Uniwersytet Gdański
Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki

Jacek Tryba

Analityczne własności ideałów

Rozprawa doktorska napisana pod kierunkiem
dra hab. prof. UG Rafała Filipowa oraz dra Adama Kweli

Gdańsk, 2018

OŚWIADCZENIE

Ja, niżej podpisany oświadczam, że przedłożona praca dyplomowa została wykonana przeze mnie samodzielnie, nie narusza praw autorskich, interesów prawnych i materialnych innych osób.

....

data *mgr Jacek Tryba*

Spis treści

Streszczenie

W niniejszej rozprawie doktorskiej zajmujemy się kilkoma klasami ideałów i badamy ich własności. Będziemy szczególnie zainteresowani własnościami powiązanymi ze zbieżnością ideałową i strukturą ideałów. Drugim naczelnym zagadnieniem tej rozprawy jest analizowanie funkcji gęstości, których można użyć do zdefiniowania ideałów.

Rozważamy zbieżność ideałową podczas badań nad własnościami typu BW (wprowadzonych przez Filipowa, Mrożka, Recława i Szucę w [20]) dla kilku ideałów powiązanych ze znanymi twierdzeniami kombinatorycznymi Hindmana i van der Waerdena. Rozwijamy wyniki uzyskane przez Kojmana (por. [37], [38]) poprzez pokazanie, że kilka z tych własności jest równoważnych dla badanych ideałów i wykorzystujemy ten rezultat jako punkt wyjścia do badań nad jednorodnością ideałów. Następnie przedstawiamy kilka przykładów ideałów jednorodnych (pojęcie analogiczne do jednorodnych filtrów wprowadzonych przez Fremlina w [22]) i pokazujemy związki między ideałami jednorodnymi i K-jednorodnymi, co daje nam odpowiedzi na pytania zadane przez Hrušáka w [33] i Meza-Alcántarę w [51]. Ponadto, wykorzystujemy jednorodność ideałów do rozwiązania kilku problemów o funkcjach $\mathcal{I}$-niezmienniczych postawionych przez Balcerzaka, Głąba i Swaczynę w [6].

W rozprawie omawiamy znane klasy ideałów zdefiniowanych przy pomocy gęstości, jak ideały gęstościowe wprowadzone przez Faraha w [16] oraz ideały Erdősa-Ulama zdefiniowane w [34] przez Justa i Krawczyka, a także rozważamy kilka nowych klas ideałów zdefiniowanych przez inne gęstości, takie jak ważona gęstość jednostajna wprowadzona przez Giuliano Antonini i Grekosa w [26] oraz prosta gęstość przedstawiona w [4] przez Balcerzaka, Dasa, Filipczak i Swaczynę. Wykazujemy kilka własności tych klas ideałów, badamy ich strukturę topologiczną i porównujemy je z wcześniej znanymi klasami ideałów.

Badania nad ideałami zdefiniowanymi przez gęstości prowadzą do rozważań nad samymi gęstościami. Porównujemy różne ważone gęstości jednostajne z klasyczną gęstościa jednostajną i przedstawiamy charakteryzację, kiedy mają one własność Darboux, co rozwiązuje problem Mačaja, Sleziaka i Tomy z [49]. Ponadto, znajdujemy rozwiązania do kilku problemów dotyczących gęstości postawionych przez Giuliano, Grekosa i Mišíka w [25]. Na przykład, pokazujemy, kiedy ciągi stosunków, wprowadzone przez Straucha i Tótha w [60], mają jednorodną dystrybucję.

Abstract

In the Ph.D. thesis we consider several different classes of ideals and investigate their properties. We are mostly interested in properties related to ideal convergence and structure of ideals. The second main point of the thesis is to study density functions that can be used to define ideals.

We investigate ideal convergence when considering BW-like properties (introduced by Filipów, Mrożek, Recław and Szuca in [20]) for several ideals connected with well known combinatorial theorems of Hindman and van der Waerden. We expand the results of Kojman (see [37], [38]) by showing that several of these properties coincide for examined ideals and treat this result as a starting point for our studies of the homogeneity of ideals. We present several examples of homogeneous ideals (term analogous to homogeneous filters introduced by Fremlin in [22]) and show connections between homogeneous ideals and K-uniform ideals, which answers several questions posed by Hrušák in [33] and Meza-Alcántara in [51]. Moreover, we apply homogeneity to solve several problems about $\mathcal{I}$-invariant functions stated by Balcerzak, Głąb and Swaczyna in [6].

