}$*,* $\mathcal{J}$ *są ortogonalne i* $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{I}$*.*

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2). Z Twierdzenia 1.5 wynika, że $\mathfrak{b}^*(\mathrm{Fin}) = \mathfrak{b}$, więc istnieje taka rodzina $\{g_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}\} \subseteq \omega^\omega$, że dla każdej funkcji $g \in \omega^\omega$ i dla każdego zbioru $A \in \mathrm{Fin}^+$, istnieje $\alpha < \mathfrak{b}$, dla którego $\{n \in A : g_\alpha(n) \geqslant g(n)\} \in \mathrm{Fin}^+$. Ustawmy w ciąg $(x_\alpha)_{\alpha<|X|}$ wszystkie punkty zbioru X.

Załóżmy najpierw, że $\mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$ nie są ideałami ortogonalnymi. Zdefiniujmy funkcje $f_n, f : X \to \mathbb{R}\,(n \in \omega)$ w następujący sposób:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{k+1} & \text{gdy } n \in [g_\alpha(k), g_\alpha(k+1)) \text{ i } x = x_\alpha \text{ dla pewnego } \alpha < \mathfrak{b}, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

oraz $f(x) = 0$ dla każdego $x \in X$. Wówczas $(f_n) \to f$, a więc $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{K}^*} f$. Pokażemy teraz, że (f_n) nie jest $(\mathcal{I}^*, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f.

Przypuśćmy przeciwnie, że istnieją zbiór $A \in \mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$-zbieżny do 0 ciąg o wyrazach dodatnich (ε_n) takie, że $\{n \in \omega \setminus A : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geqslant \varepsilon_n\} \in \mathrm{Fin}$ dla każdego $\alpha < |X|$. Zdefiniujmy zbiory $A_0 = \{n \in \omega : \varepsilon_n \geqslant 1/2\}$ oraz $A_k = \{n \in \omega : 1/(k+2) \leqslant \varepsilon_n < 1/(k+1)\}$ dla $k \geqslant 1$. Ponieważ ideały $\mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$ nie są ortogonalne, więc istnieje taki ciąg $k_0 < k_1 < ...$, że zbiory $A_{k_n} \setminus A$ są niepuste dla wszystkich $n \in \omega$. Niech $a_{k_n} \in A_{k_n} \setminus A$ dla każdego $n \in \omega$ i niech $K = \{k_n : n \in \omega\}$. Zdefiniujmy funkcję $g \in \omega^K$ wzorem $g\,(n) = a_n$. Wtedy istnieje takie $\alpha < \mathfrak{b}$, że $B_\alpha = \{n \in K : g_\alpha(n) \geqslant g(n)\} \in \mathrm{Fin}^+$. Jeżeli $k_n \in B_\alpha$ dla pewnego $n \in \omega$, to wówczas $|f_{a_{k_n}}(x_\alpha) - f(x_\alpha)| = f_{a_{k_n}}(x_\alpha) \geqslant 1/(k_n+1) > \varepsilon_{a_{k_n}}$. Stąd $\{a_n : n \in B_\alpha\} \subseteq \{n \in \omega \setminus A : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geqslant \varepsilon_n\} \in \mathrm{Fin}$. Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż B_α jest zbiorem nieskończonym i wszystkie a_n są różne.

Załóżmy teraz, że ideał $\mathcal{K}$ nie jest zawarty w ideale $\mathcal{I}$. Niech $K \in \mathcal{K} \cap \mathcal{I}^+$. Zdefiniujmy funkcje $f_n, f : X \to \mathbb{R}\,(n \in \omega)$ w następujący sposób:

$$f_n(x) = \begin{cases} g_\alpha(n) & \text{gdy } n \in K \text{ i } x = x_\alpha, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

oraz $f(x) = 0$ dla każdego $x \in X$. Wówczas $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{K}^*} f$. Pokażemy teraz, że (f_n) nie jest $(\mathcal{I}^*, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f.

Przypuśćmy przeciwnie, że istnieją zbiór $A \in \mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$-zbieżny do 0 ciąg o wyrazach dodatnich (ε_n) takie, że $\{n \in \omega \setminus A : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geqslant \varepsilon_n\} \in \mathrm{Fin}$ dla każdego $\alpha < |X|$. Zdefiniujmy funkcję $g \in \omega^\omega$ wzorem $g\,(n) = \min\{k \in \omega : \varepsilon_n \leqslant k\}$. Wtedy istnieje takie $\alpha < \mathfrak{b}$, że $\{n \in K \setminus A : g_\alpha(n) \geqslant g(n)\} \in \mathrm{Fin}^+$. Otrzymujemy sprzeczność, gdyż

$$\{n \in K \setminus A : g_\alpha(n) \geqslant g(n)\} = \{n \in K \setminus A : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geqslant g\,(n)\} \subseteq$$

$$\{n \in \omega \setminus A : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geqslant \varepsilon_n\} \in \mathrm{Fin}.$$

(2) $\Rightarrow$ (1). Załóżmy, że $f, f_n \in \mathbb{R}^X$ $(n \in \omega)$ są takimi funkcjami, że ciąg (f_n) jest $\mathcal{K}^*$-zbieżny do f. Wówczas istnieje taki zbiór $K \in \mathcal{K}$, że $(f_n)_{n \in \omega \setminus K} \to f$. Z założenia (2) wynika, że istnieją takie rozłączne zbiory $A \in \mathcal{I}$ i $B \in \mathcal{J}$, że $A \cup B = \omega$ oraz $K \subseteq A$. Zdefiniujmy ciąg liczb dodatnich (ε_n) w następujący sposób:

$$\varepsilon_n = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{gdy } n \in A, \\ 1 & \text{gdy } n \in B. \end{cases}$$

Wówczas $(\varepsilon_n) \xrightarrow{\mathcal{J}} 0$ oraz $\{n \in \omega \setminus A : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_n\} \in \mathrm{Fin}$ dla wszystkich $x \in X$. Zatem ciąg (f_n) jest $(\mathcal{I}^*, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f □

Twierdzenie 2.40 *Załóżmy, że X jest takim niepustym zbiorem, że $|X| < \mathfrak{b}$. Niech $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ będą ideałami na ω. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Dla dowolnego ciągu (f_n) funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze X, jeżeli $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{K}^*} f$ dla pewnego $f \in \mathbb{R}^X$, to $(f_n) \xrightarrow{(\mathcal{I}^*, \mathcal{J})-e} f$.*

(2) *$\mathcal{K} \subseteq \mathcal{I} \sqcup \mathcal{J}$.*

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2). Załóżmy, że ideał $\mathcal{K}$ nie jest zawarty w $\mathcal{I} \sqcup \mathcal{J}$. Niech $K \in \mathcal{K}$ będzie takim zbiorem, że $K \in (\mathcal{I} \sqcup \mathcal{J})^+$. Zdefiniujmy funkcje $f_n, f : X \to \mathbb{R}\,(n \in \omega)$ w następujący sposób:

$$f_n(x) = \begin{cases} 2 & \text{gdy } n \in K, \\ \frac{1}{n+1} & \text{gdy } n \in \omega \setminus K \end{cases}$$

oraz $f(x) = 0$ dla każdego $x \in X$. Wówczas $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{K}^*} f$. Pokażemy teraz, że (f_n) nie jest $(\mathcal{I}^*, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f.

Przypuśćmy przeciwnie, że istnieją zbiór $B \in \mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$-zbieżny do 0 ciąg o wyrazach dodatnich (ε_n) takie, że $\{n \in \omega \setminus B : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_n\} \in \mathrm{Fin}$ dla wszystkich $x \in X$. Zdefiniujmy $A = \{n \in \omega : \varepsilon_n \geqslant 1\} \in \mathcal{J}$. Ponieważ $K \setminus (A \cup B)$ jest zbiorem nieskończonym i jednocześnie $K \setminus (A \cup B) \subseteq \{n \in \omega \setminus B : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_n\} \in \mathrm{Fin}$, więc otrzymujemy sprzeczność.

(2) $\Rightarrow$ (1). Załóżmy, że $f, f_n \in \mathbb{R}^X$ $(n \in \omega)$ są takimi funkcjami, że ciąg (f_n) jest $\mathcal{K}^*$-zbieżny do f. Niech $K \in \mathcal{K}$ będzie takim zbiorem, że $(f_n)_{n \in \omega \setminus K} \to f$. Wówczas z Twierdzeń 1.27(1), 2.7(1) oraz Faktu 1.14(3) otrzymujemy, że $(f_n)_{n \in \omega \setminus K} \xrightarrow{e} f$. Niech $(\gamma_n) \to 0$ będzie takim ciągiem o wyrazach dodatnich, że $\{n \in \omega \setminus K : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \gamma_n\} \in \mathrm{Fin}$ dla każdego $x \in X$. Ponieważ $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{I} \sqcup \mathcal{J}$, więc istnieją takie zbiory rozłączne $A \in \mathcal{J}$ i $B \in \mathcal{I}$, że $K = A \cup B$. Z założenia $|X| < \mathfrak{b}$ wynika, że istnieje taka funkcja $g \in \omega^\omega$, że $\{n \in A : |f_n(x) - f(x)| \geqslant g(n)\} \in \mathrm{Fin}$ dla dowolnego $x \in X$. Zdefiniujmy ciąg liczb dodatnich (ε_n) w następujący sposób:

$$\varepsilon_n = \begin{cases} g\,(n) & \text{gdy } n \in A, \\ \frac{1}{n+1} & \text{gdy } n \in B, \\ \gamma_n & \text{gdy } n \in \omega \setminus K. \end{cases}$$

Wówczas $(\varepsilon_n) \xrightarrow{\mathcal{J}} 0$ oraz $\{n \in \omega \setminus B : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_n\} = \{n \in \omega \setminus K : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_n\} \cup \{n \in A : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_n\} \in \mathrm{Fin}$ dla każdego $x \in X$. Stąd $(f_n)_{n\in\omega\setminus B}$ jest $(\mathrm{Fin}, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f. □

Uwaga 2.41 Jeżeli ideały $\mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$ są ortogonalne, to $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{I} \sqcup \mathcal{J}$ dla dowolnego ideału $\mathcal{K}$. Z Twierdzenia 2.40 wynika, że w takim przypadku $\mathcal{K}^*$-zbieżność implikuje $(\mathcal{I}^*, \mathcal{J})$-e-zbieżność dla wszystkich ciągów funkcyjnych określonych na zbiorze o mocy mniejszej niż $\mathfrak{b}$. Zauważmy, że warunek ortogonalności ideałów $\mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$ nie jest wystarczający do tego, aby wspomniana implikacja między zbieżnościami zachodziła dla ciągów funkcyjnych określonych na dużych w sensie mocy dziedzinach (por. Twierdzenie 2.39).

2.3.2 Zbieżność jednostajna

Definicja 2.42 (por. [19]) Niech $\mathcal{K}$ będzie ideałem na ω. Załóżmy, że f_n $(n \in \omega)$ i f są funkcjami rzeczywistymi określonymi na zbiorze X. Mówimy, że ciąg (f_n) jest *$\mathcal{K}^*$-jednostajnie zbieżny do f*, jeżeli istnieje taki zbiór $F \in \mathcal{K}^*$, że $(f_n)_{n\in F} \xrightarrow{u} f$. W takim przypadku przyjmujemy oznaczenie $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{K}^*-u} f$.

Twierdzenie 2.43 *Załóżmy, że X jest takim zbiorem, że $|X| \geqslant \mathfrak{b}$. Niech $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ będą ideałami na ω. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Dla dowolnego ciągu (f_n) funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze X, jeżeli $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{K}^*-u} f$ dla pewnego $f \in \mathbb{R}^X$, to $(f_n) \xrightarrow{(\mathcal{I}^*,\mathcal{J})-e} f$.*

(2) *$\mathcal{K} \subseteq \mathcal{I}$.*

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2). Załóżmy, że ideał $\mathcal{K}$ nie jest zawarty w ideale $\mathcal{I}$. Niech $K \in \mathcal{K}$ będzie takim zbiorem, że $K \in \mathcal{I}^+$. Z Twierdzenia 1.5 wynika, że $\mathfrak{b}^*(\mathrm{Fin}) = \mathfrak{b}$, więc istnieje taka rodzina $\{g_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}\} \subseteq \omega^\omega$, że dla każdej funkcji $g \in \omega^\omega$ i dla każdego zbioru $A \in \mathrm{Fin}^+$, istnieje $\alpha < \mathfrak{b}$, dla którego $\{n \in A : g_\alpha(n) \geqslant g(n)\} \in \mathrm{Fin}^+$. Ustawmy w ciąg $(x_\alpha)_{\alpha<|X|}$ różne punkty zbioru X. Zdefiniujmy funkcje $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \omega)$ w następujący sposób:

$$f_n(x) = \begin{cases} g_\alpha(n) & \text{gdy } n \in K \text{ i } x = x_\alpha, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

oraz $f(x) = 0$ dla każdego $x \in X$. Wówczas $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{K}^*-u} f$. Pokażemy teraz, że (f_n) nie jest $(\mathcal{I}^*, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f.

Przypuśćmy przeciwnie, że istnieją zbiór $B \in \mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$-zbieżny do 0 ciąg o wyrazach dodatnich (ε_n) takie, że $\{n \in \omega \setminus B : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geqslant \varepsilon_n\} \in \mathrm{Fin}$ dla każdego $\alpha < |X|$. Zdefiniujmy funkcję $g \in \omega^\omega$ wzorem $g(n) = \min\{k \in \omega : k \geqslant \varepsilon_n\}$ dla wszystkich $n \in \omega$. Wtedy istnieje $\alpha < |X|$ takie, że

$$\aleph_0 = |\{n \in K \setminus B : g_\alpha(n) \geqslant g(n)\}| = |\{n \in K \setminus B : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geqslant g(n)\}| \leqslant$$

$$|\{n \in K \setminus B : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geqslant \varepsilon_n\}| \leqslant |\{n \in \omega \setminus B : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geqslant \varepsilon_n\}|.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, więc ciąg (f_n) nie jest $(\mathcal{I}^*, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f.

(2) $\Rightarrow$ (1). Załóżmy, że $f, f_n \in \mathbb{R}^X$ $(n \in \omega)$ są takimi funkcjami, że ciąg (f_n) jest $\mathcal{K}^*$-jednostajnie zbieżny do f. Niech $K \in \mathcal{K} \subseteq \mathcal{I}$ będzie takim zbiorem, że $(f_n)_{n\in\omega\setminus K} \xrightarrow{u} f$. Ze Stwierdzenia 2.23 wynika, że $(f_n)_{n\in\omega\setminus K}$ jest $(\mathrm{Fin}, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f. □

Dowód poniższego twierdzenia jest analogiczny do dowodu Twierdzenia 2.40.

Twierdzenie 2.44 *Załóżmy, że X jest takim niepustym zbiorem, że $|X| < \mathfrak{b}$. Niech $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ będą ideałami na ω. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Dla dowolnego ciągu (f_n) funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze X, jeżeli $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{K}^*-u} f$ dla pewnego $f \in \mathbb{R}^X$, to $(f_n) \xrightarrow{(\mathcal{I}^*,\mathcal{J})-e} f$.*

(2) $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{I} \sqcup \mathcal{J}$.

Twierdzenie 2.45 *Niech $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ będą ideałami na ω.*

(1) *Jeżeli X jest niepustym zbiorem skończonym, to następujące warunki są równoważne.*

   (a) *Dla dowolnego ciągu (f_n) funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze X, jeżeli $(f_n) \xrightarrow{(\mathcal{I}^*,\mathcal{J})-e} f$ dla pewnego $f \in \mathbb{R}^X$, to $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{K}^*-u} f$.*

   (b) *$\mathcal{I} \subseteq \mathcal{K}$ i $\mathcal{J}$ jest ω-$P(\mathrm{Fin}, \mathcal{K})$-ideałem.*

(2) *Jeżeli X jest zbiorem nieskończonym, to istnieją takie funkcje rzeczywiste f, f_n $(n \in \omega)$ określone na zbiorze X, że ciąg (f_n) jest $(\mathcal{I}^*, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f, ale nie jest $\mathcal{K}^*$-jednostajnie zbieżny do f.*

Dowód. (1) Dowód jest analogiczny do dowodu Twierdzenia 2.38.

(2) Dowód jest analogiczny do dowodu Twierdzenia 2.20(2). □

2.3.3 Zbieżność σ-jednostajna

Definicja 2.46 (por. [19]) Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem na ω. Załóżmy, że f_n $(n \in \omega)$ i f są funkcjami rzeczywistymi określonymi na zbiorze X. Mówimy, że ciąg (f_n) jest *σ-$\mathcal{I}^*$-jednostajnie zbieżny do f*, jeżeli istnieją zbiory X_k $(k \in \omega)$ takie, że $X = \bigcup_{k\in\omega} X_k$ oraz $(f_n \restriction X_k) \xrightarrow{\mathcal{I}^*-u} f \restriction X_k$ dla każdego $k \in \omega$. W tym przypadku będziemy pisać $(f_n) \xrightarrow{\sigma-\mathcal{I}^*-u} f$.

W tej części podamy twierdzenia charakteryzujące relacje zachodzące pomiędzy $(\mathcal{I}^*, \mathcal{J})$-e-zbieżnością, a zbieżnością σ-$\mathcal{I}^*$-jednostajną. Uzyskane wyniki wykorzystamy do podania odpowiedzi na pytanie postawione przez Dasa, Duttę i Pala w [19] (por. Uwaga 2.50).