The best known connections between ideals and densities of subsets of natural numbers are classical ideals of asymptotic density zero and uniform density zero. There are also whole classes of ideals defined by density functions like Farah density ideals from [16], Erdős-Ulam defined in [34] by Just and Krawczyk and matrix summability ideals introduced by Drewnowski and Paúl in [15]. In the thesis we consider both some of these mentioned classes and new classes of ideals defined by other kinds of densities like weighted uniform density introduced by Giuliano Antonini and Grekos in [26] and simple density presented in [4] by Balcerzak, Das, Filipczak and Swaczyna. We show several properties of these new classes of ideals, examine their topological structure and compare them with well known ideals.

Investigation into ideals defined by densities naturally leads to our study on densities of subsets of natural numbers themselves. We compare different weighted uniform densities with classic uniform density and characterize when they have the Darboux property, which solves the problem of Mačaj, Sleziak and Toma from [49]. Furthermore, we tackle numerous problems on densities stated by Giuliano, Grekos and Mišík in [25]. For example, we characterize the uniform distribution of ratio block sequences that were first considered by Strauch and Tóth in [60] as a continuation of Šalát's studies of ratio sets (see [65]).

Wstęp

Niniejsza rozprawa poświęcona jest badaniu różnych klas ideałów na zbiorze liczb naturalnych oraz ich własności związanych między innymi ze zbieżnością ideałową. Drugim naczelnym zagadnieniem tej rozprawy jest analizowanie funkcji gęstości, których można użyć do zdefiniowania ideałów.

Ideały na zbiorach przeliczalnych są klasycznym przedmiotem badań teorii mnogości. Znajdują one zastosowania także w wielu innych dziedzinach matematyki, takich jak topologia, analiza rzeczywista, teoria liczb i analiza funkcjonalna. Tematyką ideałów zajmowało się wielu wybitnych matematyków, wśród których można wymienić takie postaci jak Farah, Hrušák, Šalát, Solecki, Talagrand, Todorčević i wielu innych.

Własności ideałów znajdują swoje zastosowania między innymi w zbieżności ideałowej. Jest ona uogólnieniem zbieżności statystycznej, która pojawiła się jako zbieżność asymptotyczna w problemie 5 z Księgi Szkockiej, a następnie formalnie zdefiniowali ją Steinhaus [59], Fast [18] oraz Schoeneberg [56]. Pojęcie zbieżności ideałowej w obecnej formie zostało wprowadzone w [40] przez Kostyrko, Šaláta i Wilczyńskiego kilkanaście lat temu, chociaż równoważne jej pojęcie zbieżności filtrowej pojawiło się już w 1937 roku u Cartana [12]. Problematyka ta jest cały czas rozwijana w ostatnich latach, a swój wkład w nią mieli między innymi Balcerzak, Laczkovich, Orhan, Recław czy Wilczyński (por. [5], [6], [13], [35], [44]).

Najlepiej znanymi powiązaniami ideałów z gęstościami podzbiorów liczb naturalnych są klasyczne ideały gęstości asymptotycznej zero oraz gęstości jednostajnej zero. Istnieją także całe klasy ideałów zdefiniowanych przy pomocy gęstości, jak ideały gęstościowe wprowadzone przez Faraha w [16], ideały Erdősa-Ulama zdefiniowane w [34] przez Justa i Krawczyka lub ideały gęstości macierzowej pochodzące z pracy Drewnowskiego i Paúla [15]. Naturalną kontynuacją badań nad takimi klasami ideałów jest więc przedstawione w rozprawie rozważanie ideałów zdefiniowanych przy pomocy innych gęstości, jak na przykład ważona gęstość jednostajna wprowadzona przez Giuliano Antonini i Grekosa w [26], a także badanie samych gęstości podzbiorów liczb naturalnych.

Gęstości są wykorzystywane do zbadania wielkości podzbiorów liczb naturalnych i można je traktować jako odpowiednik miary (choć miarami zwykle nie są) na zbiorze liczb naturalnych. Gęstości odgrywają fundamentalną rolę w rozwoju teorii liczb, ale znajdują one zastosowanie również w analizie rzeczywistej, teorii dystrybucji, kombinatoryce i teoriach ergodycznych. Badaniem gęstości oraz wykorzystaniem ich do rozważań nad dystrybucją ciągów zajmowało się wielu wybitnych matematyków, takich jak Alexander, Bergelson, Buck, Erdős, Furstenberg, Grekos, Hindman, Šalát, Sierpiński, Szemerédi, Tenebaum, Turán, Weyl i wielu innych (por. [1], [8], [10], [11], [23], [57], [61], [65], [66]).

W pierwszym rozdziale wprowadzimy podstawowe pojęcia i definicje, które będziemy wykorzystywać w kolejnych częściach doktoratu.

W rozdziale 2 niniejszej rozprawy przyjrzymy się rodzinom jednorodności ideałów. Opiszemy wyniki uzyskane wspólnie z Filipowem w [21] dotyczące zbieżności ideałowej ciągów i własności BW wprowadzonej przez Filipowa, Mrożka, Recława i Szucę w [20]. Przyjrzymy się tej własności dla dwóch ideałów związanych z kombinatorycznymi twierdzeniami van der Waerdena i Hindmana. Uzyskane wyniki będą stanowiły punkt wyjścia do zajęcia się tematyką jednorodności. Następnie przedstawimy rezultaty otrzymane wspólnie z Kwelą w [43], gdzie wykorzystamy jednorodność ideałów oraz powiązane z nią pojęcia do uogólnienia wyników z [21] oraz do rozwiązania licznych problemów, postawionych przez takich matematyków jak Balcerzak, Głąb, Hrušák, Meza-Alcántara i Swaczyna dotyczących porządków Katětova oraz funkcji ideałowo niezmienniczych.

W rozdziale 3 opiszemy dwie klasy ideałów związane z różnymi rodzajami gęstości, klasę prostych ideałów gęstościowych oraz klasę ideałów ważonej gęstości jednostajnej. Pierwsza z tych klas została wprowadzona przez Balcerzaka, Dasa, Filipczak i Swaczynę w [4], gdzie pokazano między innymi związek tych ideałów z ideałami gęstościowymi Faraha. W niniejszej rozprawie przedstawimy wyniki z naszej wspólnej pracy z Kwelą, Popławskim i Swaczyną [42], gdzie porównujemy te ideały z ideałami Erdősa-Ulama, odpowiadamy na pytanie zadane na wrocławskim seminarium dotyczące sum i przekrojów tej klasy ideałów oraz pokazujemy jak wiele parami nieizomorficznych prostych ideałów gęstościowych można znaleźć. Ideały ważonej gęstości jednostajnej zostały wprowadzone w pracy autora tej rozprawy [63] korzystając z pojęcia ważonej gęstości jednostajnej wprowadzonej przez Giuliano Antonini i Grekosa w [26]. W tej części rozprawy przedstawionych zostanie kilka własności tych ideałów, a następnie przyjrzymy się samej ważonej gęstości jednostajnej. Wykorzystamy wyniki Mačaja, Sleziaka i Tomy z [49], żeby porównać ze sobą różne ważone gęstości jednostajne oraz odpowiedzieć na postawiony przez nich problem dotyczący własności Darboux tych gęstości.