Twierdzenie 2.47 *Załóżmy, że X jest niepustym zbiorem. Niech $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ będą ideałami na ω. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Dla dowolnego ciągu (f_n) funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze X, jeżeli $(f_n) \xrightarrow{(\mathcal{I}^*,\mathcal{J})-e} f$ dla pewnego $f \in \mathbb{R}^X$, to $(f_n) \xrightarrow{\sigma-\mathcal{I}^*-u} f$.*

(2) *$\mathcal{J}$ jest ω-$P(\mathrm{Fin}, \mathcal{I})$-ideałem.*

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2). Niech $A_0, A_1, ... \in \mathcal{J}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że zbiory A_n są parami rozłączne. Zdefiniujmy funkcje $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \omega)$ w następujący sposób:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{k+2} & \text{gdy } n \in A_k, \\ 0 & \text{gdy } n \in \omega \setminus \bigcup_{k\in\omega} A_k \end{cases}$$

oraz $f(x) = 0$ dla każdego $x \in X$. Niech (ε_n) będzie ciągiem danym następującym wzorem:

$$\varepsilon_n = \begin{cases} \frac{1}{k+1} & \text{gdy } n \in A_k, \\ \frac{1}{n+1} & \text{gdy } n \in \omega \setminus \bigcup_{k\in\omega} A_k. \end{cases}$$

Wtedy $(\varepsilon_n) \xrightarrow{\mathcal{J}} 0$ i $\{n \in \omega : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_n\} = \emptyset$ dla wszystkich $x \in X$, więc ciąg (f_n) jest $(\mathcal{I}^*, \mathcal{J})$-e-zbieżny do funkcji f. Z założenia (1) oraz definicji (f_n) i f wynika, że (f_n) jest również $\mathcal{I}^*$-jednostajnie zbieżny do f. Niech $A \in \mathcal{I}$ będzie takim zbiorem, że $(f_n)_{n\in\omega\setminus A} \xrightarrow{u} f$. Ustalmy $k \in \omega$. Wówczas $\{n \in \omega \setminus A : |f_n(x) - f(x)| \geqslant 1/(k+2)\} \in \mathrm{Fin}$ dla każdego $x \in X$, więc $A_k \setminus A \in \mathrm{Fin}$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Załóżmy, że $f, f_n \in \mathbb{R}^X$ $(n \in \omega)$ są takimi funkcjami, że ciąg (f_n) jest $(\mathcal{I}^*, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f. Istnieją zbiór $G \in \mathcal{I}^*$ i $\mathcal{J}$-zbieżny do 0 ciąg o wyrazach dodatnich (ε_n) takie, że $\{n \in G : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_n\} \in \mathrm{Fin}$ dla wszystkich $x \in X$. Dla każdego $k \in \omega$ niech $A_k = \{n \in \omega : \varepsilon_n \geqslant 1/(k+1)\} \in \mathcal{J}$. Z założenia (2) istnieje zbiór $A \in \mathcal{I}$ taki, że $A_k \setminus A \in \mathrm{Fin}$ dla dowolnego $k \in \omega$. Zdefiniujmy zbiór $F = G \setminus A \in \mathcal{I}^*$ oraz zbiory

$$X_k = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n \text{ dla wszystkich } n \geqslant k \text{ i } n \in G\}$$

dla każdego $k \in \omega$. Wówczas $X = \bigcup_{k\in\omega} X_k$ i $(f_n \restriction X_k)_{n\in F} \xrightarrow{u} f \restriction X_k$ dla każdego $k \in \omega$. $\square$

Twierdzenie 2.48 *Załóżmy, że X jest takim zbiorem, że $|X| \geqslant \mathfrak{b}$. Niech $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ będą ideałami na ω. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Dla dowolnego ciągu (f_n) funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze X, jeżeli $(f_n) \xrightarrow{\sigma-\mathcal{I}^*-u} f$ dla pewnego $f \in \mathbb{R}^X$, to $(f_n) \xrightarrow{(\mathcal{I}^*,\mathcal{J})-e} f$.*

(2) *$\mathcal{I}$ jest P-ideałem.*

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2). Załóżmy, że $\mathcal{I}$ nie jest P-ideałem. Niech $\{A_k : k \in \omega\} \subseteq \mathcal{I}$ będzie taką rodziną, że nie istnieje taki zbiór $A \in \mathcal{I}$, że $A_k \setminus A \in \mathrm{Fin}$ dla każdego $k \in \omega$. Ponieważ $\mathfrak{b}^*(\mathrm{Fin}) = \mathfrak{b}$ (por. Twierdzenie 1.5), więc istnieje taka rodzina $\{g_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}\} \subseteq \omega^\omega$, że dla każdej funkcji $g \in \omega^\omega$ i dla każdego zbioru $A \in \mathrm{Fin}^+$, istnieje $\alpha < \mathfrak{b}$, dla którego $\{n \in A : g_\alpha(n) \geqslant g(n)\} \in \mathrm{Fin}^+$. Ustawmy w ciąg $(x_{k,\alpha})_{k\in\omega,\alpha<|X|}$ wszystkie punkty zbioru X. Zdefiniujmy funkcje $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \omega)$ w następujący sposób:

$$f_n(x) = \begin{cases} g_\alpha(n) & \text{gdy } n \in A_k \text{ i } x = x_{k,\alpha} \text{ dla pewnego } k \in \omega, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

oraz $f(x) = 0$ dla wszystkich $x \in X$. Niech $X_k = \{x_{k,\alpha} : \alpha < |X|\}$ dla wszystkich $k \in \omega$. Łatwo zauważyć, że $\bigcup_{k\in\omega} X_k = X$ i $(f_n \restriction X_k)_{n\in\omega\setminus A_k} \xrightarrow{u} f \restriction X_k$ dla każdego $k \in \omega$, a zatem ciąg (f_n) jest σ-$\mathcal{I}^*$-jednostajnie zbieżny do funkcji f. Pokażemy teraz, że (f_n) nie jest $(\mathcal{I}^*, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f.

Przypuśćmy przeciwnie, że istnieją zbiór $A \in \mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$-zbieżny do 0 ciąg o wyrazach dodatnich (ε_n) takie, że $\{n \in \omega \setminus A : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_n\} \in \mathrm{Fin}$ dla każdego $x \in X$. Zdefiniujmy funkcję $g \in \omega^\omega$ wzorem $g(n) = \min\{k \in \omega : k \geqslant \varepsilon_n\}$ dla każdego $n \in \omega$. Wówczas istnieje $k \in \omega$ takie, że $A_k \setminus A \in \mathrm{Fin}^+$ oraz istnieje $\alpha < \mathfrak{b}$, dla którego $\{n \in A_k \setminus A : g_\alpha(n) \geqslant g(n)\} \in \mathrm{Fin}^+$. Stąd $\{n \in A_k \setminus A : |f_n(x_{k,\alpha}) - f(x_{k,\alpha})| \geqslant \varepsilon_n\} \in \mathrm{Fin}^+$. Otrzymaliśmy sprzeczność.

(2) $\Rightarrow$ (1). Załóżmy, że $f, f_n \in \mathbb{R}^X$ $(n \in \omega)$ są takimi funkcjami, że ciąg (f_n) jest σ-$\mathcal{I}^*$-jednostajnie zbieżny do f. Wówczas istnieją parami rozłączne zbiory $X_k \subseteq X$ $(k \in \omega)$ takie, że $X = \bigcup_{k\in\omega} X_k$ oraz istnieją zbiory $A_0, A_1, ... \in \mathcal{I}$, dla których $(f_n \restriction X_k)_{n\in\omega\setminus A_k} \xrightarrow{u} f \restriction X_k$ dla wszystkich $k \in \omega$. Ponieważ $\mathcal{I}$ jest P-ideałem, więc istnieje taki zbiór $A \in \mathcal{I}$, że $A_n \setminus A \in \mathrm{Fin}$ dla każdego $n \in \omega$. Stąd otrzymujemy, że $(f_n \restriction X_k)_{n\in\omega\setminus A} \xrightarrow{u} f \restriction X_k$ dla wszystkich $k \in \omega$. Zatem $(f_n)_{n\in\omega\setminus A} \xrightarrow{\sigma-u} f$. Z Twierdzenia 2.32 wynika, że $(f_n)_{n\in\omega\setminus A}$ jest $(\mathrm{Fin}, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f. □

Twierdzenie 2.49 *Załóżmy, że X jest takim niepustym zbiorem, że $|X| < \mathfrak{b}$. Niech $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ będą ideałami na ω.*

(1) *Jeżeli X jest zbiorem skończonym, to dla każdego ciągu (f_n) funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze X, jeżeli (f_n) jest σ-$\mathcal{I}^*$-jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji $f \in \mathbb{R}^X$, to jest również $(\mathcal{I}^*, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f.*

(2) *Jeżeli X jest zbiorem nieskończonym, to następujące warunki są równoważne.*

  (a) *Dla dowolnego ciągu (f_n) funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze X, jeżeli $(f_n) \xrightarrow{\sigma-\mathcal{I}^*-u} f$ dla pewnego $f \in \mathbb{R}^X$, to $(f_n) \xrightarrow{(\mathcal{I}^*,\mathcal{J})-e} f$.*

  (b) *$\mathcal{I}$ jest ω-$P(\mathrm{Fin}, \mathcal{I} \sqcup \mathcal{J})$-ideałem.*

Dowód. **Część (1):** Dowód jest analogiczny do drugiej części dowodu Twierdzenia 2.48.

Część (2): $(a) \Rightarrow (b)$. Niech $A_0, A_1, ... \in \mathcal{I}$. Oznaczmy przez $x_k \in X$ $(k \in \omega)$ różne elementy zbioru X. Zdefiniujmy funkcje $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \omega)$ w następujący sposób:

$$f_n(x) = \begin{cases} 2 & \text{gdy } n \in A_k \text{ i } x = x_k \text{ dla pewnego } k \in \omega, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

oraz $f(x) = 0$ dla każdego $x \in X$. Wówczas ciąg (f_n) jest σ-$\mathcal{I}^*$-jednostajnie zbieżny do funkcji f. Z założenia (a) wynika, że (f_n) jest również $(\mathcal{I}^*, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f. Zatem istnieją zbiór $A \in \mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$-zbieżny do 0 ciąg o wyrazach dodatnich (ε_n) takie, że $\{n \in \omega \setminus A : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_n\} \in \text{Fin}$ dla wszystkich $x \in X$. Niech $B = \{n \in \omega : \varepsilon_n \geqslant 1\} \in \mathcal{J}$. Wtedy dla każdego $k \in \omega$ mamy

$$A_k \setminus (A \cup B) \subseteq \{n \in \omega \setminus A : |f_n(x_k) - f(x_k)| \geqslant \varepsilon_n\} \in \text{Fin}.$$

Zatem $\mathcal{I}$ jest ω-$P(\text{Fin}, \mathcal{I} \sqcup \mathcal{J})$-ideałem.

$(b) \Rightarrow (a)$. Załóżmy, że $f, f_n \in \mathbb{R}^X$ $(n \in \omega)$ są takimi funkcjami, że ciąg (f_n) jest σ-$\mathcal{I}^*$-jednostajnie zbieżny do f. Wówczas istnieją parami rozłączne zbiory $X_k \subseteq X$ $(k \in \omega)$ i zbiory $A_0, A_1, ... \in \mathcal{I}$ takie, że $X = \bigcup_{k \in \omega} X_k$ i $(f_n \upharpoonright X_k)_{n \in \omega \setminus A_k} \xrightarrow{u} f \upharpoonright X_k$ dla każdego $k \in \omega$. Z założenia (b) wynika, że istnieją takie zbiory $A \in \mathcal{I}$ i $B \in \mathcal{J}$, że $A_k \setminus (A \cup B) \in \text{Fin}$ dla wszystkich $k \in \omega$. Ponadto istnieje taka funkcja $g \in \omega^\omega$, że $\{n \in \omega : |f_n(x) - f(x)| \geqslant g(n)\} \in \text{Fin}$ dla każdego $x \in X$. Zauważmy, że $(f_n)_{n \in \omega \setminus (A \cup B)} \xrightarrow{\sigma - u} f$, a zatem $(f_n)_{n \in \omega \setminus (A \cup B)} \xrightarrow{e} f$. Niech $(\varepsilon_n) \to 0$ będzie takim ciągiem o wyrazach dodatnich, że $\{n \in \omega \setminus (A \cup B) : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_n\} \in \text{Fin}$ dla wszystkich $x \in X$. Zdefiniujmy ciąg (γ_n) wzorem

$$\gamma_n = \begin{cases} g(n) & \text{gdy } n \in B, \\ \varepsilon_n & \text{gdy } n \in \omega \setminus B. \end{cases}$$

Wówczas $(\gamma_n)_{n \in \omega \setminus A} \xrightarrow{\mathcal{J}} 0$ i $\{n \in \omega \setminus A : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \gamma_n\} \in \text{Fin}$ dla każdego $x \in X$. Stąd (f_n) jest $(\mathcal{I}^*, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f. □

Uwaga 2.50 Powyższe twierdzenia są rozszerzeniem wyników jakie uzyskaliśmy wcześniej w pracy [23], które posłużyły nam do rozwiązania problemów postawionych przez Dasa, Duttę i Pala w [19]. Między innymi w [19, Twierdzenie 3.3] autorzy pokazali, że jeżeli $\mathcal{I}$ jest P-ideałem oraz X jest dowolnym niepustym zbiorem, to $(\mathcal{I}^*, \text{Fin})$-e-zbieżność jest równoważna σ-$\mathcal{I}^*$-jednostajnej zbieżności dla wszystkich rzeczywistych ciągów funkcyjnych określonych na X. Ponadto postawili problem, czy można pominąć założenie, że $\mathcal{I}$ jest P-ideałem. Z Twierdzeń 2.47, 2.48 i 2.49 wynika, że jeżeli zbiór X jest nieskończony, to tego założenia pominąć nie można, tzn. $(\mathcal{I}^*, \text{Fin})$-e-zbieżność jest równoważna σ-$\mathcal{I}^*$-jednostajnej zbieżności wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{I}$ jest P-ideałem (por. również [23, Wniosek 6.5]).

Rozdział 3

Klasy Baire'a względem e-zbieżności ideałowej

W artykule [37] Laczkovich i Recław wykorzystali grę ideałową zdefiniowaną przez Laflamme'a i charakteryzacje strategii wygrywających dla graczy w tej grze, aby wyznaczyć wszystkie ideały borelowskie $\mathcal{I}$, dla których pierwsza klasa Baire'a względem $\mathcal{I}$-zbieżności jest równa klasycznej pierwszej klasie Baire'a dla funkcji określonych na przestrzeniach polskich. Filipów i Szuca (por. [25]) uogólnili ten rezultat na wyższe klasy Baire'a rozważając dziedzinę doskonale normalną. Ostatnio pomysł na zastosowanie gier ideałowych w badaniu zbieżności ideałowej wykorzystali Natkaniec i Szuca w pracach [41] oraz [42], w których scharakteryzowali klasy Baire'a generowane przez rodzinę funkcji quasi-ciągłych dla punktowej i dyskretnej zbieżności ideałowej. Tę metodę wykorzystaliśmy również w artykule [35], na którym będzie oparty niniejszy rozdział (w Twierdzeniach 3.38 i 3.40 charakteryzujemy klasy Baire'a generowane przez rodzinę funkcji quasi-ciągłych dla e-zbieżności ideałowej, a w Twierdzeniu 3.53 charakteryzujemy klasy Baire'a generowane przez rodzinę funkcji ciągłych dla e-zbieżności ideałowej).

3.1 Rodziny funkcji rzeczywistych

Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Oznaczmy przez $\mathcal{C}(X)$ rodzinę wszystkich ciągłych funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze X. Mówimy, że funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ ma *własność Baire'a*, jeżeli zbiór $f^{-1}[U]$ ma własność Baire'a w X, dla dowolnego otwartego podzbioru $U \subseteq \mathbb{R}$. Klasę wszystkich funkcji z własnością Baire'a na zbiorze X oznaczamy przez $\mathrm{Baire}(X)$.

Funkcję $f : X \to \mathbb{R}$ nazywamy *quasi-ciągłą w punkcie* $x_0 \in X$, jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ oraz dla dowolnego otwartego otoczenia U punktu x_0 istnieje taki niepusty zbiór otwarty $G \subseteq U$, że dla dowolnego punktu $x \in G$ zachodzi $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Własność ta została wprowadzona przez Kempistego (por. [30]) i ma duże znaczenie w teorii funkcji rzeczywistych, zwłaszcza w badaniach funkcji oddzielnie ciągłych (por. [5]). Funkcję $f : X \to \mathbb{R}$ nazywamy *quasi-ciągłą*, jeżeli jest ona quasi-ciągła w każdym punkcie $x_0 \in X$. Klasę wszystkich funkcji quasi-ciągłych na X oznaczamy przez $\mathcal{QC}(X)$.

Podzbiór $U \subseteq X$ nazywamy *semi-otwartym*, jeżeli $U \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{int}(U))$ (por. [38]). W [43] Neubrunnova pokazała, że funkcja $f\colon X \to \mathbb{R}$ jest quasi-ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{-1}[U]$ jest zbiorem semi-otwartym dla każdego otwartego podzbioru $U \subseteq \mathbb{R}$. Ponadto wiadomo, że suma dowolnej rodziny zbiorów semi-otwartych jest zbiorem semi-otwartym oraz przekrój zbioru semi-otwartego ze zbiorem otwartym jest zbiorem semi-otwartym.

Funkcję $f : X \to \mathbb{R}$ nazywamy *punktowo nieciągłą*, jeżeli zbiór jej punktów ciągłości $C(f)$ jest gęsty w X. Klasę wszystkich funkcji punktowo nieciągłych na zbiorze X oznaczamy przez $\mathcal{PWD}(X)$. Niech $C_q(f)$ będzie zbiorem wszystkich punktów, w których funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ jest quasi-ciągła. Przez $\mathcal{PWD}_0(X)$ będziemy oznaczać rodzinę wszystkich funkcji rzeczywistych f określonych na X takich, że $X \setminus C_q(f)$ jest zbiorem nigdziegęstym. Nietrudno sprawdzić, że $\mathcal{C}(X) \subseteq \mathcal{QC}(X) \subseteq \mathcal{PWD}_0(X) \subseteq \mathcal{PWD}(X) \subseteq \mathrm{Baire}(X)$ dla każdej przestrzeni Baire'a X. Ponadto wiadomo, że $\mathcal{C}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{QC}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{PWD}_0(\mathbb{R}) \neq \mathcal{PWD}(\mathbb{R}) \neq \mathrm{Baire}(\mathbb{R})$ (dwie pierwsze nierówności są oczywiste, a przykłady pokazujące dwie pozostałe nierówności to funkcje Riemanna i Dirichleta).

Niech f_n $(n \in \omega)$ i f będą funkcjami rzeczywistymi na zbiorze X. Mówimy, że ciąg (f_n) jest *dyskretnie zbieżny do* f, jeżeli $\{n \in \omega : f_n(x) \neq f(x)\} \in \mathrm{Fin}$ dla każdego $x \in X$. W takim przypadku będziemy pisać $(f_n) \xrightarrow{d} f$ (por. [15]).

Klasy Baire'a generowane przez rodzinę $\mathcal{QC}(X)$ zostały opisane przez Grandego w przypadku, gdy $X = \mathbb{R}$ i Richtera dla dowolnych metrycznych przestrzeni Baire'a X (por. Twierdzenie 3.1). Klasy Baire'a generowane przez $\mathcal{QC}(X)$ względem dyskretnej zbieżności również scharakteryzował Grande w przypadku, gdy $X = \mathbb{R}^k$, aczkolwiek ten sam dowód pozostaje prawdziwy dla wszystkich metrycznych przestrzeni Baire'a X (por. ponownie Twierdzenie 3.1).

Niech $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^X$ będzie pewną rodziną funkcji. Przyjmijmy następujące oznaczenia:

- $\mathrm{LIM}(\mathcal{F}) = \{f \in \mathbb{R}^X : \exists_{\{f_n\colon n\in\omega\}\subseteq\mathcal{F}}\ (f_n) \to f\}$,
- $\mathrm{LIM}^d(\mathcal{F}) = \{f \in \mathbb{R}^X : \exists_{\{f_n\colon n\in\omega\}\subseteq\mathcal{F}}\ (f_n) \xrightarrow{d} f\}$,
- $\mathcal{B}_0(\mathcal{F}) = \mathcal{B}_0^d(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$,
- $\mathcal{B}_\alpha(\mathcal{F}) = \mathrm{LIM}(\bigcup_{\beta<\alpha}\mathcal{B}_\beta(\mathcal{F}))$ dla $\alpha \geqslant 1$,
- $\mathcal{B}_\alpha^d(\mathcal{F}) = \mathrm{LIM}^d(\bigcup_{\beta<\alpha}\mathcal{B}_\beta^d(\mathcal{F}))$ dla $\alpha \geqslant 1$.

Twierdzenie 3.1 (Grande [26], [27], Richter [44]) *Niech X będzie metryczną przestrzenią Baire'a. Wówczas*

(1) $\mathcal{B}_1(\mathcal{QC}(X)) = \mathcal{PWD}(X)$,

(2) $\mathcal{B}_1^d(\mathcal{QC}(X)) = \mathcal{PWD}_0(X)$,

(3) $\mathcal{B}_\alpha(\mathcal{QC}(X)) = \mathcal{B}_\alpha^d(\mathcal{QC}(X)) = \mathrm{Baire}(X)$ *dla* $\alpha > 1$.

3.2 Gry Laflamme'a a zbieżność ideałowa

Przypomnijmy, że w tym rozdziale będziemy pomijać założenie, że ideały muszą być właściwe.

W [36] Laflamme zdefiniował nieskończoną grę $G_1(\mathcal{I})$ w następujący sposób: W grze bierze udział dwóch graczy. Gracz I w n-tym kroku wybiera zbiór C_n należący do ideału $\mathcal{I}$, następnie Gracz II wybiera element $a_n \notin C_n$. Gracz I wygrywa, jeśli $\{a_n : n \in \omega\} \in \mathcal{I}$. W przeciwnym razie wygrywa Gracz II.

Twierdzenie 3.2 (Kwela [34, Uwaga 3.1.7]) *Jeżeli $\mathcal{I}$ jest ideałem koanalitycznym, to gra $G_1(\mathcal{I})$ jest zdeterminowana, tzn. jeden z graczy ma strategię wygrywającą.*

Definicja 3.3 (por. [36]) Ideał $\mathcal{I}$ nazywamy *ω-+-diagonalizowalnym*, jeżeli istnieje taka rodzina $\{X_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{I}^+$, że dla każdego $X \in \mathcal{I}^*$ istnieje $n \in \omega$, dla którego $X_n \subseteq X$. W takim przypadku mówimy, że $\{X_n : n \in \omega\}$ jest rodziną, która ω-+-diagonalizuje ideał $\mathcal{I}$.

Niech $\omega^{<\omega}$ będzie rodziną wszystkich skończonych ciągów o wartościach w ω. Podzbiór $\mathcal{T} \subseteq \omega^{<\omega}$ nazywamy *drzewem*, jeżeli z założeń $s = (s(0), \ldots, s(k)) \in \mathcal{T}$, $t = (t(0), \ldots, t(m)) \in \omega^{<\omega}$, $m \leqslant k$ oraz $s(n) = t(n)$ dla wszystkich $n \leqslant m$ wynika, że $t \in \mathcal{T}$. *Ramifikacją drzewa $\mathcal{T} \subseteq \omega^{<\omega}$ w $s = (s(0), \ldots, s(k)) \in \mathcal{T}$* jest zbiór $\{n \in \omega : (s(0), \ldots, s(k), n) \in \mathcal{T}\}$. *Gałęzią drzewa $\mathcal{T}$* jest każda funkcja $b : \omega \to \omega$ spełniająca $(b(0), \ldots, b(k)) \in \mathcal{T}$ dla wszystkich $k \in \omega$.

Definicja 3.4 (por. [36]) Ideał $\mathcal{I}$ na ω nazywamy *słabo ramseyowskim*, jeżeli każde drzewo $\mathcal{T} \subseteq \omega^{<\omega}$, którego ramifikacje należą do $\mathcal{I}^*$, posiada gałąź b taką, że $b[\omega] \in \mathcal{I}^+$.

Poniższy fakt wynika wprost z definicji.

Fakt 3.5 *Niech $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ będą ideałami na ω.*

(1) *Jeżeli ideał $\mathcal{I}$ jest ω-+-diagonalizowalny i $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$, to ideał $\mathcal{J}$ jest również ω-+-diagonalizowalny.*

(2) *Jeżeli ideał $\mathcal{J}$ nie jest słabo ramseyowski i $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$, to ideał $\mathcal{I}$ również nie jest słabo ramseyowski.*

(3) *Jeżeli ideał $\mathcal{I}$ nie jest słabo ramseyowski, to ideał $\mathcal{I} \restriction A$ również nie jest słabo ramseyowski dla dowolnego nieskończonego zbioru A.*

Laflamme wprowadził pojęcia ω-+-diagonalizowalności oraz słabej ramseyowskości, aby uzyskać następujące charakteryzacje strategii wygrywających dla obu graczy w grze $G_1(\mathcal{I})$.

Twierdzenie 3.6 (Laflamme [36, Twierdzenie 2.7]) *Niech $\mathcal{I}$ będzie pewnym ideałem.*

(1) *Gracz I ma strategię wygrywającą w grze $G_1(\mathcal{I})$ wtedy i tylko wtedy, gdy ideał $\mathcal{I}$ nie jest słabo ramseyowski.*

(2) *Gracz II ma strategię wygrywającą w grze $G_1(\mathcal{I})$ wtedy i tylko wtedy, gdy ideał $\mathcal{I}$ jest ω-+-diagonalizowalny.*

Z Twierdzeń 3.2 i 3.6 wynika, że koanalityczny ideał albo nie jest słabo ramseyowski, albo jest ω-+-diagonalizowalny.

Definicja 3.7 (por. [25]) Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem na ω i niech f_n $(n \in \omega)$ i f będą funkcjami rzeczywistymi określonymi na zbiorze X. Mówimy, że ciąg (f_n) jest *$\mathcal{I}$-dyskretnie zbieżny do f*, jeżeli $\{n \in \omega : f_n(x) \neq f(x)\} \in \mathcal{I}$ dla każdego $x \in X$. W tym przypadku będziemy pisać $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{I}-d} f$.

W pracach [41] oraz [42] Natkaniec i Szuca uogólnili Twierdzenie 3.1 na zbieżności ideałowe w następujący sposób.

Niech $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^X$ będzie pewną rodziną funkcji. Przyjmijmy następujące oznaczenia:

- $\mathrm{LIM}^{\mathcal{I}}(\mathcal{F}) = \{f \in \mathbb{R}^X : \exists_{\{f_n\colon n\in\omega\}\subseteq\mathcal{F}}\ (f_n) \xrightarrow{\mathcal{I}} f\}$,
- $\mathrm{LIM}^{\mathcal{I}-d}(\mathcal{F}) = \{f \in \mathbb{R}^X : \exists_{\{f_n\colon n\in\omega\}\subseteq\mathcal{F}}\ (f_n) \xrightarrow{\mathcal{I}-d} f\}$,
- $\mathcal{B}_0^{\mathcal{I}}(\mathcal{F}) = \mathcal{B}_0^{\mathcal{I}-d}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$,
- $\mathcal{B}_\alpha^{\mathcal{I}}(\mathcal{F}) = \mathrm{LIM}^{\mathcal{I}}(\bigcup_{\beta<\alpha}\mathcal{B}_\beta^{\mathcal{I}}(\mathcal{F}))$ dla $\alpha \geqslant 1$,
- $\mathcal{B}_\alpha^{\mathcal{I}-d}(\mathcal{F}) = \mathrm{LIM}^{\mathcal{I}-d}(\bigcup_{\beta<\alpha}\mathcal{B}_\beta^{\mathcal{I}-d}(\mathcal{F}))$ dla $\alpha \geqslant 1$.

Twierdzenie 3.8 (Natkaniec, Szuca [41], [42]) *Niech X będzie metryczną przestrzenią Baire'a i niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem na ω.*

(1) *Załóżmy, że ideał $\mathcal{I}$ jest ω-+-diagonalizowalny. Wówczas*

   (a) $\mathcal{B}_1^{\mathcal{I}}(\mathcal{QC}(X)) = \mathcal{PWD}(X)$,

   (b) $\mathcal{B}_1^{\mathcal{I}-d}(\mathcal{QC}(X)) = \mathcal{PWD}_0(X)$,

   (c) $\mathcal{B}_\alpha^{\mathcal{I}}(\mathcal{QC}(X)) = \mathcal{B}_\alpha^{\mathcal{I}-d}(\mathcal{QC}(X)) = \mathrm{Baire}(X)$ *dla* $\alpha > 1$.

(2) *Załóżmy, że ideał $\mathcal{I}$ nie jest słabo ramseyowski. Wówczas*

   (a) $\mathrm{Baire}(X) \subseteq \mathcal{B}_\alpha^{\mathcal{I}}(\mathcal{QC}(X))$ *dla* $\alpha \geqslant 1$,

   (b) $\mathrm{Baire}(X) \subseteq \mathcal{B}_\alpha^{\mathcal{I}-d}(\mathcal{QC}(X))$ *dla* $\alpha \geqslant 1$,

   (c) *Jeżeli $\mathcal{I}$ jest analityczny, to* $\mathcal{B}_\alpha^{\mathcal{I}}(\mathcal{QC}(X)) = \mathcal{B}_\alpha^{\mathcal{I}-d}(\mathcal{QC}(X)) = \mathrm{Baire}(X)$ *dla* $\alpha \geqslant 1$.

Z Twierdzeń 3.2 i 3.6 wynika, że dla ideałów borelowskich powyższy rezultat charakteryzuje klasy $\mathcal{B}_{\alpha}^{\mathcal{I}}\left(\mathcal{QC}\left(X\right)\right)$ i $\mathcal{B}_{\alpha}^{\mathcal{I}-d}\left(\mathcal{QC}\left(X\right)\right)$ dla metrycznych przestrzeni Baire'a.

Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem na ω. Rozważmy jeszcze jedną grę, $G_2\left(\mathcal{I}\right)$, zdefiniowaną przez Laflamme'a (por. [36]) w następujący sposób: W grze bierze udział dwóch graczy. Gracz I w swoim n-tym kroku wybiera zbiór $C_n \in \mathcal{I}$, a następnie Gracz II odpowiada takim zbiorem $F_n \in \mathrm{Fin}$, że $F_n \cap C_n = \emptyset$. Gracz I wygrywa, jeżeli $\bigcup_{n\in\omega} F_n \in \mathcal{I}$. W przeciwnym przypadku wygrywa Gracz II.

Twierdzenie 3.9 (Kwela [34, Uwaga 4.1.7]) *Jeżeli $\mathcal{I}$ jest ideałem koanalitycznym, to gra $G_2(\mathcal{I})$ jest zdeterminowana.*

Definicja 3.10 (por. [36]) Zbiór $\mathcal{Z} = \{A_m : m \in \omega\} \subseteq \mathrm{Fin} \setminus \{\emptyset\}$ nazywamy *$\mathcal{I}^*$-uniwersalnym*, jeżeli dla każdego $F \in \mathcal{I}^*$ istnieje takie $m \in \omega$, że $A_m \subseteq F$. Mówimy, że ideał $\mathcal{I}$ jest *ω-diagonalizowalny przez $\mathcal{I}^*$-uniwersalne zbiory*, jeżeli istnieje ciąg $(\mathcal{Z}_N)_{N\in\omega}$ zbiorów $\mathcal{I}^*$-uniwersalnych taki, że dla każdego $F \in \mathcal{I}^*$ istnieje $\mathcal{Z}_N = \{A_{N,m} : m \in \omega\}$, dla którego $A_{N,m} \cap F \neq \emptyset$ dla wszystkich $m \in \omega$.

Definicja 3.11 (por. [36]) Ideał $\mathcal{I}$ nazywamy *słabym P-ideałem*, jeżeli dla każdej rodziny $\{X_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{I}$ istnieje zbiór $X \in \mathcal{I}^+$ taki, że $X_n \cap X \in \mathrm{Fin}$ dla każdego $n \in \omega$.

Pojęcia te zostały wprowadzone przez Laflamme'a w celu scharakteryzowania strategii wygrywających obu graczy w grze $G_2\left(\mathcal{I}\right)$.

Twierdzenie 3.12 (Laflamme [36, Twierdzenie 2.16]) *Niech $\mathcal{I}$ będzie pewnym ideałem.*

(1) *Gracz I ma strategię wygrywającą w grze $G_2(\mathcal{I})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{I}$ nie jest słabym P-ideałem.*

(2) *Gracz II ma strategię wygrywającą w grze $G_2(\mathcal{I})$ wtedy i tylko wtedy, gdy ideał $\mathcal{I}$ jest ω-diagonalizowalny przez $\mathcal{I}^*$-uniwersalne zbiory.*

Twierdzenie 3.13 ([37] oraz [2]) *Następujące warunki są równoważne dla dowolnego ideału $\mathcal{I}$.*

(1) *$\mathcal{I}$ nie jest słabym P-ideałem.*

(2) $\mathrm{Fin} \otimes \mathrm{Fin} \sqsubseteq \mathcal{I}$.

(3) $\mathrm{Fin} \otimes \mathrm{Fin} \leqslant_{\mathrm{K}} \mathcal{I}$.

Z Twierdzeń 3.9, 3.12 i 3.13 wynika, że jeżeli $\mathcal{I}$ jest ideałem koanalitycznym, to albo $\mathrm{Fin} \otimes \mathrm{Fin} \sqsubseteq \mathcal{I}$, albo $\mathcal{I}$ jest ω-diagonalizowalny przez $\mathcal{I}^*$-uniwersalne zbiory. Filipów i Szuca wykorzystali ten fakt do scharakteryzowania ideałów koanalitycznych, dla których klasy Baire'a względem $\mathcal{I}$-zbieżności są równe klasycznym klasom Baire'a.

Twierdzenie 3.14 (Filipów, Szuca [25]) *Niech X będzie doskonale normalną przestrzenią topologiczną i niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem na ω.*

(1) *Jeżeli ideał $\mathcal{I}$ jest ω-diagonalizowalny przez $\mathcal{I}^*$-uniwersalne zbiory, to wówczas $\mathcal{B}_\alpha^{\mathcal{I}}(\mathcal{C}(X)) = \mathcal{B}_\alpha(\mathcal{C}(X))$ dla wszystkich $\alpha \geqslant 1$.*

(2) *Jeżeli* $\mathrm{Fin} \otimes \mathrm{Fin} \sqsubseteq \mathcal{I}$, *to $\mathcal{B}_{\alpha+1}(\mathcal{C}(X)) \subseteq \mathcal{B}_\alpha^{\mathcal{I}}(\mathcal{C}(X))$ dla wszystkich $\alpha \geqslant 1$.*

Dla ideałów koanalitycznych i przestrzeni doskonale normalnych powyższy rezultat opisuje wszystkie klasy $\mathcal{B}_\alpha^{\mathcal{I}}(\mathcal{C}(X))$ (w przypadku, gdy $\mathrm{Fin} \otimes \mathrm{Fin} \sqsubseteq \mathcal{I}$, nie wiemy wszystkiego o tych klasach).

3.3 Klasy Baire'a generowane przez rodziny funkcji

Niech $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ będą ideałami na ω, X będzie pewnym zbiorem oraz niech $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^X$. Przyjmijmy oznaczenia:

- $(\mathcal{I}, \mathcal{J})(\mathcal{F}) = \{f \in \mathbb{R}^X : \exists_{\{f_n :\, n\in\omega\}\subseteq\mathcal{F}}\ (f_n) \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})-e} f\}$,
- $(\mathcal{I}, \mathcal{J})_0(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$,
- $(\mathcal{I}, \mathcal{J})_\alpha(\mathcal{F}) = (\mathcal{I}, \mathcal{J})(\bigcup_{\beta<\alpha}(\mathcal{I}, \mathcal{J})_\beta(\mathcal{F}))$ dla $\alpha \geqslant 1$.

Lemat 3.15 *Załóżmy, że $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^X$ dla pewnego zbioru X. Niech $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{J}_1$ i $\mathcal{J}_2$ będą ideałami na ω. Wówczas $(\mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2, \mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2)(\mathcal{F}) = (\mathcal{I}_1, \mathcal{J}_1)(\mathcal{F}) \cap (\mathcal{I}_2, \mathcal{J}_2)(\mathcal{F})$.*

Dowód. ($\subseteq$). Niech $f \in (\mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2, \mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2)(\mathcal{F})$. Wówczas istnieją: ciąg funkcyjny $(f_{(i,n)})_{(i,n)\in 2\times\omega} \in (\mathbb{R}^X)^{2\times\omega}$ oraz $(\mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2)$-zbieżny do 0 ciąg liczb dodatnich $(\varepsilon_{(i,n)})_{(i,n)\in 2\times\omega}$ takie, że $\{(i,n) \in 2\times\omega : |f_{(i,n)}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_{(i,n)}\} \in \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$ dla wszystkich $x \in X$. Wtedy ciąg $(\varepsilon_{(0,n)})_{n\in\omega}$ jest $\mathcal{J}_1$-zbieżny do 0, ciąg $(\varepsilon_{(1,n)})_{n\in\omega}$ jest $\mathcal{J}_2$-zbieżny do 0 i dla każdego $x \in X$ mamy $\{n \in \omega : |f_{(0,n)}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_{(0,n)}\} \in \mathcal{I}_1$ oraz $\{n \in \omega : |f_{(1,n)}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_{(1,n)}\} \in \mathcal{I}_2$. Zatem $f \in (\mathcal{I}_1, \mathcal{J}_1)(\mathcal{F}) \cap (\mathcal{I}_2, \mathcal{J}_2)(\mathcal{F})$.