Rozdział 4 poświęcony będzie kontynuacji badań nad gęstościami podzbiorów liczb naturalnych. Przedstawione w nim zostaną wyniki z pracy autora tej rozprawy [62], która skupia się głównie na znajdowaniu odpowiedzi na kilka pytań Giuliano, Grekosa i Mišíka z [25]. Pytania te dotyczą różnych nurtów badań nad gęstościami podzbiorów liczb naturalnych. Podamy w tym rozdziale odpowiedzi na problemy związane między innymi z funkcjami dystrybucji i zbiorami gęstości, a także przyjrzymy się kilku rodzajom gęstości i pokażemy, kiedy istnieją zbiory o ustalonych wartościach różnych gęstości. W niniejszej rozprawie funkcje dystrybucji będą definiowane na ciągach stosunków, co zostało zapoczątkowane przez Straucha i Tótha w [60] jako rozwinięcie badań Šaláta dotyczących zbiorów stosunków [65], a badania nad nimi wpisują się w rozważania nad ciągami modulo 1 i są przedmiotem licznych publikacji (por. [2], [3], [30], [41]). Zbiory gęstości są zaś pojęciem wprowadzonym przez Grekosa w [28] charakteryzującym gęstości asymptotyczne podzbiorów danego zbioru, a badania nad nimi były kontynuowane i rozszerzane między innymi w [29].

Podziękowania

Chciałbym serdecznie podziękować moim promotorom, dr. hab. Rafałowi Filipowowi oraz dr. Adamowi Kweli, za zaangażowanie w opiekę naukową, owocną współpracę, okazaną życzliwość i pomoc w przygotowaniu niniejszej rozprawy.

Wdzięczny jestem także dr. hab. Piotrowi Szucy, który pełnił funkcję mojego opiekuna naukowego przez dwa lata studiów doktoranckich, za wszelką pomoc i inspirację do podjęcia ciekawych badań.

Dziękuję również mgr. Popławskiemu i mgr. Swaczynie za udaną współpracę, której wynikiem jest nasz wspólny z dr. Kwelą artykuł będący częścią tej rozprawy.

Rozdział 1

Podstawowe definicje

W tym rozdziale wprowadzimy kilka podstawowych pojęć, z których będziemy korzystać w dalszych częściach tej rozprawy.

Definicja 1.0.1. Rodzinę $\mathcal{I}$ podzbiorów zbioru nieskończonego X nazywamy *ideałem na zbiorze* X, gdy spełnione są następujące warunki:

1. jeśli $A \in \mathcal{I}$ oraz $B \subseteq A$, to $B \in \mathcal{I}$,
2. jeśli $A, B \in \mathcal{I}$, to $A \cup B \in \mathcal{I}$,
3. $\emptyset \in \mathcal{I}$ oraz $X \notin \mathcal{I}$.

   Dodatkowo, będziemy także przyjmować czwarty warunek:

4. jeśli $A \subseteq X$ jest skończony, to $A \in \mathcal{I}$.

Na potrzeby tej pracy zawsze będziemy zakładali, że X, na którym określamy ideały, jest zbiorem przeliczalnym. Najczęściej będzie to zbiór liczb naturalnych, oznaczany przez $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \dots\}$.

Będziemy mówili, że pewna własność jest spełniona dla *prawie wszystkich* liczb naturalnych, jeśli nie jest spełniona jedynie dla skończenie wielu liczb naturalnych. Mówimy też, że nieskończone zbiory A, B są *prawie rozłączne*, jeśli $A \cap B$ jest zbiorem skończonym.

Filtrem dualnym do ideału $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ nazywamy rodzinę $\mathcal{I}^* = \{A \subseteq X : X \setminus A \in \mathcal{I}\}$, natomiast jego *koideałem* nazywamy rodzinę $\mathcal{I}^+ = \{A \subseteq X : A \notin \mathcal{I}\}$, która jest znana również jako rodzina zbiorów $\mathcal{I}$-*dodatnich.* Mówimy, że ideał jest *maksymalny*, jeśli $\mathcal{I} \cup \mathcal{I}^* = \mathcal{P}(X)$. Zauważmy, że dla ideałów maksymalnych $\mathcal{I}^+ = \mathcal{I}^*$.

Ideał $\mathcal{I}$ na X jest *gęsty*, jeśli dla dowolnego nieskończonego zbioru $A \subseteq X$ istnieje taki nieskończony zbiór $B \subseteq A$, że $B \in \mathcal{I}$. Kiedy $Y \subseteq X$ jest zbiorem $\mathcal{I}$-dodatnim, to przez *obcięcie ideału* $\mathcal{I}$ *do zbioru* Y rozumiemy ideał $\mathcal{I}|Y = \{A \cap Y : A \in \mathcal{I}\}$. Jeśli zaś $Y \in \mathcal{I}$, to $\mathcal{I}|Y$ rozumiemy jako $\mathcal{P}(Y)$.