($\supseteq$). Niech teraz $f \in (\mathcal{I}_1, \mathcal{J}_1)(\mathcal{F}) \cap (\mathcal{I}_2, \mathcal{J}_2)(\mathcal{F})$. Wówczas istnieją: ciągi funkcyjne $(f_n^1), (f_n^2) \in (\mathbb{R}^X)^\omega$ i ciągi liczb dodatnich $(\varepsilon_n^1), (\varepsilon_n^2)$ takie, że (ε_n^i) jest $\mathcal{J}_i$-zbieżny do 0 oraz $\{n \in \omega : |f_n^i(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_n^i\} \in \mathcal{I}_i$ dla każdych $x \in X$ i $i = 1, 2$. Zdefiniujmy $\varepsilon_{(i,n)} = \varepsilon_n^{i+1}$ i $f_{(i,n)} = f_n^{i+1}$ dla każdego $(i,n) \in 2\times\omega$. Wtedy ciąg $(\varepsilon_{(i,n)})_{(i,n)\in 2\times\omega}$ jest $\mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2$-zbieżny do 0 oraz $\{(i,n) \in 2\times\omega : |f_{(i,n)}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_{(i,n)}\} \in \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$ dla dowolnego $x \in X$. Zatem $f \in (\mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2, \mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2)(\mathcal{F})$. □

Przypomnijmy, że jeżeli ideały $\mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$ są ortogonalne i X jest zbiorem niepustym, to granica ciągu funkcyjnego określonego na X względem $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-e-zbieżności nie jest wyznaczona jednoznacznie (por. Twierdzenie 2.3).

Lemat 3.16 *Załóżmy, że $\mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$ są ortogonalnymi ideałami na ω, X jest pewnym zbiorem oraz $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^X$ jest niepustą rodziną. Wówczas $(\mathcal{I}, \mathcal{J})(\mathcal{F}) = \mathbb{R}^X$.*

Dowód. Niech $A \in \mathcal{I}$ i $B \in \mathcal{J}$ będą takimi zbiorami rozłącznymi, że $A \cup B = \omega$ oraz niech $g \in \mathcal{F}$. Wówczas $(\mathcal{I}, \mathcal{J})(\mathcal{F}) = (\mathcal{P}(A), \mathcal{J} \restriction A)(\mathcal{F}) \cap (\mathcal{I} \restriction B, \mathcal{P}(B))(\mathcal{F})$ (por. Lemat 3.15).

Pokażemy, że $(\mathcal{P}(A), \mathcal{J} \restriction A)(\mathcal{F}) \supseteq \mathbb{R}^X$ (inkluzja przeciwna jest trywialna). Niech $f \in \mathbb{R}^X$. Zdefiniujmy $\varepsilon_n = 1/(n+1)$ i $f_n = g$ dla $n \in A$. Wtedy ciąg $(\varepsilon_n)_{n \in A}$ jest $\mathcal{J} \restriction A$-zbieżny do 0 i $\{n \in A : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_n\} \in \mathcal{P}(A)$ dla każdego $x \in X$.

Pokażemy teraz, że $(\mathcal{I} \restriction B, \mathcal{P}(B))(\mathcal{F}) \supseteq \mathbb{R}^X$. Niech $f \in \mathbb{R}^X$. Zdefiniujmy $\varepsilon_n = n$ i $f_n = g$ dla $n \in B$. Wówczas ciąg $(\varepsilon_n)_{n \in B}$ jest $\mathcal{P}(B)$-zbieżny do 0. Ponadto dla dowolnego $x \in X$ istnieje tylko skończenie wiele takich $n \in B$, że $|f_n(x) - f(x)| \geqslant n$. Stąd $\{n \in B : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_n\} \in \mathrm{Fin} \subseteq \mathcal{I} \restriction B$ dla każdego $x \in X$. □

3.4 Klasy Baire'a generowane przez rodzinę funkcji quasi-ciągłych

W tym podrozdziale podamy twierdzenia charakteryzujące klasy Baire'a generowane przez rodzinę funkcji quasi-ciągłych dla e-zbieżności ideałowej (por. Twierdzenia 3.38 i 3.40).

3.4.1 Q-typy par ideałów

Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem na ω, $A \subseteq \omega$ i $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$. Zdefiniujmy ideały $\mathcal{I} \sqcup A = \{M \cup N : M \in \mathcal{I} \wedge N \subseteq A\}$ oraz

$$\mathcal{I} \sqcup (A_n) = \{M \cup N : M \in \mathcal{I} \ \wedge \ \exists_{n \in \omega} \ N \subseteq \bigcup_{i<n} A_i\}.$$

Lemat 3.17 *Załóżmy, że $\mathcal{I}$ jest analitycznym (koanalitycznym) ideałem na ω. Wówczas ideały $\mathcal{I} \sqcup A$ i $\mathcal{I} \sqcup (A_n)$ są analityczne (koanalityczne) dla dowolnych $A \subseteq \omega$ i $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$.*

Dowód. Niech funkcje $\varphi, \varphi_n \colon \mathcal{P}(\omega) \to \mathcal{P}(\omega)$ $(n \in \omega)$ będą dane wzorami $\varphi(M) = M \setminus A$ oraz $\varphi_n(M) = M \setminus \bigcup_{i<n} A_i$. Wówczas $\mathcal{I} \sqcup A = \varphi^{-1}[\mathcal{I}]$ i $\mathcal{I} \sqcup (A_n) = \bigcup_{n \in \omega} \varphi_n^{-1}[\mathcal{I}]$. Aby zakończyć dowód wystarczy zauważyć, że funkcja φ oraz wszystkie funkcje φ_n są ciągłe. □

Lemat 3.18 *Załóżmy, że $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ są ideałami na ω oraz f_n $(n \in \omega)$ i f są funkcjami rzeczywistymi określonymi na zbiorze X. Jeżeli (f_n) jest $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f, to istnieje taki ciąg o wyrazach dodatnich (ε_n), że $A_0 = \{n \in \omega : \varepsilon_n \geqslant 1\} \in \mathcal{J}$, $A_k = \{n \in \omega : 1/(k+1) \leqslant \varepsilon_n < 1/k\} \in \mathcal{J}$ dla wszystkich $k \geqslant 1$ oraz (f_n) jest $\mathcal{I} \sqcup (A_k)$-zbieżny do f.*

Dowód. Załóżmy, że $f, f_n \in \mathbb{R}^X$ $(n \in \omega)$ są takimi funkcjami, że ciąg (f_n) jest $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f. Niech (ε_n) będzie takim $\mathcal{J}$-zbieżnym do 0 ciągiem liczb dodatnich, że $\{n \in \omega : \ |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}$ dla wszystkich $x \in X$. Dla każdego $k \in \omega$ zdefiniujmy zbiory A_k tak, jak w treści lematu. Ustalmy $x \in X$ i $\varepsilon > 0$. Niech $k \in \omega$ będzie takie, że $1/k < \varepsilon$. Wówczas zbiór $\{n \in \omega : \ |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}$ jest zawarty w zbiorze

$$\bigcup_{i<k} A_i \ \cup \ \left\{ n \in \bigcup_{i \geqslant k} A_i : \ |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_n \right\} \in \mathcal{I} \sqcup (A_n).$$

Stąd wynika teza lematu. □

Definicja 3.19 (por. [33]) $\mathcal{WR}$ jest ideałem określonym na $\omega \times \omega$ generowanym przez zbiory postaci $\{n\} \times \omega$ dla $n \in \omega$ (które nazywamy *generatorami pierwszego typu*) i zbiory G takie, że dla każdych $(i, j), (k, l) \in G$ albo $i > k + l$, albo $k > i + j$ (które nazywamy *generatorami drugiego typu*).

Nietrudno zauważyć, że ideał $\mathcal{WR}$ jest gęsty (por. również [33, Lemma 5.3]) oraz $\mathcal{WR} \sqsubseteq \mathrm{Fin} \otimes \mathrm{Fin}$.

Twierdzenie 3.20 (Kwela [33, Twierdzenie 1.3]) *Następujące warunki są równoważne dla każdego ideału $\mathcal{I}$ na ω.*

(1) *$\mathcal{I}$ nie jest słabo ramseyowski.*

(2) *$\mathcal{WR} \sqsubseteq \mathcal{I}$.*

(3) *$\mathcal{WR} \leqslant_K \mathcal{I}$.*

Fakt 3.21 *Każdy niegęsty ideał jest słabo ramseyowski i ω-+-diagonalizowalny.*

Dowód. Załóżmy, że $\mathcal{I}$ jest ideałem, który nie jest gęsty. Z Twierdzenia 3.20 oraz z faktu, że ideał $\mathcal{WR}$ jest gęsty wynika, że $\mathcal{I}$ jest słabo ramseyowski.

Niech A będzie takim zbiorem, że ideały $\mathcal{I} \restriction A$ i Fin są izomorficzne. Wówczas $\{A \setminus \{0, ..., n\} : n \in \omega\}$ jest rodziną, która ω-+-diagonalizuje $\mathcal{I}$. □

Następująca definicja posłuży nam do opisania klas $(\mathcal{I}, \mathcal{J})_\alpha (\mathcal{QC}(X))$.

Definicja 3.22 Niech $\mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$ będą pewnymi ideałami.

(1) $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ jest *pierwszego q-typu*, jeżeli dla każdego ciągu (A_n) elementów ideału $\mathcal{J}$ ideał $\mathcal{I} \sqcup (A_n)$ jest ω-+-diagonalizowalny.

(2) $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ jest *drugiego q-typu*, jeżeli istnieje ciąg (A_n) elementów ideału $\mathcal{J}$ taki, że ideał $\mathcal{I} \sqcup (A_n)$ nie jest słabo ramseyowski, ale dla każdego $A \in \mathcal{J}$ ideał $\mathcal{I} \sqcup A$ jest ω-+-diagonalizowalny.

(3) $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ jest *trzeciego q-typu*, jeżeli istnieje zbiór $A \in \mathcal{J}$ taki, że ideał $\mathcal{I} \sqcup A$ nie jest słabo ramseyowski.

Fakt 3.23 *Jeżeli $\mathcal{I}$ jest ideałem koanalitycznym, to każda para $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ jest dokładnie jednego q-typu.*

Dowód. Z Lematu 3.17 wynika, że ideały $\mathcal{I} \sqcup (A_n)$ i $\mathcal{I} \sqcup A$ są koanalityczne dla dowolnych $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ i $A \subseteq \omega$. Na mocy Twierdzeń 3.2 i 3.6 otrzymujemy tezę. □

Podamy teraz przykłady par ideałów dla każdego q-typu. Ponadto zbadamy, kiedy ideał $\mathcal{I}$ może determinować q-typ pary $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$.

Przykład 3.24 *Niech $\mathcal{I} = \emptyset \otimes \mathrm{Fin}$ i $\mathcal{J} = \mathrm{Fin} \otimes \emptyset$. Wówczas para $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ jest drugiego q-typu.*

Dowód. Ponieważ $\mathcal{I} \sqcup (\{n\} \times \omega)_{n\in\omega} = \mathrm{Fin} \otimes \mathrm{Fin}$ oraz $\mathcal{WR} \sqsubseteq \mathrm{Fin} \otimes \mathrm{Fin}$, więc ideał $\mathcal{I} \sqcup (\{n\} \times \omega)_{n\in\omega}$ nie jest słabo ramseyowski (por. Twierdzenie 3.20). Ponadto ideał $\mathcal{I} \sqcup A$ nie jest gęsty dla dowolnego $A \in \mathcal{J}$, więc z Faktu 3.21 otrzymujemy, że $\mathcal{I} \sqcup A$ jest ω-+-diagonalizowalny. □

Poniższy fakt wynika bezpośrednio z definicji.

Fakt 3.25 *Załóżmy, że $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$.*

(1) *$(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ jest pierwszego q-typu wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{I}$ jest ideałem ω-+-diagonalizowalnym.*

(2) *$(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ nie jest nigdy drugiego q-typu.*

(3) *$(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ jest trzeciego q-typu wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{I}$ nie jest ideałem słabo ramseyowskim.*

Następny przykład pokazuje, że w niektórych przypadkach q-typ pary $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ zależy jedynie od ideału $\mathcal{I}$.

Przykład 3.26 Fin *jest takim ideałem, że dla każdego właściwego ideału $\mathcal{J}$ para* $(\mathrm{Fin}, \mathcal{J})$ *jest pierwszego q-typu. Z kolei $\mathcal{WR}$ jest takim ideałem, że dla każdego $\mathcal{J}$ para $(\mathcal{WR}, \mathcal{J})$ jest trzeciego q-typu. Ponadto nie istnieje ideał $\mathcal{I}$, dla którego każda para $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ jest drugiego q-typu.*

Dowód. Dowód wynika z Faktów 3.21 i 3.25. □

Kolejny przykład pokazuje, że istnieją ideały $\mathcal{I}$ takie, że q-typ pary $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ zależy od ideału $\mathcal{J}$.

Przykład 3.27 *Niech $\mathcal{I} = (\emptyset \otimes \mathrm{Fin}) \oplus \mathcal{WR}$.*

(1) *Jeżeli $\mathcal{J} = \mathrm{Fin}(2 \times \omega^2)$, to para $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ jest pierwszego q-typu.*

(2) *Jeżeli $\mathcal{J} = (\mathrm{Fin} \otimes \emptyset) \oplus \mathrm{Fin}(\omega^2)$, to para $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ jest drugiego q-typu.*

(3) *Jeżeli $\mathcal{J} = \mathcal{P}(\omega^2) \oplus \mathrm{Fin}(\omega^2)$, to para $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ jest trzeciego q-typu.*

3.4.2 Ideały pierwszego i trzeciego q-typu

Poniżej opisujemy klasy $(\mathcal{I},\mathcal{J})(\mathcal{QC}(X))$ dla wszystkich par ideałów $(\mathcal{I},\mathcal{J})$ pierwszego i trzeciego q-typu.

Odnotujmy najpierw jedno proste spostrzeżenie, które pozostawiamy bez dowodu.

Lemat 3.28 *Niech $\mathcal{I},\mathcal{J}$ będą ideałami na ω. Wówczas dla każdego ciągu (f_n) funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze X, jeżeli (f_n) jest $\mathcal{I}$-dyskretnie zbieżny do pewnej funkcji $f\in\mathbb{R}^X$, to (f_n) jest również $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-e-zbieżny do f.*

Stwierdzenie 3.29 *Załóżmy, że X jest metryczną przestrzenią Baire'a. Niech $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ będą takimi ideałami na ω, że para $(\mathcal{I},\mathcal{J})$ jest pierwszego q-typu. Wówczas $(\mathcal{I},\mathcal{J})(\mathcal{QC}(X))=\mathcal{PWD}_0(X)$.*

Dowód. Z Twierdzenia 3.8 otrzymujemy, że każda funkcja $f\in\mathcal{PWD}_0(X)$ jest $\mathcal{I}$-dyskretną granicą ciągu funkcji quasi-ciągłych. Zatem $f\in(\mathcal{I},\mathcal{J})(\mathcal{QC}(X))$ (por. Lemat 3.28).

Pokażemy teraz, że $(\mathcal{I},\mathcal{J})(\mathcal{QC}(X))\subseteq\mathcal{PWD}_0(X)$. Niech $f_n\in\mathcal{QC}(X)$ $(n\in\omega)$ będą takimi funkcjami, że ciąg (f_n) jest $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-e-zbieżny do $f\in\mathbb{R}^X$. Na mocy Lematu 3.18 istnieje taki ciąg o wyrazach dodatnich (ε_n), że $A_0=\{n\in\omega:\varepsilon_n\geqslant 1\}\in\mathcal{J}$, $A_k=\{n\in\omega:\ 1/(k+1)\leqslant\varepsilon_n<1/k\}\in\mathcal{J}$ dla wszystkich $k\geqslant 1$ oraz (f_n) jest $\mathcal{I}\sqcup(A_k)$-zbieżny do f. Ponieważ $(\mathcal{I},\mathcal{J})$ jest pierwszego q-typu, więc ideał $\mathcal{I}\sqcup(A_k)$ jest ω-+-diagonalizowalny. Z Twierdzenia 3.8 otrzymujemy, że $f\in\mathcal{PWD}(X)$. Zatem $C(f)$ jest zbiorem rezydualnym w X, gdyż zbiór punktów ciągłości każdej funkcji rzeczywistej jest typu G_δ. Niech $\{D_n:n\in\omega\}\subseteq(\mathcal{I}\sqcup(A_k))^+$ będzie rodziną, która ω-+-diagonalizuje $\mathcal{I}\sqcup(A_k)$.

Pokażemy, że $X\setminus C_q(f)$ jest zbiorem nigdziegęstym, a więc $f\in\mathcal{PWD}_0(X)$. Niech $U\subseteq X$ będzie niepustym zbiorem otwartym. Ponieważ ciąg (f_n) jest $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-e-zbieżny do f, więc dla każdego $x\in C(f)\cap U$ istnieje n_x takie, że $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon_n$ dla wszystkich $n\in D_{n_x}$. Z założenia, że X jest przestrzenią Baire'a wynika, że istnieje $m\in\omega$ takie, że zbiór $C=\{x\in C(f)\cap U:\ n_x=m\}$ jest gęsty w pewnym niepustym zbiorze otwartym $U_0\subseteq U$. Wówczas $|f_i(x)-f(x)|<\varepsilon_i$ dla wszystkich $x\in C$ oraz $i\in D_m$. Wystarczy teraz pokazać, że f jest quasi-ciągła w każdym punkcie zbioru U_0.