Definicja 1.0.2. *Sumą rozłączną zbiorów* X *i* Y nazywamy zbiór $X \oplus Y = (\{0\} \times X) \cup (\{1\} \times Y)$. Jeśli $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ i $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(Y)$, to *sumę rozłączną* tych rodzin będziemy definiować jako

$$\mathcal{I} \oplus \mathcal{J} = \{A \subseteq X \oplus Y : \{x \in X : (0, x) \in A\} \in \mathcal{I} \wedge \{y \in Y : (1, y) \in A\} \in \mathcal{J}\}.$$

Łatwo zauważyć, że jeśli $\mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$ są ideałami, to $\mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$ także jest ideałem.

Definicja 1.0.3. Niech $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ i $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(Y)$. Wówczas *produktem rodzin $\mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$* nazywamy rodzinę podzbiorów $X \times Y$ daną przez

$$\mathcal{I} \otimes \mathcal{J} = \{A \subseteq X \times Y : \{x \in X : A_x \notin \mathcal{I}\} \in \mathcal{J}\},$$

gdzie $A_x = \{y \in Y : (x, y) \in A\}$.

Nietrudno sprawdzić, że kiedy $\mathcal{I}$ oraz $\mathcal{J}$ są ideałami, to rodziny $\mathcal{I} \otimes \mathcal{J}$, $\mathcal{I} \otimes \{\emptyset\}$, $\{\emptyset\} \otimes \mathcal{J}$ są ideałami na zbiorze $X \times Y$.

Definicja 1.0.4. Ideał $\mathcal{I}$ jest *P-ideałem*, jeśli dla dowolnej przeliczalnej rodziny zbiorów $\{A_n \in \mathcal{I} : n \in \mathbb{N}\}$ istnieje taki zbiór $A \in \mathcal{I}$, że dla każdego naturalnego n zbiór $A_n \setminus A$ jest skończony.

Natomiast $\mathcal{I}$ jest *słabym P-ideałem*, jeśli dla dowolnej przeliczalnej rodziny zbiorów $\{A_n \in \mathcal{I} : n \in \mathbb{N}\}$ istnieje taki zbiór $A \notin \mathcal{I}$, że każdego naturalnego n zbiór $A \cap A_n$ jest skończony.

Wprowadźmy następujące oznaczenia dla *górnej i dolnej gęstości asymptotycznej* zbioru $A \subseteq \mathbb{N}$:

$$\overline{d}(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|A \cap \{1, \ldots, n\}|}{n}, \ \underline{d}(A) = \liminf_{n\to\infty} \frac{|A \cap \{1, \ldots, n\}|}{n}.$$

Przykłady. Przedstawiamy poniżej kilka często używanych ideałów:

1. Fin - ideał skończonych podzbiorów $\mathbb{N}$.
2. $\mathcal{I}_d = \{A \subseteq \mathbb{N} : \overline{d}(A) = 0 \}$ - ideał podzbiorów $\mathbb{N}$ o gęstości asymptotycznej zero.
3. $\mathcal{I}_u = \{A \subseteq \mathbb{N} : \lim_{h\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \frac{|A\cap\{n,\ldots,n+h\}|}{h+1} = 0 \}$ - ideał podzbiorów $\mathbb{N}$ o gęstości jednostajnej zero.

1.1 Zbieżność ideałowa

Dla zbiorów X, Y przez X^Y oznaczamy zbiór wszystkich funkcji z Y do X. Jeśli $Y \subseteq \mathbb{N}$, to X^Y jest zbiorem wszystkich ciągów $(x_n)_{n\in Y}$, takich że $x_n \in X$ dla każdego $n \in Y$.

Definicja 1.1.1. Niech X będzie przestrzenią Hausdorffa, zaś $\mathcal{I}$ będzie ideałem na $\mathbb{N}$. Mówimy, że ciąg $(x_n) \in X^A$, gdzie $A \subseteq \mathbb{N}$, jest $\mathcal{I}$-zbieżny do pewnego $x \in X$ jeśli dla każdego otwartego otoczenia U punktu x zbiór $\{n \in A : x_n \notin U\}$ należy do $\mathcal{I}$.