Ustalmy $x_0\in U_0$, $\varepsilon>0$ oraz taki niepusty zbiór otwarty W, że $x_0\in W$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $W\subseteq U_0$. Istnieje zbiór $F\in\mathcal{I}^*\subseteq(\mathcal{I}\sqcup(A_k))^*$ taki, że $|f_i(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon_i$ dla każdego $i\in F$. Zbiór $F\cap D_m$ nie należy do ideału $\mathcal{I}\sqcup(A_k)$, więc w szczególności nie zawiera się w żadnej sumie skończenie wielu zbiorów A_k. Zatem istnieje $n\in F\cap D_m$ takie, że $\varepsilon_n<\varepsilon/4$. Z quasi-ciągłości funkcji f_n w punkcie x_0, istnieje $t\in W\cap C$, dla którego $|f_n(t)-f_n(x_0)|<\varepsilon/4$. Ponieważ f jest ciągła w t, więc istnieje taki niepusty zbiór otwarty $V\subseteq W$, że $|f(x)-f(t)|<\varepsilon/4$ dla wszystkich $x\in V$. Wówczas

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant|f(x)-f(t)|+|f(t)-f_n(t)|+|f_n(t)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon$$

dla każdego $x \in V$. Zatem f jest quasi-ciągła w x_0. $\square$

Stwierdzenie 3.30 *Załóżmy, że X jest metryczną przestrzenią Baire'a. Niech $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ będą takimi ideałami na ω, że para $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ jest trzeciego q-typu. Wówczas* $\mathrm{Baire}\,(X) \subseteq (\mathcal{I}, \mathcal{J})\,(\mathcal{QC}\,(X))$.

Dowód. Ponieważ $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ jest trzeciego q-typu, więc istnieje taki zbiór $A \in \mathcal{J}$, że ideał $\mathcal{I} \sqcup A$ nie jest słabo ramseyowski. Załóżmy, że zbiory A oraz $\omega \setminus A$ są nieskończone (w innym przypadku dowód będzie analogiczny do następującego). Wówczas $\mathcal{I} \restriction (\omega \setminus A)$ nie jest ideałem słabo ramseyowskim (por. Fakt 3.5) oraz

$$(\mathcal{I}, \mathcal{J})\,(\mathcal{QC}\,(X)) = (\mathcal{I} \restriction (\omega \setminus A), \mathcal{J} \restriction (\omega \setminus A))\,(\mathcal{QC}\,(X)) \cap (\mathcal{I} \restriction A, \mathcal{P}(A))\,(\mathcal{QC}\,(X))$$

na mocy Lematu 3.15. Ponieważ ideały $\mathcal{I} \restriction A$ i $\mathcal{P}(A)$ są ortogonalne, więc z Lematu 3.16 otrzymujemy, że $\mathrm{Baire}\,(X) \subseteq \mathbb{R}^X \subseteq (\mathcal{I} \restriction A, \mathcal{P}(A))\,(\mathcal{QC}\,(X))$. Wystarczy teraz udowodnić, że $\mathrm{Baire}\,(X) \subseteq (\mathcal{I} \restriction (\omega \setminus A), \mathcal{J} \restriction (\omega \setminus A))\,(\mathcal{QC}\,(X))$.

Niech $f\colon X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją z własnością Baire'a. Z Twierdzeń 3.8 i 3.20 wynika, że istnieje ciąg $(g_{(n,m)})_{(n,m)\in\omega^2}$ funkcji quasi-ciągłych $\mathcal{WR}$-dyskretnie zbieżny do f. Ponadto istnieje bijekcja $\pi\colon \omega \setminus A \to \omega^2$ taka, że $\pi^{-1}[M] \in \mathcal{I} \restriction (\omega \setminus A)$ dla każdego $M \in \mathcal{WR}$ (por. Twierdzenie 3.20). Zdefiniujmy $f_n = g_{\pi(n)}$ dla wszystkich $n \in \omega \setminus A$. Wówczas funkcje f_n $(n \in \omega \setminus A)$ są quasi-ciągłe oraz $(f_n)_{n\in\omega\setminus A}$ jest $\mathcal{I}$-dyskretnie zbieżny do f, więc z Lematu 3.28 otrzymujemy, że $(f_n)_{n\in\omega\setminus A}$ jest $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-e-zbieżny do f. $\square$

3.4.3 Ideały drugiego q-typu

W tej części opiszemy klasy $(\mathcal{I}, \mathcal{J})\,(\mathcal{QC}\,(X))$ dla wszystkich par ideałów $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ drugiego q-typu.

Lemat 3.31 (por. [41, Lemat 2.1(1)]) *Załóżmy, że X jest przestrzenią Baire'a oraz $f : X \to \mathbb{R}$ nie jest funkcją punktowo nieciągłą. Wówczas istnieją liczby rzeczywiste $\alpha < \beta$ takie, że zbiory $f^{-1}[(-\infty, \alpha)]$ i $f^{-1}[(\beta, +\infty)]$ są gęste w pewnym niepustym zbiorze otwartym $U \subseteq X$.*

Stwierdzenie 3.32 *Załóżmy, że X jest metryczną przestrzenią Baire'a. Niech $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ będą takimi ideałami na ω, że ideał $\mathcal{I} \sqcup A$ jest ω-+-diagonalizowalny dla każdego $A \in \mathcal{J}$. Wówczas $(\mathcal{I}, \mathcal{J})\,(\mathcal{QC}\,(X)) \subseteq \mathcal{PWD}\,(X)$.*

Dowód. Oparty na dowodzie [41, Stwierdzenie 3.1].

Załóżmy, że $f_n \in \mathcal{QC}\,(X)$ $(n \in \omega)$ są takimi funkcjami, że ciąg (f_n) jest $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-e-zbieżny do $f \in \mathbb{R}^X$. Wtedy istnieje taki $\mathcal{J}$-zbieżny do 0 ciąg liczb dodatnich (ε_n), że $\{n \in \omega : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}$ dla każdego $x \in X$.

Przypuśćmy, że funkcja f nie jest punktowo nieciągła. Z Lematu 3.31 otrzymujemy, że istnieją liczby rzeczywiste $\alpha < \beta$ i niepusty zbiór otwarty $U \subseteq X$ takie, że zbiory $E = f^{-1}[(-\infty, \alpha)]$ i $F = f^{-1}[(\beta, +\infty)]$ są gęste w U. Bez straty ogólności (ewentualnie zmniejszając zbiór U) możemy założyć, że $E \cap W$ jest zbiorem drugiej kategorii w każdym niepustym zbiorze otwartym $W \subseteq U$. Oznaczmy $\varepsilon = (\beta - \alpha)/2$ oraz $A = \{n \in \omega : \ \varepsilon_n \geqslant \varepsilon\} \in \mathcal{J}$. Niech $\{D_n : n \in \omega\} \subseteq (\mathcal{I} \sqcup A)^+$ będzie rodziną ω-+-diagonalizującą $\mathcal{I} \sqcup A$.

Dla każdego $x \in U \cap E$ istnieje n_x takie, że $|f_i(x) - f(x)| < \varepsilon_i$ dla wszystkich $i \in D_{n_x}$. Wówczas $f_i(x) < \alpha + \varepsilon_i$ dla każdego $x \in U \cap E$ oraz $i \in D_{n_x}$. Z założenia, że X jest przestrzenią Baire'a, istnieje $m \in \omega$ takie, że zbiór $\{x \in U \cap E : \ n_x = m\}$ jest gęsty w pewnym niepustym zbiorze otwartym $W \subseteq U$. Ponieważ wszystkie funkcje f_i są quasi-ciągłe, więc dla każdego $i \in D_m \setminus A$ mamy $f_i(x) \leqslant \alpha + \varepsilon$ dla wszystkich $x \in W$.

Istnieje element $x_0 \in W \cap F$ (gdyż F jest gęsty w U). Wówczas

$$C = \{i \in \omega : \ |f_i(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon_i \ \wedge \ \varepsilon_i < \varepsilon\} \in (\mathcal{I} \sqcup A)^*.$$

Zatem $(D_m \setminus A) \cap C$ jest zbiorem niepustym. Stąd istnieje takie $i_0 \in D_m \setminus A$, że $f_{i_0}(x_0) > \beta - \varepsilon = \alpha + \varepsilon$. Otrzymaliśmy sprzeczność. □

Przejdziemy teraz do najbardziej technicznej części naszych rozważań. Będziemy potrzebowali kilku lematów.

Lemat 3.33 *Załóżmy, że X jest przestrzenią topologiczną oraz $f : X \to \mathbb{R}$ jest funkcją punktowo nieciągłą. Wówczas dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieją domknięty, nigdziegęsty zbiór N i funkcja ciągła $g \colon X \setminus N \to \mathbb{R}$ takie, że $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ dla wszystkich $x \in X \setminus N$.*

Dowód. Wykorzystamy Lemat Kuratowskiego-Zorna. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Niech $\mathbb{P}$ będzie rodziną wszystkich takich par (U, h), że $U \subseteq X$ jest niepustym podzbiorem otwartym oraz $h \colon U \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą spełniającą warunek $|f(x) - h(x)| < \varepsilon$ dla wszystkich $x \in U$. Pokażemy, że rodzina $\mathbb{P}$ jest niepusta. Niech $y \in C(f)$. Wówczas istnieje taki zbiór otwarty U zawierający y, że $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ dla każdego $x \in U$. Niech funkcja $h \colon U \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $h(x) = f(y)$ dla wszystkich $x \in U$. Wtedy $(U, h) \in \mathbb{P}$.

Zdefiniujmy następujący porządek:

$$(U, h) \preceq (U', h') \Longleftrightarrow U \subseteq U' \ \wedge \ h \subseteq h'.$$

Łatwo sprawdzić, że jest to częściowy porządek na $\mathbb{P}$. Jeżeli $\{(U_\alpha, h_\alpha) : \alpha < \kappa\}$ jest łańcuchem w $(\mathbb{P}, \preceq)$, to $(\bigcup_{\alpha<\kappa} U_\alpha, \bigcup_{\alpha<\kappa} h_\alpha)$ jest jego ograniczeniem górnym. Z Lematu Kuratowskiego-Zorna istnieje element (U, g) maksymalny w $(\mathbb{P}, \preceq)$. Wystarczy teraz pokazać, że $N = X \setminus U$ jest zbiorem nigdziegęstym.

Przypuśćmy, że zbiór N nie jest nigdziegęsty. Ponieważ N jest domknięty, więc istnieje niepusty zbiór otwarty $V \subseteq N$. Niech $y \in V \cap C(f)$. Z ciągłości funkcji f w punkcie y wynika, że istnieje taki otwarty zbiór W zawierający y, że dla dowolnego $x \in W$ mamy $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Zdefiniujmy zbiór $U' = U \cup W$ oraz funkcję $g' \colon U' \to \mathbb{R}$ wzorem $g'(x) = g(x)$ dla $x \in U$ i $g'(x) = f(y)$ dla $x \in W$ (przypomnijmy, że zbiory U i W są rozłączne). Wtedy g' jest funkcją ciągłą oraz $(U, g) \prec (U', g')$. Otrzymaliśmy sprzeczność z maksymalnością (U, g) w $(\mathbb{P}, \preceq)$. $\square$

Lemat 3.34 (Borsik [4, Lemat 1]) *Załóżmy, że X jest przestrzenią metryczną. Niech $N \subseteq X$ będzie zbiorem niepustym, domkniętym i nigdziegęstym oraz niech $U \subseteq X$ będzie takim zbiorem semi-otwartym, że $N \subseteq cl(U)$. Wówczas istnieje ciąg parami rozłącznych, niepustych, semi-otwartych zbiorów $(G_n)_{n\in\omega}$ taki, że $\bigcup_{n\in\omega} G_n = U \setminus N$ oraz $N \subseteq cl(G_n)$ dla każdego $n \in \omega$.*

Wniosek 3.35 *Załóżmy, że X jest przestrzenią metryczną. Niech $N, M \subseteq X$ będą zbiorami niepustymi, domkniętymi i nigdziegęstymi takimi, że $N \subseteq M$ oraz niech $G \subseteq X$ będzie takim zbiorem semi-otwartym, że $M \subseteq cl(G)$. Wówczas istnieją rozłączne, niepuste, semi-otwarte zbiory V i W takie, że $N \subseteq cl(V)$, $M \subseteq cl(W)$, $V \subseteq G \setminus M$ i $V \cup W = G \setminus N$.*

Dowód. Zastosujmy Lemat 3.34 do zbiorów M i G. Istnieje ciąg parami rozłącznych, niepustych, semi-otwartych zbiorów (G_n) taki, że $\bigcup_{n\in\omega} G_n = G \setminus M$ i $M \subseteq \mathrm{cl}(G_n)$ dla każdego $n \in \omega$. Niech $V = G_0$ oraz $W = \bigcup_{n>0} G_n \cup (M \setminus N)$. Zauważmy, że W jest zbiorem semi-otwartym. Wówczas V i W spełniają tezę twierdzenia. $\square$

Lemat 3.36 *Załóżmy, że X jest przestrzenią metryczną. Niech $\mathcal{I}$ będzie takim ideałem na ω oraz $\{A_n : n \in \omega\}$ będzie taką partycją ω, że istnieje funkcja $\phi\colon \omega \to \omega$ spełniająca warunki:*

(a) $\phi(p) > k$ *dla każdego* $p \in A_k$ *i* $k \in \omega$,

(b) $\left(\forall_{n\in\omega}\ p_{n+1} \in \bigcup_{i\geqslant\phi(p_n)} A_i\right) \Rightarrow \{p_n : n \in \omega\} \in \mathcal{I}$ *dla każdego ciągu* $(p_n) \in \omega^\omega$.

Wówczas $\mathcal{PWD}(X) \subseteq (\mathcal{I}, \mathcal{J})(\mathcal{QC}(X))$, gdzie $\mathcal{J}$ jest ideałem generowanym przez rodzinę $\{A_n : n \in \omega\}$.

Dowód. Ustalmy $f \in \mathcal{PWD}(X)$. Zdefiniujmy ciąg $\varepsilon_i = 1/(k+1)$ dla wszystkich $i \in A_k$ i $k \in \omega$. Wówczas (ε_i) jest $\mathcal{J}$-zbieżnym do 0 ciągiem liczb dodatnich. Dla każdego $k \in \omega$ zastosujmy Lemat 3.33 do funkcji f i $\varepsilon = 1/(k+1)$, aby otrzymać domknięte, nigdziegęste zbiory $N_k \subseteq X$ i ciągłe funkcje $g_k \colon X \setminus N_k \to \mathbb{R}$ takie, że $|f(x) - g_k(x)| < 1/(k+1)$ dla wszystkich $x \in X \setminus N_k$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $\emptyset \neq N_0 \subseteq N_1 \subseteq \ldots$.

Zdefiniujemy teraz indukcyjnie (po k) pomocnicze semi-otwarte zbiory $G^k_{n,m}$, $V^k_{n,m}$ i $W^k_{n,m}$ dla $k, m \in \omega$, $n \in A_k$.

- Zastosujmy Lemat 3.34 do zbioru N_0 oraz semi-otwartego zbioru $U_0 = X$, aby otrzymać parami rozłączne, niepuste, semi-otwarte zbiory $G^0_{n,m}$ dla $n \in A_0$ i $m \in \omega$.

- Dla każdego $n \in A_0$ i $m \in \omega$ zastosujmy Wniosek 3.35 do zbiorów N_0, $\mathrm{cl}(G^0_{n,m}) \cap N_{\phi(n)}$ (zauważmy, że ten zbiór jest domknięty, nigdziegęsty i zawiera N_0) oraz $G^0_{n,m}$, aby otrzymać dwa rozłączne, niepuste, semi-otwarte zbiory $V^0_{n,m}$ i $W^0_{n,m}$.

Załóżmy teraz, że zdefiniowaliśmy już zbiory $G^j_{n,m}$, $V^j_{n,m}$ oraz $W^j_{n,m}$ dla wszystkich $j \leqslant k$, $m \in \omega$ i $n \in A_j$. Niech

$$U_{k+1} = X \setminus \bigcup_{j \leqslant k} \bigcup_{m \in \omega} \bigcup_{\substack{n \in A_j \\ \phi(n) > k}} V^j_{n,m}.$$

Wówczas $N_{k+1} \subseteq U_{k+1} \subseteq \mathrm{cl}(U_{k+1})$, gdyż gdyby istniał $x \in N_{k+1} \cap V^j_{n,m}$ dla pewnych $j \leqslant k$, $m \in \omega$ i $n \in A_j$ takiego, że $\phi(n) > k$, to $x \in \mathrm{cl}(G^j_{n,m}) \cap N_{\phi(n)}$. Wtedy otrzymalibyśmy sprzeczność, ponieważ zbiory $\mathrm{cl}(G^j_{n,m}) \cap N_{\phi(n)}$ i $V^j_{n,m}$ są rozłączne (por. Wniosek 3.35). Co więcej U_{k+1} jest zbiorem semi-otwartym jako suma zbiorów semi-otwartych:

$$U_{k+1} = \bigcup_{m \in \omega} \bigcup_{n \in A_k} \left(W^k_{n,m} \cup N_k \right) \cup \bigcup_{j < k} \bigcup_{m \in \omega} \bigcup_{\substack{n \in A_j \\ \phi(n) = k}} V^j_{n,m}$$

(zbiory $W^k_{n,m} \cup N_k$ są semi-otwarte, ponieważ $N_k \subseteq \mathrm{cl}(G^k_{n,m}) \cap N_{\phi(n)} \subseteq \mathrm{cl}(W^k_{n,m}) \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{int}(W^k_{n,m} \cup N_k))$ dla każdego $m \in \omega$ i $n \in A_k$).

- Zastosujmy Lemat 3.34 do zbiorów N_{k+1} i U_{k+1}, aby otrzymać parami rozłączne, niepuste, semi-otwarte zbiory $G^{k+1}_{n,m}$ dla $n \in A_{k+1}$ i $m \in \omega$.
- Dla każdego $n \in A_{k+1}$ i $m \in \omega$ zastosujmy Wniosek 3.35 do zbiorów N_{k+1}, $\mathrm{cl}(G^{k+1}_{n,m}) \cap N_{\phi(n)}$ oraz $G^{k+1}_{n,m}$, aby otrzymać dwa rozłączne, niepuste, semi-otwarte zbiory $V^{k+1}_{n,m}$ i $W^{k+1}_{n,m}$.

To kończy konstrukcję zbiorów $G^k_{n,m}$, $V^k_{n,m}$ i $W^k_{n,m}$ dla $k, m \in \omega$, $n \in A_k$. Skonstruujemy teraz ciąg (f_n) funkcji rzeczywistych określonych na X. Niech $n \in \omega$ i niech k będzie takie, że $n \in A_k$. Ustawmy w ciąg (q_m) wszystkie liczby wymierne. Zdefiniujmy $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ wzorem

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{gdy } x \in N_k, \\ q_m & \text{gdy } x \in V^k_{n,m}, \\ g_k(x) & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Pokażemy, że f_n jest funkcją quasi-ciągłą. Ustalmy $x \in X$, $\varepsilon > 0$ i zbiór otwarty $W \ni x$. Rozpatrzmy trzy możliwe przypadki:

(1) Jeżeli $x \in N_k$, to istnieje $m \in \omega$ takie, że $q_m \in (f_n(x) - \varepsilon, f_n(x) + \varepsilon)$. Ponieważ $\mathrm{cl}(V^k_{n,m}) \supseteq N_k$, więc zbiór $V^k_{n,m} \cap W$ jest niepusty i semi-otwarty. Stąd $W' = \mathrm{int}(V^k_{n,m} \cap W) \neq \emptyset$ i $|f_n(x') - f_n(x)| < \varepsilon$ dla każdego $x' \in W'$.

(2) Jeżeli istnieje $m \in \omega$ takie, że $x \in V^k_{n,m}$, to $W' = \mathrm{int}(V^k_{n,m} \cap W) \neq \emptyset$ oraz $f_n(x') = f_n(x)$ dla każdego $x' \in W'$.

(3) Jeżeli $x \in X \setminus (N_k \cup \bigcup_{m\in\omega} V^k_{n,m})$, to $f_n(x) = g_k(x)$ oraz z ciągłości funkcji g_k, istnieje otwarte otoczenie $W' \subseteq W$ punktu x takie, że $|f_n(x) - g_k(x')| < \varepsilon$ dla wszystkich $x' \in W'$. Ponadto istnieje semi-otwarty zbiór H zawierający x taki, że H jest albo jednym ze zbiorów $W^k_{n,m}$ dla $m \in \omega$, albo jednym ze zbiorów $G^k_{l,m}$ dla $l \in A_k \setminus \{n\}$ i $m \in \omega$, albo jednym ze zbiorów $V^j_{l,m}$ dla $j < k$, $l \in A_j$, $\phi(l) > k$ i $m \in \omega$. Wówczas $W'' = \mathrm{int}(H \cap W') \neq \emptyset$ oraz $|f_n(x) - f_n(x')| < \varepsilon$ dla każdego $x' \in W''$, gdyż $f_n \restriction W'' = g_k \restriction W''$.

Udowodnimy teraz, że $(f_n) \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})-e} f$. Ustalmy $x \in X$ i oznaczmy

$$P_x = \bigcup_{k\in\omega} \{n \in A_k :\ x \in V^k_{n,m} \text{ dla pewnego } m \in \omega\}.$$

Zauważmy, że $\{n \in \omega :\ |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_n\} \subseteq P_x$. Zatem wystarczy pokazać, że $P_x \in \mathcal{I}$.

Dla każdego $k \in \omega$ zbiory $V^k_{n,m}$ dla $n \in A_k$, $m \in \omega$ są parami rozłączne, więc $|\{n \in A_k : x \in V^k_{n,m} \text{ dla pewnego } m \in \omega\}| \leqslant 1$. Jeżeli P_x jest zbiorem skończonym, to otrzymujemy tezę. Załóżmy więc, że zbiór P_x jest nieskończony i ustawmy jego elementy w ciąg (p_n) taki, że $p_i \in A_{k(i)}$ oraz $k(i+1) > k(i)$ dla wszystkich $i \in \omega$.

Ustalmy $i \in \omega$. Jeżeli $x \in V^{k(i)}_{p_i,m}$ dla pewnego $m \in \omega$, to $x \notin V^k_{n',m'}$ dla każdych $k(i) < k < \phi(p_i)$, $n' \in A_k$ i $m' \in \omega$ (ponieważ $U_k \cap V^{k(i)}_{p_i,m} = \emptyset$ i $V^k_{n',m'} \subseteq U_k$). Zatem $p_{i+1} \in \bigcup_{j\geqslant\phi(p_i)} A_j$. Z założenia (b) lematu wynika, że $P_x \in \mathcal{I}$. □

Za pomocą Lematu 3.36 udowodnimy teraz, że jeżeli para ideałów $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ jest drugiego q-typu, to zachodzi również inkluzja przeciwna do inkluzji z tezy Stwierdzenia 3.32.

Stwierdzenie 3.37 *Załóżmy, że X jest metryczną przestrzenią Baire'a. Niech $\mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$ będą takimi ideałami na ω, że istnieje rodzina $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{J}$ taka, że ideał $\mathcal{I} \sqcup (A_n)$ nie jest słabo ramseyowski. Wówczas $\mathcal{PWD}(X) \subseteq (\mathcal{I}, \mathcal{J})(\mathcal{QC}(X))$.*

Dowód. Niech $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{J}$ będzie taką rodziną zbiorów, że $\mathcal{WR} \sqsubseteq \mathcal{I} \sqcup (A_n)$ (por. Twierdzenie 3.20). Ponadto możemy założyć, że $\{A_n : n \in \omega\}$ jest partycją ω. Niech $\pi\colon \omega \to \omega^2$, $\pi = (\pi_1, \pi_2)$, będzie taką bijekcją, że $\pi^{-1}[M] \in \mathcal{I} \sqcup (A_n)$ dla każdego $M \in \mathcal{WR}$.

Jeżeli $\mathcal{WR} \sqsubseteq \mathcal{I} \sqcup A$ dla pewnego zbioru $A \in \mathcal{J}$, to teza wynika z Twierdzenia 3.30. Załóżmy zatem, że $\mathcal{I} \sqcup A$ nie zawiera izomorficznej kopii ideału $\mathcal{WR}$ dla dowolnego $A \in \mathcal{J}$. Wówczas możemy przyjąć, że $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{I}^+$.

Dla każdego $k \in \omega$ istnieją takie rozłączne zbiory B_k i C_k oraz takie $N_k \in \omega$, że $\pi^{-1}[\{k\} \times \omega] = B_k \cup C_k$, $B_k = \bigcup_{n\leqslant N_k} A_n \cap \pi^{-1}[\{k\} \times \omega]$, $C_k \in \mathcal{I}$ oraz $N_0 < N_1 < \ldots$ (w szczególności $N_k \geqslant k$).

Oznaczmy przez B i C odpowiednio zbiory $\bigcup_{k\in\omega} B_k$ oraz $\bigcup_{k\in\omega} C_k$. Wówczas $B \cup C = \omega$. Wystarczy pokazać, że $\mathcal{PWD}(X) \subseteq (\mathcal{I} \restriction Z, \mathcal{J} \restriction Z)(\mathcal{QC}(X))$ dla $Z = B$ i $Z = C$ (por. Lemat 3.15).

Przypadek $Z = B$. Zauważmy, że $(A_n \cap B)_{n\in\omega}$ jest partycją zbioru B na zbiory należące do ideału $\mathcal{J} \restriction B$. Rozważmy funkcję $\phi\colon B \to \omega$ daną wzorem

$$\phi(p) = \min\{i > m :\ \forall_{k\leqslant\pi_1(p)+\pi_2(p)}\forall_{j\geqslant i}\ A_j \cap B_k = \emptyset\},$$

gdzie m jest taką liczbą, że $p \in A_m \cap B$. Zauważmy, że dla każdego $i \in \omega$ mamy

$$i \geqslant \phi(p) \Rightarrow A_i \cap B \subseteq \bigcup\{B_k :\ k > \pi_1(p) + \pi_2(p)\}. \tag{3.1}$$

Pokażemy, że $(A_n \cap B)_{n\in\omega}$, ϕ i $\mathcal{I} \restriction B$ spełniają założenia (a) i (b) Lematu 3.36. Stąd otrzymamy, że $\mathcal{PWD}\,(X) \subseteq (\mathcal{I} \restriction B, \mathcal{J} \restriction B)\,(\mathcal{QC}\,(X))$ dla dowolnej metrycznej przestrzeni X.

Warunek (a) jest oczywisty. Pokażemy warunek (b). Niech (p_n) będzie takim ciągiem elementów zbioru B, że $p_{n+1} \in \bigcup_{i\geqslant\phi(p_n)} A_i \cap B$ dla wszystkich $n \in \omega$ i niech $P = \{p_n :\ n \in \omega\}$.

Najpierw zauważmy, że $\pi[P] \in \mathcal{WR}$, gdyż $\pi(p_{n+1})$ należy do zbioru

$$\pi\left[\bigcup_{i\geqslant\phi(p_n)} A_i \cap B\right] \subseteq \pi\left[\bigcup\{B_k : k > \pi_1(p_n) + \pi_2(p_n)\}\right] \subseteq (\omega\setminus(\pi_1(p_n)+\pi_2(p_n)))\times\omega$$

dla każdego $n \in \omega$ (por. (3.1)). Stąd $P \in (\mathcal{I} \sqcup (A_n)) \restriction B$. Ponadto $|P \cap A_i| \leqslant 1$ dla wszystkich $i \in \omega$, a zatem $P \in \mathcal{I} \restriction B$.

Przypadek $Z = C$. Pokażemy, że $A_i \cap C \subseteq \bigcup_{k\leqslant i} C_k$ dla wszystkich $i \in \omega$. Jeżeli $i < k$, to $i < N_k$ oraz $A_i \cap \pi^{-1}[\{k\} \times \omega] \subseteq B_k$ i stąd $A_i \cap C_k = \emptyset$. Przypomnijmy, że $C_k \in \mathcal{I}$ dla każdego $k \in \omega$. Stąd $A_i \cap C \in \mathcal{I} \restriction C$ dla wszystkich $i \in \omega$. Zatem $\mathcal{I} \sqcup (A_n) \restriction C = \mathcal{I} \restriction C$. Z Faktu 3.5 wynika, że ideał $\mathcal{I} \sqcup (A_n) \restriction C$ nie jest słabo ramseyowski. Na mocy Faktu 3.25 para $(\mathcal{I} \restriction C, \mathrm{Fin} \restriction C)$ jest trzeciego q-typu. Wówczas $\mathcal{PWD}\,(X) \subseteq \mathrm{Baire}\,(X) \subseteq (\mathcal{I} \restriction C, \mathrm{Fin} \restriction C)\,(\mathcal{QC}\,(X)) \subseteq (\mathcal{I} \restriction C, \mathcal{J} \restriction C)\,(\mathcal{QC}\,(X))$ dla dowolnej metrycznej przestrzeni Baire'a X (por. Stwierdzenie 3.30). □

3.4.4 Charakteryzacja w klasie ideałów koanalitycznych

Podsumujemy teraz wszystkie wyniki opisane w podrozdziale 3.4.

Twierdzenie 3.38 *Niech $\mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$ będą takimi nieortogonalnymi ideałami określonymi na ω, że $\mathcal{I}$ jest koanalityczny. Wówczas*

(1) *$(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ jest pierwszego q-typu wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej metrycznej przestrzeni Baire'a X mamy*

$$(\mathcal{I}, \mathcal{J})\,(\mathcal{QC}\,(X)) = \mathcal{PWD}_0\,(X)\,.$$

(2) *$(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ jest drugiego q-typu wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej metrycznej przestrzeni Baire'a X mamy*

$$(\mathcal{I}, \mathcal{J})\,(\mathcal{QC}\,(X)) = \mathcal{PWD}\,(X)\,.$$

(3) $(\mathcal{I},\mathcal{J})$ *jest trzeciego q-typu wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej metrycznej przestrzeni Baire'a X mamy*

$$\mathrm{Baire}\,(X) \subseteq (\mathcal{I},\mathcal{J})\,(\mathcal{QC}\,(X))\,.$$

Jeżeli ponadto ideał $\mathcal{I}$ jest borelowski, to $(\mathcal{I},\mathcal{J})$ jest trzeciego q-typu wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej metrycznej przestrzeni Baire'a X mamy

$$(\mathcal{I},\mathcal{J})\,(\mathcal{QC}\,(X)) = \mathrm{Baire}\,(X)\,.$$

Dowód. Ponieważ $\mathcal{I}$ jest ideałem koanalitycznym, więc z Faktu 3.23 otrzymujemy, że każda para $(\mathcal{I},\mathcal{J})$ jest pewnego q-typu. Zatem w częściach (1), (2) i (3) wystarczy jedynie udowodnić implikacje ze strony lewej do prawej, gdyż klasy $\mathcal{PWD}_0\,(\mathbb{R})$, $\mathcal{PWD}\,(\mathbb{R})$ i $\mathrm{Baire}\,(\mathbb{R})$ są parami różne.

Część (1): Teza wynika ze Stwierdzenia 3.29.

Część (2): Inkluzja „$\subseteq$" wynika ze Stwierdzenia 3.32 natomiast inkluzja przeciwna ze Stwierdzenia 3.37.

Część (3): Inkluzja „$\subseteq$" wynika ze Stwierdzenia 3.30. Pokażemy teraz, że jeżeli ideał $\mathcal{I}$ jest borelowski, to zachodzi inkluzja przeciwna. Niech $f_n \in \mathcal{QC}\,(X)$ $(n \in \omega)$ i $f \in \mathbb{R}^X$ będą takimi funkcjami, że ciąg (f_n) jest $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-e-zbieżny do f. Z Lematu 3.18 wynika, że (f_n) jest również $\mathcal{I} \sqcup (A_k)$-zbieżny do f dla pewnej rodziny zbiorów $\{A_k : k \in \omega\} \subseteq \mathcal{J}$. Ponieważ ideał $\mathcal{I} \sqcup (A_k)$ jest borelowski (por. Lemat 3.17), więc z Twierdzenia 3.8 otrzymujemy, że $f \in \mathrm{Baire}(X)$. □

Uwaga 3.39 Implikacje ze strony lewej do prawej w częściach (1), (2) i (3) Twierdzenia 3.38 pozostaną prawdziwe, jeżeli pominiemy założenie, że $\mathcal{I}$ jest ideałem koanalitycznym.

W następnym twierdzeniu scharakteryzujemy wyższe klasy Baire'a względem rozważanych przez nas zbieżności i klasy funkcji.

Twierdzenie 3.40 *Załóżmy, że X jest metryczną przestrzenią Baire'a. Niech $\mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$ będą nieortogonalnymi ideałami określonymi na ω. Wówczas*

(1) $\mathrm{Baire}\,(\mathrm{X}) \subseteq (\mathcal{I},\mathcal{J})\,(PWD_0\,(X)) \subseteq (\mathcal{I},\mathcal{J})\,(PWD\,(X)) \subseteq (\mathcal{I},\mathcal{J})\,(\mathrm{Baire}\,(\mathrm{X}))$.

(2) *Jeżeli ponadto ideał $\mathcal{I}$ jest analityczny, to*

$$(\mathcal{I},\mathcal{J})\,(PWD_0\,(X)) = (\mathcal{I},\mathcal{J})\,(PWD\,(X)) = (\mathcal{I},\mathcal{J})\,(\mathrm{Baire}\,(\mathrm{X})) = \mathrm{Baire}\,(\mathrm{X})\,.$$

(3) *Jeżeli ponadto ideał $\mathcal{I}$ jest borelowski, to dla każdego $\alpha > 1$ mamy*

$$(\mathcal{I},\mathcal{J})_\alpha\,(\mathcal{QC}\,(X)) = \mathrm{Baire}\,(X)\,.$$

Dowód. **Część (1):** Ponieważ $\mathcal{PWD}_0(X) \subseteq \mathcal{PWD}(X) \subseteq \text{Baire}(X)$, więc:

$$(\mathcal{I}, \mathcal{J})(\mathcal{PWD}_0(X)) \subseteq (\mathcal{I}, \mathcal{J})(\mathcal{PWD}(X)) \subseteq (\mathcal{I}, \mathcal{J})(\text{Baire}(X)).$$

Z Twierdzenia 3.1 wynika, że dla każdej funkcji $f \in \mathbb{R}^X$ z własnością Baire'a istnieją takie funkcje $f_n \in \mathcal{PWD}_0(X)$ $(n \in \omega)$, że ciąg (f_n) dyskretnie zbiega do f. Z Lematu 3.28 otrzymujemy, że $\text{Baire}(X) \subseteq (\mathcal{I}, \mathcal{J})(\mathcal{PWD}_0(X))$.

Część (2): Dowód jest analogiczny do dowodu trzeciej części Twierdzenia 3.38.

Część (3): Teza wynika z (2) oraz z Twierdzenia 3.38. □

3.5 Klasy Baire'a generowane przez rodzinę funkcji ciągłych

W tym podrozdziale opiszemy klasy Baire'a generowane przez rodzinę funkcji ciągłych dla e-zbieżności ideałowej (por. Twierdzenie 3.53). Uogólnimy rezultaty z pracy [25], gdzie Filipów i Szuca rozważali to zagadnienie dla $(\mathcal{I}, \text{Fin})$-e-zbieżności.

3.5.1 C-typy par ideałów

Analogicznie do q-typów zdefiniujemy teraz c-typy par ideałów, za pomocą których opiszemy klasy $(\mathcal{I}, \mathcal{J})_\alpha(\mathcal{C}(X))$.

Definicja 3.41 Niech $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ będą ideałami na ω.

(1) $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ jest *pierwszego c-typu*, jeżeli dla każdego ciągu (A_n) elementów ideału $\mathcal{J}$ ideał $\mathcal{I} \sqcup (A_n)$ jest ω-diagonalizowalny przez $(\mathcal{I} \sqcup (A_n))^*$-uniwersalne zbiory.

(2) $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ jest *drugiego c-typu*, jeżeli istnieje taki ciąg (A_n) elementów ideału $\mathcal{J}$, że ideał $\mathcal{I} \sqcup (A_n)$ zawiera izomorficzną kopię ideału $\text{Fin} \otimes \text{Fin}$, ale dla każdego zbioru $A \in \mathcal{J}$ ideał $\mathcal{I} \sqcup A$ jest ω-diagonalizowalny przez $(\mathcal{I} \sqcup A)^*$-uniwersalne zbiory.

(3) $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ jest *trzeciego c-typu*, jeżeli istnieje taki zbiór $A \in \mathcal{J}$, że ideał $\mathcal{I} \sqcup A$ zawiera izomorficzną kopię ideału $\text{Fin} \otimes \text{Fin}$.

Fakt 3.42 *Jeżeli $\mathcal{I}$ jest ideałem koanalitycznym, to każda para $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ jest dokładnie jednego c-typu.*

Dowód. Z Lematu 3.17 wynika, że ideały $\mathcal{I} \sqcup (A_n)$ i $\mathcal{I} \sqcup A$ są koanalityczne dla dowolnych $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ i $A \subseteq \omega$. Na mocy Twierdzeń 3.9, 3.12 i 3.13 otrzymujemy tezę. □

Przykłady par ideałów dla każdego c-typu są podobne do przykładów par ideałów dla każdego q-typu.