Zauważmy, że jak $\mathcal{I} = \mathrm{Fin}$, to mamy do czynienia ze zwykłą zbieżnością ciągów. Jeśli $X = \mathbb{R}$, to będziemy zwykle używać równoważnej definicji, w której ciąg liczb rzeczywistych $(x_n)_{n\in A}$ jest $\mathcal{I}$-zbieżny do $x \in \mathbb{R}$ jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ zbiór $\{n \in A : |x_n - x| > \varepsilon\}$ należy do $\mathcal{I}$.

1.2 Topologiczne własności ideałów

Przestrzenią Cantora $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ nazywamy iloczyn kartezjański przeliczalnie wielu przestrzeni dyskretnych $\{0,1\}$ wraz z topologią produktową. Rodzinę $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ można utożsamić z przestrzenią Cantora poprzez przypisanie każdemu podzbiorowi $\mathbb{N}$ jego funkcji charakterystycznej. Wobec tego, każdy ideał na $\mathbb{N}$ można traktować jako podzbiór przestrzeni Cantora. Mówimy, że ideał na $\mathbb{N}$ jest *borelowski* (lub też analityczny, F_σ, itd.) jeśli jest borelowskim (odpowiednio analitycznym, F_σ, itd.) podzbiorem przestrzeni Cantora. Możemy mówić także o topologicznych własnościach ideałów na dowolnej przeliczalnej przestrzeni X korzystając z ustalonej bijekcji między $\mathbb{N}$ a X.

Poniżej przedstawiamy znane charakteryzacje ideałów borelowskich.

Definicja 1.2.1. Funkcję $\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,\infty]$ nazywamy *podmiarą*, kiedy dla dowolnych $A, B \subseteq \mathbb{N}$ mamy:

1. $\varphi(\emptyset) = 0$,
2. jeśli $B \subseteq A$, to $\varphi(B) \leqslant \varphi(A)$,
3. $\varphi(A \cup B) \leqslant \varphi(A) + \varphi(B)$.

Dodatkowo, podmiara φ jest *półciągła z dołu* jeśli dla dowolnego zbioru $A \subseteq \mathbb{N}$ mamy $\varphi(A) = \lim_{n\to\infty} \varphi(A \cap \{1,\dots,n\})$.

Twierdzenie 1.2.2 (Mazur [50, Lemat 1.2])**.** *Ideał $\mathcal{I}$ na $\mathbb{N}$ jest ideałem F_σ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{I} = \mathrm{Fin}(\varphi) = \{A \subseteq \mathbb{N} : \varphi(A) < \infty\}$ dla pewnej półciągłej z dołu podmiary φ na $\mathbb{N}$, takiej że $\varphi(\mathbb{N}) = \infty$ i $\varphi(\{n\}) < \infty$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.*

Twierdzenie 1.2.3 (Solecki [58, Twierdzenie 3.1])**.** *Następujące warunki są równoważne:*

1. *$\mathcal{I}$ jest analitycznym P-ideałem;*
2. *$\mathcal{I}$ jest $F_{\sigma\delta}$ P-ideałem;*
3. $\mathcal{I} = \mathrm{Exh}(\varphi) = \{A \subseteq \mathbb{N} : \lim_{n\to\infty} \varphi(A \setminus \{1,\dots,n\}) = 0\}$ *dla pewnej półciągłej z dołu podmiary φ na $\mathbb{N}$ spełniającej warunek* $\limsup_{n\to\infty} \varphi(\mathbb{N} \setminus \{1,\dots,n\}) > 0$.

1.3 Przykładowe klasy ideałów

Poniżej wprowadzamy kilka przykładów znanych klas ideałów oraz związanych z nimi notacji.

Definicja 1.3.1 ([48], także [50])**.** Niech $f : \mathbb{N} \to [0,\infty)$ będzie taką funkcją, że $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \infty$. Wówczas *ideałem sumowalnym* nazywamy ideał

$$\mathcal{I}_f = \{A \subseteq \mathbb{N} : \sum_{n\in A} f(n) < \infty\}.$$

Ideały sumowalne zawsze są F_σ P-ideałami. Przykładem takiego ideału jest $\mathcal{I}_{1/n} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \sum_{n\in A} 1/n < \infty\}$.