Dowód poniższego faktu wynika bezpośrednio z definicji.

Fakt 3.43 *Załóżmy, że* $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$.

(1) $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ *jest pierwszego c-typu wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathcal{I}$ *jest ideałem* ω*-diagonalizowalnym przez* $\mathcal{I}^*$*-uniwersalne zbiory.*

(2) $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ *nie jest nigdy drugiego c-typu.*

(3) $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ *jest trzeciego c-typu wtedy i tylko wtedy, gdy ideał* $\mathcal{I}$ *zawiera izomorficzną kopię ideału* $\mathrm{Fin} \otimes \mathrm{Fin}$.

Fakt 3.44 *Każdy niegęsty ideał* $\mathcal{I}$ *jest* ω*-diagonalizowalny przez* $\mathcal{I}^*$*-uniwersalne zbiory.*

Dowód. Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem, który nie jest gęsty i niech A będzie takim zbiorem, że ideały $\mathcal{I} \restriction A$ i Fin są izomorficzne. Dla każdego $N \in \omega$ zdefiniujmy rodzinę $\mathcal{Z}_N = \{B \setminus \{0, ..., N\} : B \in \mathrm{Fin}\} \setminus \{\emptyset\}$. Wówczas $(\mathcal{Z}_N)_{N\in\omega}$ jest takim ciągiem zbiorów $\mathcal{I}^*$-uniwersalnych, że dla każdego $F \in \mathcal{I}^*$ istnieje $N \in \omega$, dla którego każdy zbiór z rodziny $\mathcal{Z}_N$ ma niepusty przekrój ze zbiorem F. □

Przykład 3.45 *Niech* $\mathcal{I} = \emptyset \otimes \mathrm{Fin}$ *i* $\mathcal{J} = \mathrm{Fin} \otimes \emptyset$. *Wówczas para* $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ *jest drugiego c-typu.*

Dowód. Ponieważ $\mathcal{I} \sqcup (\{n\} \times \omega)_{n\in\omega} = \mathrm{Fin} \otimes \mathrm{Fin}$, więc ideał $\mathcal{I} \sqcup (\{n\} \times \omega)_{n\in\omega}$ zawiera izomorficzną kopię ideału $\mathrm{Fin} \otimes \mathrm{Fin}$. Ponadto $\mathcal{I} \sqcup A$ nie jest gęsty dla dowolnego $A \in \mathcal{J}$, więc z Faktu 3.44 otrzymujemy, że $\mathcal{I} \sqcup A$ jest ω-diagonalizowalny przez $(\mathcal{I} \sqcup A)^*$-uniwersalne zbiory. □

3.5.2 Ideały pierwszego i trzeciego c-typu

Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Oznaczmy przez $\Sigma^0_1(X)$ rodzinę wszystkich otwartych podzbiorów X, przez $\Pi^0_\alpha(X)$ rodzinę wszystkich uzupełnień zbiorów z $\Sigma^0_\alpha(X)$ dla $1 \leqslant \alpha < \omega_1$ oraz przez $\Sigma^0_\alpha(X)$ rodzinę wszystkich przeliczalnych sum zbiorów z $\bigcup_{\beta<\alpha} \Pi^0_\beta(X)$, $1 < \alpha < \omega_1$.

Császár i Laczkovich scharakteryzowali klasy $\mathcal{B}_\alpha(\mathcal{C}(X))$ i $(\mathrm{Fin}, \mathrm{Fin})_{\alpha+1}(\mathcal{C}(X))$ dla wszystkich przestrzeni doskonale normalnych X w następujący sposób.

Twierdzenie 3.46 (Császár, Laczkovich) *Załóżmy, że* X *jest doskonale normalną przestrzenią topologiczną,* $f : X \to \mathbb{R}$ *oraz* $1 \leqslant \alpha < \omega_1$.

(1) *Funkcja* f *jest* α*-tej klasy Baire'a* $(f \in \mathcal{B}_\alpha(C(X)))$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* f *jest* $\Sigma^0_{\alpha+1}(X)$*-mierzalna (por. [16, Stwierdzenie 3.14]).*

(2) *Funkcja* f *należy do klasy* $(\mathrm{Fin}, \mathrm{Fin})_{\alpha+1}(\mathcal{C}(X))$ *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją zbiory* $X_k \in \Pi^0_{\alpha+1}(X)$ $(k \in \omega)$, $X = \bigcup_{k\in\omega} X_k$ *oraz istnieją funkcje* $f_k \in \mathcal{B}_\alpha(\mathcal{C}(X))$ $(k \in \omega)$ *takie, że* $f \restriction X_k = f_k \restriction X_k$ *dla wszystkich* $k \in \omega$ *(por. [15, Twierdzenie 3.6]).*

Z Twierdzenia 3.46 oraz faktu, że e-zbieżność implikuje zbieżność punktową wynika, że $(\mathrm{Fin},\mathrm{Fin})_\alpha(\mathcal{C}(X)) \subseteq \mathcal{B}_\alpha(\mathcal{C}(X)) \subseteq (\mathrm{Fin},\mathrm{Fin})_{\alpha+1}(\mathcal{C}(X))$ dla wszystkich przestrzeni doskonale normalnych X oraz $1 \leqslant \alpha < \omega_1$. Ponadto wiadomo, że $(\mathrm{Fin},\mathrm{Fin})_\alpha(\mathcal{C}(\mathbb{R})) \subsetneq \mathcal{B}_\alpha(\mathcal{C}(\mathbb{R})) \subsetneq (\mathrm{Fin},\mathrm{Fin})_{\alpha+1}(\mathcal{C}(\mathbb{R}))$ dla każdego $1 \leqslant \alpha < \omega_1$. Zauważmy, że w Twierdzeniu 3.46 nie zostały opisane klasy $(\mathrm{Fin},\mathrm{Fin})_\alpha(\mathcal{C}(X))$ dla granicznych liczb porządkowych α.

Filipów i Szuca wykorzystali powyższy rezultat w dowodach następujących twierdzeń.

Twierdzenie 3.47 (Filipów, Szuca [25, Twierdzenie 5.5]) *Załóżmy, że X jest doskonale normalną przestrzenią topologiczną. Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem, który jest ω-diagonalizowalny przez $\mathcal{I}^*$-uniwersalne zbiory. Wówczas* $(\mathcal{I},\mathrm{Fin})_n(\mathcal{C}(X)) = (\mathrm{Fin},\mathrm{Fin})_n(\mathcal{C}(X))$ *dla każdego* $1 \leqslant n < \omega$.

Twierdzenie 3.48 (Filipów, Szuca [25, Lemat 2.2]) *Załóżmy, że X jest przestrzenią topologiczną. Niech $\mathcal{I}$ będzie takim ideałem, że* $\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin} \leqslant_K \mathcal{I}$. *Wówczas* $(\mathrm{Fin},\mathrm{Fin})_{\alpha+1}(\mathcal{C}(X)) \subseteq (\mathcal{I},\mathrm{Fin})_\alpha(\mathcal{C}(X))$ *dla każdego* $1 \leqslant \alpha < \omega_1$.

Z Twierdzeń 3.9, 3.12 i 3.13 wynika, że dla ideałów koanalitycznych i przestrzeni doskonale normalnych powyższe rezultaty opisują wszystkie klasy $(\mathcal{I},\mathrm{Fin})_n(\mathcal{C}(X))$ dla $n \in \omega$ (w przypadku, gdy $\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin} \leqslant_K \mathcal{I}$ nie wiemy wszystkiego o tych klasach).

Dowód poniższego stwierdzenia jest analogiczny do dowodu Twierdzenia 3.47.

Stwierdzenie 3.49 *Załóżmy, że X jest doskonale normalną przestrzenią topologiczną. Niech $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ będą takimi ideałami na ω, że dla każdej rodziny zbiorów $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{J}$ ideał $\mathcal{I} \sqcup (A_n)$ jest ω-diagonalizowalny przez $(\mathcal{I} \sqcup (A_n))^*$-uniwersalne zbiory. Wówczas* $(\mathcal{I},\mathcal{J})_n(\mathcal{C}(X)) = (\mathrm{Fin},\mathrm{Fin})_n(\mathcal{C}(X))$ *dla każdego* $1 \leqslant n < \omega$.

Stwierdzenie 3.50 *Załóżmy, że X jest przestrzenią topologiczną. Niech $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ będą takimi ideałami na ω, że istnieje zbiór $A \in \mathcal{J}$, dla którego* $\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin} \sqsubseteq \mathcal{I}\sqcup A$. *Wówczas* $(\mathrm{Fin},\mathrm{Fin})_{\alpha+1}(\mathcal{C}(X)) \subseteq (\mathcal{I},\mathcal{J})_\alpha(\mathcal{C}(X))$ *dla każdego* $1 \leqslant \alpha < \omega_1$.

Dowód. Niech $A \in \mathcal{J}$ będzie takim zbiorem, że $\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin} \sqsubseteq \mathcal{I}\sqcup A$. Z Twierdzenia 3.13 wynika, że $\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin} \leqslant_{\mathrm{K}} \mathcal{I}\sqcup A$. Wówczas $\mathrm{Fin}\otimes\mathrm{Fin} \leqslant_K \mathcal{I} \restriction (\omega \setminus A)$ oraz

$$(\mathrm{Fin},\mathrm{Fin})_{\alpha+1}(\mathcal{C}(X)) \subseteq (\mathcal{I} \restriction (\omega\setminus A), \mathrm{Fin}(\omega\setminus A))_\alpha(\mathcal{C}(X))$$

z Twierdzenia 3.48. Stąd

$$(\mathrm{Fin},\mathrm{Fin})_{\alpha+1}(\mathcal{C}(X)) \subseteq (\mathcal{I} \restriction (\omega\setminus A), \mathcal{J} \restriction (\omega\setminus A))_\alpha(\mathcal{C}(X)).$$

Ponieważ ideały $\mathcal{I} \restriction A$ i $\mathcal{J} \restriction A = \mathcal{P}(A)$ są ortogonalne, więc

$$(\mathrm{Fin},\mathrm{Fin})_{\alpha+1}(\mathcal{C}(X)) \subseteq \mathbb{R}^X \subseteq (\mathcal{I} \restriction A, \mathcal{J} \restriction A)_\alpha(\mathcal{C}(X))$$

z Lematu 3.16. Na mocy Lematu 3.15 otrzymujemy tezę. □

3.5.3 Ideały drugiego c-typu

Scharakteryzujemy teraz klasy $(\mathcal{I},\mathcal{J})_\alpha(\mathcal{C}(X))$ dla wszystkich par ideałów $(\mathcal{I},\mathcal{J})$ drugiego c-typu.

Stwierdzenie 3.51 *Załóżmy, że X jest doskonale normalną przestrzenią topologiczną. Niech $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ będą takimi ideałami na ω, że ideał $\mathcal{I}\sqcup A$ jest ω-diagonalizowalny przez $(\mathcal{I}\sqcup A)^*$-uniwersalne zbiory dla każdego $A\in\mathcal{J}$. Wówczas $(\mathcal{I},\mathcal{J})_\alpha(\mathcal{C}(X))\subseteq\mathcal{B}_\alpha(\mathcal{C}(X))$ dla każdego $1\leqslant\alpha<\omega_1$.*

Dowód. Oparty na dowodzie [25, Lemat 3.1].

Indukcja pozaskończona po α. Załóżmy, że $(\mathcal{I},\mathcal{J})_\gamma(\mathcal{C}(X))\subseteq\mathcal{B}_\gamma(\mathcal{C}(X))$ dla wszystkich $\gamma<\alpha$. Niech $f_n\in(\mathcal{I},\mathcal{J})_{\beta_n}(\mathcal{C}(X))$ dla pewnego $\beta_n<\alpha$ $(n\in\omega)$, $f\in\mathbb{R}^X$ będą takimi funkcjami, że ciąg (f_n) jest $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-e-zbieżny do f. Wówczas istnieje taki $\mathcal{J}$-zbieżny do 0 ciąg liczb dodatnich (ε_n), że $\{n\in\omega:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_n\}\in\mathcal{I}$ dla każdego $x\in X$.

Ustalmy $\varepsilon>0$ i $y\in\mathbb{R}$. Pokażemy, że $f^{-1}[(y-\varepsilon,y+\varepsilon)]\in\Sigma^0_{\alpha+1}(X)$. Wtedy otrzymamy tezę na mocy Lematu 3.46.

Zdefiniujmy najpierw zbiory $A_0=\{k\in\omega:\varepsilon_k\geqslant\varepsilon\}$ oraz $A_n=\{k\in\omega:\varepsilon/(n+1)\leqslant\varepsilon_k<\varepsilon/n\}$ dla $n\geqslant 1$. Wówczas $\{A_n:n\in\omega\}\subseteq\mathcal{J}$. Dla każdego $n\in\omega$ niech $(\mathcal{Z}^n_N)_{N\in\omega}$, $\mathcal{Z}^n_N=\{A^n_{N,k}:k\in\omega\}$, będzie rodziną $(\mathcal{I}\sqcup(A_0\cup\ldots\cup A_n))^*$-uniwersalnych zbiorów, która ω-diagonalizuje $\mathcal{I}\sqcup(A_0\cup\ldots\cup A_n)$. Ustalmy $x\in X$. Udowodnimy, że

$$|f(x)-y|<\varepsilon\iff\exists_{n\in\omega}\exists_{N\in\omega}\forall_{k\in\omega}\exists_{l\in A^n_{N,k}}\ |f_l(x)-y|\leqslant\varepsilon\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right).\qquad(3.2)$$

To zakończy dowód twierdzenia, gdyż wówczas z założenia indukcyjnego wynika, że

$$f^{-1}[B(y,\varepsilon)]=\bigcup_{n\in\omega}\bigcup_{N\in\omega}\bigcap_{k\in\omega}\bigcup_{l\in A^n_{N,k}}f_l^{-1}\left[\overline{B}\left(y,\varepsilon\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)\right]\in\Sigma^0_{\alpha+1}(X),$$

gdzie przez $B(z,r)$ i $\overline{B}(z,r)$ oznaczamy odpowiednio otwartą i domkniętą kulę o promieniu $r>0$ i środku $z\in\mathbb{R}$ (przypomnijmy, że wszystkie $A^n_{N,k}$ są skończone).

Przystępujemy do pokazania, że zachodzi (3.2). Niech $f(x)\in B(y,\varepsilon)$. Istnieją $n_1\in\omega$ i $\delta>0$ takie, że $B(f(x),\delta)\subseteq\overline{B}(y,\varepsilon\cdot(1-1/n_1))$ oraz istnieje $n>n_1$, dla którego $\varepsilon/n<\delta$. Oznaczmy

$$F=\left\{l\in\omega:\ f_l(x)\in\overline{B}\left(y,\varepsilon\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)\right\}.$$

Wówczas $F\supseteq\{l\in\omega:f_l(x)\in B(f(x),\delta)\}\in(\mathcal{I}\sqcup(A_0\cup\ldots\cup A_{n-1}))^*$. Stąd istnieje $N\in\omega$ takie, że $F\cap A^{n-1}_{N,k}$ jest zbiorem niepustym dla każdego $k\in\omega$ (ponieważ $(\mathcal{Z}^{n-1}_N)_{N\in\omega}$ ω-diagonalizuje ideał $\mathcal{I}\sqcup(A_0\cup\ldots\cup A_{n-1})$).

Załóżmy teraz, że istnieją $n,N\in\omega$ takie, że dla każdego $k\in\omega$ istnieje $l\in A^n_{N,k}$, dla którego $f_l(x)\in\overline{B}(y,\varepsilon\cdot(1-1/n))$. Oznaczmy

$$G=\left\{m\in\omega:\ |f_m(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{n}\right\}.$$

Zauważmy, że $G \in (\mathcal{I} \sqcup (A_0 \cup ... \cup A_n))^*$. Ponieważ $\mathcal{Z}_N^n$ jest $(\mathcal{I} \sqcup (A_0 \cup ... \cup A_n))^*$-uniwersalny, więc istnieje $k \in \omega$ takie, że $A_{N,k}^n \subseteq G$. Niech $l \in A_{N,k}^n$ będzie takie, że $f_l(x) \in \overline{B}(y, \varepsilon \cdot (1 - 1/n))$. Wówczas

$$|f(x) - y| \leqslant |f(x) - f_l(x)| + |f_l(x) - y| < \frac{\varepsilon}{n} + \varepsilon \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \varepsilon.$$

□

Stwierdzenie 3.52 *Załóżmy, że X jest przestrzenią topologiczną. Niech $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ będą takimi ideałami na ω, że istnieje taka rodzina zbiorów $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{J}$, że* $\mathrm{Fin} \otimes \mathrm{Fin} \sqsubseteq \mathcal{I} \sqcup (A_n)$. *Wtedy* $\mathcal{B}_\alpha(\mathcal{C}(X)) \subseteq (\mathcal{I}, \mathcal{J})_\alpha(\mathcal{C}(X))$ *dla każdego* $1 \leqslant \alpha < \omega_1$.

Dowód. Indukcja pozaskończona po α. Załóżmy, że $\mathcal{B}_\gamma(\mathcal{C}(X)) \subseteq (\mathcal{I}, \mathcal{J})_\gamma(\mathcal{C}(X))$ dla wszystkich $\gamma < \alpha$.

Niech $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{J}$ będzie taką rodziną, że $\mathrm{Fin} \otimes \mathrm{Fin} \sqsubseteq \mathcal{I} \sqcup (A_n)$ i niech $\sigma \colon \omega \to \omega^2$ będzie taką bijekcją, że $\sigma^{-1}[M] \in \mathcal{I} \sqcup (A_n)$ dla dowolnego $M \in \mathrm{Fin} \otimes \mathrm{Fin}$. Ponadto możemy przyjąć, że $\{A_n : n \in \omega\}$ jest partycją ω.