Definicja 1.3.2. Niech $A \subseteq \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, zaś I niech będzie przedziałem na $[1,\infty)$. Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$A(n) = |A \cap [1,n]|, \ A(I) = |A \cap I|.$$

Dodatkowo, niech $f : \mathbb{N} \to [0,\infty)$ będzie taką funkcją, że $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \infty$. Wówczas stosować będziemy następujące oznaczenia:

$$A_f(n) = \sum_{i\in A\cap[1,n]} f(i), \ A_f(I) = \sum_{i\in A\cap I} f(i)$$

Jak $I = [a,b]$ dla $a, b \in (0,\infty)$, będziemy czasami pomijali zewnętrzne nawiasy w powyższym zapisie i pisali $A_f[a,b]$ zamiast $A_f([a,b])$. To samo dotyczy przypadku, gdy I jest równy (a,b), $(a,b]$ lub $[a,b)$.

Definicja 1.3.3 ([34])**.** Niech $f : \mathbb{N} \to [0,\infty)$ będzie funkcją spełniającą $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \infty$ oraz $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{\sum_{i\leqslant n} f(i)} = 0$. Wówczas *ideałem Erdősa-Ulama* nazywamy ideał

$$\mathcal{EU}_f = \left\{ A \subseteq \mathbb{N} : \lim_{n\to\infty} \frac{A_f(n)}{\mathbb{N}_f(n)} \right\}.$$

Przykładem ideału Erdősa-Ulama jest $\mathcal{I}_d$.

Definicja 1.3.4 ([17], także [16, Rozdział 1.13])**.** Niech $I_1, I_2, \ldots$ będzie ciągiem rozłącznych przedziałów na $\mathbb{N}$, zaś $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ ciągiem miar, takim że $supp(\varphi_n) = \{i \in \mathbb{N} : \varphi_n(\{i\}) \neq 0\} \subseteq I_n$ dla każdego n naturalnego. Wówczas *ideałem gęstościowym* w sensie Faraha jest ideał

$$\mathcal{I} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \lim_{n\to\infty} \varphi_n(A) = 0\}.$$

Możemy spostrzec, że w pierwotnej definicji Faraha z [16] autor wykorzystuje trochę inną, równoważną definicję (zbiory I_n są w niej skończone i rozłączne, jednak nie muszą być przedziałami), ale w swoich późniejszych pracach (por. [17]) Farah używa powyższej definicji ideałów gęstościowych.

Nietrudno pokazać (por. [16]), że każdy ideał Erdősa-Ulama jest ideałem gęstościowym, zaś każdy ideał gęstościowy jest analitycznym P-ideałem. Poniżej przedstawiamy znaną charakteryzację, kiedy ideał gęstościowy jest ideałem Erdősa-Ulama

Twierdzenie 1.3.5 ([16, Twierdzenie 1.13.3])**.** *Ideał gęstościowy w sensie Faraha generowany przez ciąg miar $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ jest ideałem Erdősa-Ulama wtedy i tylko wtedy, gdy*

1. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(\mathbb{N}) < \infty$,
2. $\lim_{n\to\infty} \sup_{i\in\mathbb{N}} \varphi_n(\{i\}) = 0$,
3. $\limsup_{n\to\infty} \varphi_n(\mathbb{N}) > 0$.

Rozdział 2

Jednorodność ideałów

2.1 Własność BW

W tym podrozdziale zajmiemy się własnością Bolzano-Weierstrassa ideałów. Szczególnie będą nas interesować ideały van der Waerdena i Hindmana oraz związki między różnymi własnościami typu Bolzano-Weierstrassa dla tych ideałów. Wyniki zawarte w tym podrozdziale pochodzą z naszej pracy z Filipowem [21].

Własność Bolzano-Weierstrassa (w skrócie: własność BW) jest uogólnieniem znanego i klasycznego twierdzenia Bolzano-Weierstrassa, które mówi, że każdy ograniczony ciąg liczb rzeczywistych zawiera podciąg zbieżny. Dostosowując to twierdzenie do zbieżności ideałowej otrzymamy nowe klasy przestrzeni topologicznych oraz związane z nimi własności, wprowadzone w [20] przez Filipowa, Mrożka, Recława i Szucę.