Jeżeli istnieje zbiór $A \in \mathcal{J}$, dla którego $\mathrm{Fin} \otimes \mathrm{Fin} \sqsubseteq \mathcal{I} \sqcup A$, to otrzymujemy tezę z Twierdzenia 3.50, gdyż $\mathcal{B}_\alpha(\mathcal{C}(X)) \subseteq (\mathrm{Fin}, \mathrm{Fin})_{\alpha+1}(\mathcal{C}(X))$. Załóżmy zatem, że $\mathcal{I} \sqcup A$ nie zawiera izomorficznej kopii ideału $\mathrm{Fin} \otimes \mathrm{Fin}$ dla każdego $A \in \mathcal{J}$. Wówczas możemy przyjąć, że $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{I}^+$.

Dla każdego $k \in \omega$ istnieją $N_k \in \omega$ i zbiór $C_k = \sigma^{-1}[\{k\} \times \omega] \setminus \bigcup_{n \leqslant N_k} A_n$ takie, że $C_k \in \mathcal{I}$. Ponadto możemy dodatkowo założyć, że $N_0 < N_1 < \ldots$ (w szczególności $C_k \cap A_n = \emptyset$, jeżeli $n \leqslant k$) oraz $C_k = \emptyset$, jeżeli zbiór $\sigma^{-1}[\{k\} \times \omega]$ można pokryć przez skończenie wiele zbiorów A_n (w szczególności każdy C_k jest zbiorem nieskończonym lub pustym).

Zdefiniujmy zbiory $T = \{k \in \omega : C_k \text{ jest zbiorem niepustym}\}$, $G_1 = \bigcup_{k \in T} C_k$ oraz $G_2 = \omega \setminus G_1$. Pokażemy, że $\mathcal{B}_\alpha(\mathcal{C}(X)) \subseteq (\mathcal{I} \upharpoonright G_i, \mathcal{J} \upharpoonright G_i)_\alpha(\mathcal{C}(X))$ dla $i = 1, 2$. To zakończy dowód stwierdzenia na mocy Lematu 3.15.

Najpierw rozważmy zbiór G_1. Jeżeli T jest zbiorem skończonym, to $G_1 \in \mathcal{I}$ i otrzymujemy tezę z Lematu 3.16 (w tym przypadku $\mathcal{I} \upharpoonright G_1 = \mathcal{P}(G_1)$). Załóżmy zatem, że zbiór T jest nieskończony. Za pomocą funkcji $\sigma \upharpoonright G_1 \colon G_1 \to \omega^2$ udowodnimy, że $\mathrm{Fin} \otimes \mathrm{Fin} \leqslant_K \mathcal{I} \upharpoonright G_1$. Wówczas

$$\mathcal{B}_\alpha(\mathcal{C}(X)) \subseteq (\mathrm{Fin}, \mathrm{Fin})_{\alpha+1}(\mathcal{C}(X)) \subseteq (\mathcal{I} \upharpoonright G_1, \mathrm{Fin}(G_1))_\alpha(\mathcal{C}(X))$$

z Lematu 3.48. Stąd

$$\mathcal{B}_\alpha(\mathcal{C}(X)) \subseteq (\mathcal{I} \upharpoonright G_1, \mathcal{J} \upharpoonright G_1)_\alpha(\mathcal{C}(X)).$$

Niech $M \in \mathrm{Fin} \otimes \mathrm{Fin}$ będzie takim zbiorem, że $M \subseteq \sigma[G_1]$. Istnieją zbiory $E \in \mathrm{Fin} \otimes \emptyset$ i $F \in \emptyset \otimes \mathrm{Fin}$ takie, że $M = E \cup F$. Ponieważ $C_k \subseteq \sigma^{-1}[\{k\} \times \omega]$ dla każdego $k \in \omega$, więc zbiór $\sigma^{-1}[E]$ jest pokryty przez skończenie wiele zbiorów C_k. Przypomnijmy, że $C_k \in \mathcal{I}$ dla wszystkich $k \in \omega$. Stąd $\sigma^{-1}[E] \in \mathcal{I} \upharpoonright G_1$.

Z własności funkcji σ otrzymujemy, że $\sigma^{-1}[F] \in \mathcal{I} \restriction G_1 \sqcup (A_n \cap G_1)$. Zauważmy, że $\sigma^{-1}[F] \cap A_n \subseteq \sigma^{-1}[F] \cap \bigcup_{k<n} C_k$, co wynika z faktu, że $C_k \cap A_n = \emptyset$ dla $n \leqslant k$. Ponadto $\sigma^{-1}[F] \cap \bigcup_{k<n} C_k$ jest zbiorem skończonym, gdyż $F \in \emptyset \otimes \mathrm{Fin}$ oraz $C_k \subseteq \sigma^{-1}[\{k\} \times \omega]$ dla każdego $k \in \omega$. Zatem $\sigma^{-1}[F] \in \mathcal{I} \restriction G_1$.

Rozważmy teraz zbiór G_2. Zdefiniujmy ideał

$$\mathcal{K} = \{M \subseteq G_2 :\ \forall_{k \in \omega}\ A_k \cap M \in \mathrm{Fin}\}.$$

Oznaczmy przez $\mathcal{L}$ ideał na G_2 generowany przez rodzinę $\{A_k \cap G_2 : k \in \omega\}$. Łatwo sprawdzić, że nie zachodzi własność $\mathrm{W}(\mathcal{K}, \mathcal{L}, \mathcal{K})$.

Niech $f \in \mathcal{B}_\alpha(\mathcal{C}(X))$. Pokażemy, że $f \in (\mathcal{I}, \mathcal{J})_\alpha(\mathcal{C}(X))$. Istnieje $\mathcal{K}$-zbieżny do f ciąg funkcji z $\bigcup_{\gamma<\alpha} \mathcal{B}_\gamma(\mathcal{C}(X))$. Na mocy założenia indukcyjnego funkcje te należą również do rodziny $\bigcup_{\gamma<\alpha} (\mathcal{I}, \mathcal{J})_\gamma(\mathcal{C}(X))$. Wówczas z Twierdzenia 2.7 wynika, że $f \in (\mathcal{K}, \mathcal{L})(\bigcup_{\gamma<\alpha} (\mathcal{I}, \mathcal{J})_\gamma(\mathcal{C}(X)))$. Oczywiście $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{J} \restriction G_2$. Aby zakończyć dowód wystarczy pokazać, że $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{I} \restriction G_2$.

Niech $M \in \mathcal{K}$. Zauważmy, że $M \cap \sigma^{-1}[\{k\} \times \omega] \subseteq \bigcup_{i \leqslant N_k} A_i$ dla każdego $k \in \omega$ (ponieważ $M \subseteq G_2$). Stąd wynika, że $M \cap \sigma^{-1}[\{k\} \times \omega]$ jest zbiorem skończonym dla wszystkich $k \in \omega$. Zatem $\sigma[M] \in \emptyset \otimes \mathrm{Fin}$. Z własności funkcji σ otrzymujemy, że $M \in \mathcal{I} \restriction G_2 \sqcup (A_n \cap G_2)_{n \in \omega}$. Wtedy $M \in \mathcal{I} \restriction G_2$ (z definicji ideału $\mathcal{K}$). □

3.5.4 Charakteryzacja w klasie ideałów koanalitycznych

Podsumujemy teraz wszystkie wyniki opisane w podrozdziale 3.5.

Twierdzenie 3.53 *Niech $\mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$ będą takimi nieortogonalnymi ideałami określonymi na ω, że $\mathcal{I}$ jest koanalityczny i niech $1 \leqslant n < \omega$. Wówczas*

(1) *$(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ jest pierwszego c-typu wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej doskonale normalnej przestrzeni topologicznej X mamy*

$$(\mathcal{I}, \mathcal{J})_n(\mathcal{C}(X)) = (\mathrm{Fin}, \mathrm{Fin})_n(\mathcal{C}(X)).$$

(2) *$(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ jest drugiego c-typu wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej doskonale normalnej przestrzeni topologicznej X mamy*

$$(\mathcal{I}, \mathcal{J})_n(\mathcal{C}(X)) = \mathcal{B}_n(\mathcal{C}(X)).$$

(3) *$(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ jest trzeciego c-typu wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej doskonale normalnej przestrzeni topologicznej X mamy*

$$(\mathrm{Fin}, \mathrm{Fin})_{n+1}(\mathcal{C}(X)) \subseteq (\mathcal{I}, \mathcal{J})_n(\mathcal{C}(X)).$$

Dowód. Ponieważ $\mathcal{I}$ jest ideałem koanalitycznym, więc z Faktu 3.42 otrzymujemy, że każda para $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ jest pewnego c-typu. Zatem w częściach (1), (2) i (3) wystarczy udowodnić, że zachodzą implikacje ze strony lewej do prawej, gdyż $(\mathrm{Fin}, \mathrm{Fin})_n (\mathcal{C}(\mathbb{R})) \subsetneq \mathcal{B}_n (\mathcal{C}(\mathbb{R})) \subsetneq (\mathrm{Fin}, \mathrm{Fin})_{n+1} (\mathcal{C}(\mathbb{R}))$ dla każdego $1 \leqslant n < \omega$.

Część (1): Teza wynika ze Stwierdzenia 3.49.

Część (2): Inkluzja „$\subseteq$" wynika ze Stwierdzenia 3.51, natomiast inkluzja przeciwna wynika ze Stwierdzenia 3.52.

Część (3): Teza wynika ze Stwierdzenia 3.50. □

Uwaga 3.54 Implikacje ze strony lewej do prawej w częściach (1), (2) i (3) Twierdzenia 3.53 pozostaną prawdziwe, jeżeli pominiemy założenie, że $\mathcal{I}$ jest ideałem koanalitycznym.

Uwaga 3.55 W częściach (2) i (3) Twierdzenia 3.53 implikacje ze strony lewej do prawej można uogólnić na wszystkie $1 \leqslant \alpha < \omega_1$ na podstawie Stwierdzeń 3.50, 3.51 i 3.52.

Problem 4 *Załóżmy, że X jest przestrzenią doskonale normalną oraz para $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ jest pierwszego c-typu. Czy $(\mathcal{I}, \mathcal{J})_\alpha (\mathcal{C}(X)) = (\mathrm{Fin}, \mathrm{Fin})_\alpha (\mathcal{C}(X))$ dla wszystkich $1 \leqslant \alpha < \omega_1$?*

Problem 5 *Scharakteryzować klasy $(\mathcal{I}, \mathcal{J})_\alpha (\mathcal{C}(X))$ w przypadku, gdy para $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ jest trzeciego c-typu, X jest przestrzenią doskonale normalną oraz $1 \leqslant \alpha < \omega_1$.*

Bibliografia

[1] Balcerzak M., Dems K., Komisarski A., *Statistical convergence and ideal convergence for sequences of functions*, J. Math. Anal. Appl., **328**, (2007), 715–729.

[2] Barbarski P., Filipów R., Mrożek N., Szuca P., *When the Katětov order implies that one ideal extends the other?*, Colloq. Math., **130**, No. 1 (2013), 91–102.

[3] Bartoszyński T., Judah H., *Set theory: on the structure of the real line*, A K Peters Wellesley, Massachusetts, (1995).

[4] Borsik J., *Algebraic structures generated by real quasicontinuous functions*, Tatra Mt. Math. Publ., **8**, (1996), 175–184.

[5] Bouziad A., Troallic J.-P., *Lower quasicontinuity, joint continuity and related concepts*, Topology Appl., **157**, No. 18 (2010), 2889–2894.

[6] Bukovská Z., *Quasinormal convergence*, Math. Slovaca, **41**, No. 2 (1991), 137–146.

[7] Bukovská Z., Bukovský L., *Adding small sets to an* $\mathbf{N}$*-set*, Proc. Amer. Math. Soc., **123**, No. 12 (1995), 3867–3873.

[8] Bukovská Z., Šalát T., *Some types of convergence of sequences of real-valued functions*, Acta Math. Univ. Comenian., **58/59**, (1990), 215–220.

[9] Bukovský L., *The structure of the real line*, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk. Monografie Matematyczne (Nowe serie), **71**, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, (2011).

[10] Bukovský L., Das P., Šupina J., *Ideal quasi-normal convergence and related notions*, manuskrypt (2014).

[11] Bukovský L., Haleš J., *QN-spaces, wQN-spaces and covering properties*, Topology Appl., **154**, (2007), 848–858.

[12] Bukovský L., Recław I., Repický M., *Spaces not distinguishing pointwise and quasinormal convergence of real-valued functions*, Topology Appl., **41**, No. 1-2 (1991), 25–40.

[13] Bukovský L., Recław I., Repický M., *Spaces not distinguishing convergences of real-valued functions*, Topology Appl., **112**, No. 1 (2001), 13–40.

[14] Cartan H., *Filtres et ultrafiltres*, C. R. Acad. Sci. Paris, **205**, (1937), 777–779.

[15] Császár Á., Laczkovich M., *Discrete and equal convergence*, Studia Sci. Math. Hungar., **10**, No. 3-4 (1975), 463–472.

[16] Császár Á., Laczkovich M., *Some remarks on discrete Baire classes*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., **33**, No. 1-2 (1979), 51–70.

[17] Das P., Chandra D., *Spaces not distinguishing pointwise and $\mathcal{I}$-quasinormal convergence*, Comment. Math. Univ. Carolin., **54**, No. 1 (2013), 83–96.

[18] Das P., Chandra D., *$(\mathcal{I},\mathcal{J})$-quasinormal spaces*, manuskrypt.

[19] Das P., Dutta S., Pal S. K., *On $\mathcal{I}$ and $\mathcal{I}^*$-equal convergence and an Egoroff-type theorem*, Matematički Vesnik, **66**, No. 2 (2014), 165–177.

[20] Debs G., Saint Raymond J., *Filter descriptive classes of Borel functions*, Fund. Math., **204**, No. 3 (2009), 189–213.

[21] Farah I., *Analytic quotients: theory of liftings for quotients over analytic ideals on the integers*, Mem. Amer. Math. Soc., **147**, No. 702 (2000).

[22] Farkas B., Soukup L., *More on cardinal invariants of analytic P-ideals*, Comment. Math. Univ. Carolin., **50**, No. 2 (2009), 281–295.

[23] Filipów R., Staniszewski M., *On ideal equal convergence*, Cent. Eur. J. Math., **12**, No. 6 (2014), 896–910.

[24] Filipów R., Staniszewski M., *Pointwise versus equal (quasi-normal) convergence via ideals*, J. Math. Anal. Appl., **422**, No. 2 (2015), 995–1006.

[25] Filipów R., Szuca P., *Three kinds of convergence and the associated $\mathcal{I}$-Baire classes*, J. Math. Anal. Appl., **391**, No. 1 (2012), 1–9.

[26] Grande Z., *Sur la quasi-continuité et la quasi-continuité approximative*, Fund. Math., **129**, (1988), 167–172.

[27] Grande Z., *On discrete limits of sequences of approximately continuous functions and T_{ae}-continuous functions*, Acta Math. Hungar., **92**, No. 1-2 (2001), 39–50.

[28] Hernández-Hernández F., Hrušák M., *Cardinal invariants of analytic P-ideals*, Canad. J. Math., **59**, No. 3 (2007), 575–595.

[29] Katětov M., *On descriptive classes of functions*, in: Theory of Sets and Topology, Deutsch. Verlag Wiss., Berlin, (1972), 265–278.

[30] Kempisty S., *Sur les fonctions quasicontinues*, Fund. Math., **19**, (1932), 184–197.

[31] Khan M. K., Orhan C., *Matrix characterization of A-statistical convergence*, J. Math. Anal. Appl., **335**, (2007), 406–417.

[32] Kostyrko P., Šalát T., Wilczyński W., *$\mathcal{I}$-convergence*, Real Anal. Exchange, **26**, No. 2 (2000/01), 669–685.

[33] Kwela A., *A note on a new ideal*, J. Math. Anal. Appl., **430**, No. 2 (2015), 932–949.

[34] Kwela A., *Kombinatoryczne i deskryptywne własności ideałów na zbiorach przeliczalnych*, rozprawa doktorska, Gdańsk, 2014.

[35] Kwela A., Staniszewski M., *Ideal equal Baire classes*, wysłana do czasopisma.

[36] Laflamme C., *Filter games and combinatorial properties of strategies*, In Set Theory (Boise, ID, 1992-1994), Amer. Math. Soc., Providence, RI, **192**, (1996), 51–67.

[37] Laczkovich M., Recław I., *Ideal limits of sequences of continuous functions*, Fund. Math., **203**, No. 1 (2009), 39–46.

[38] Levine N., *Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces*, Amer. Math. Montly, **70**, (1963), 36–41.

[39] Maćaj M., Sleziak M., *$\mathcal{I}^{\mathcal{K}}$-convergence*, Real Anal. Exchange, **36**, No. 1 (2010/11), 177–194.

[40] Mildenberger H., *There may be infinitely many near coherence classes under* $\mathfrak{u} < \mathfrak{d}$, J. Symbolic Logic, **72**, No. 4 (2007), 1228–1238.

[41] Natkaniec T., Szuca P., *On the ideal convergence of sequences of quasi-continuous functions*, Fund. Math., **232**, (2016), 269–280.

[42] Natkaniec T., Szuca P., *On the discrete ideal convergence of sequences of quasi-continuous functions*, wysłana do czasopisma.

[43] Neubrunnova A., *On certain generalizations of the notion of continuity*, Mat. Casopis Sloven. Akad. Vied, **23**, (1973), 374–380.

[44] Richter C., *Representing cliquish functions as quasiuniform limits of quasicontinuous functions*, Real Anal. Exchange, **27**, No. 1 (2001/02), 209–221.

[45] Schoenberg I. J. *The integrability of certain functions and related summability methods*, Amer. Math. Monthly, **66**, (1959), 361–375.

[46] S. Solecki, *Filters and sequences*, Fund. Math., **163**, (2000), 215–228.

[47] Staniszewski M., *On ideal equal convergence II*, wysłana do czasopisma.

[48] Steinhaus H., *Comptes rendus: Société Polonaise de Mathématique. Section de Wrocław. Septembre 1948-Mars 1949*, Colloquium Math., **2**, (1951), 63–78.

[49] Šupina J., *Ideal QN-spaces*, J. Math. Anal. Appl., **435**, No. 1 (2016), 477–491.

[50] Talagrand M., *Compacts de fonctions mesurables et filtres non mesurables*, Studia Math., **67**, No. 1 (1980), 13–43.

[51] Todorčevic S., *Analytic gaps*, Fund. Math., **150**, No. 1 (1996), 55–66.

[52] Tsaban B., Zdomskyy L., *Hereditary Hurewicz spaces and Arhangel'skiĭ sheaf amalgamations*, J. Eur. Math. Soc., **14**, (2012), 353–372.