Definicja 2.1.1. Niech X będzie przestrzenią Hausdorffa, zaś $\mathcal{I}$ będzie ideałem na $\mathbb{N}$. Mówimy, że para $(X, \mathcal{I})$ ma własność

- *BW*, jeśli dla każdego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ istnieje $\mathcal{I}$-zbieżny podciąg $(x_n)_{n\in A}$, taki że $A \notin \mathcal{I}$;

- *FinBW*, jeśli dla każdego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ istnieje zbieżny podciąg $(x_n)_{n\in A}$, taki że $A \notin \mathcal{I}$;

- *hBW*, jeśli dla każdego ciągu $(x_n)_{n\in A} \in X^A$, gdzie $A \notin \mathcal{I}$, istnieje $\mathcal{I}$-zbieżny podciąg $(x_n)_{n\in B}$, taki że $B \subseteq A$ oraz $B \notin \mathcal{I}$;

- *hFinBW* , jeśli dla każdego ciągu $(x_n)_{n\in A} \in X^A$, gdzie $A \notin \mathcal{I}$, istnieje zbieżny podciąg $(x_n)_{n\in B}$, taki że $B \subseteq A$ oraz $B \notin \mathcal{I}$.

W dalszym ciągu pracy przez $(X, \mathcal{I}) \in \mathrm{BW}$ $(\mathrm{FinBW}, \mathrm{hBW}, \mathrm{hFinBW})$ będziemy oznaczali fakt, że $(X, \mathcal{I})$ ma własność BW $(\mathrm{FinBW}, \mathrm{hBW}, \mathrm{hFinBW})$. Zauważmy, że $(X, \mathcal{I}) \in \mathrm{hBW}$ (hFinBW) jeśli dla każdego $A \notin \mathcal{I}$ mamy $(X, \mathcal{I}|A) \in \mathrm{BW}$ (FinBW).

Definicja 2.1.2. Mówimy, że $\mathcal{I}$ ma *własność BW* ($\mathcal{I} \in \mathrm{BW}$) jeśli $([0,1], \mathcal{I}) \in \mathrm{BW}$. To samo odnosi się także do własności $\mathrm{FinBW}, \mathrm{hBW}, \mathrm{hFinBW}$.

Bezpośrednio z tych definicji wynika, że jeśli $(X, \mathcal{I}) \in \mathrm{hFinBW}$, to $(X, \mathcal{I})$ ma także każdą z pozostałych własności. Ponadto, posiadanie przez $(X, \mathcal{I})$ własności FinBW lub hBW implikuje posiadanie przez nią własności BW. Obrazowo pokazuje to poniższy diagram, na którym „$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$" oznacza „jeśli $(X, \mathcal{I}) \in \mathcal{A}$, to $(X, \mathcal{I}) \in \mathcal{B}$".

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{hFinBW} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathrm{FinBW} \arrow[dr] & & \mathrm{hBW} \arrow[dl] \\
 & \mathrm{BW} &
\end{tikzcd}$$

W naszej wspólnej pracy z Filipowem [21] przyjrzeliśmy się bliżej dwóm konkretnym ideałom zdefiniowanym przy użyciu znanych twierdzeń kombinatorycznych i pokazaliśmy, że dla każdego z tych ideałów i każdej przestrzeni X własność BW jest równoznaczna z własnością hBW.

Ideał van der Waerdena

Definicja 2.1.3. Zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$ nazywamy *AP-zbiorem* jeśli zawiera ciągi arytmetyczne dowolnej skończonej długości. Na podstawie klasycznego twierdzenia van der Waerdena (por. [64]), rodzina

$$\mathcal{W} = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ nie jest AP-zbiorem}\}$$

jest ideałem, który nazywamy *ideałem van der Waerdena.*

Przestrzenią van der Waerdena nazywamy przestrzeń Hausdorffa X, dla której $(X, \mathcal{W}) \in \mathrm{FinBW}$.

Nietrudno zauważyć, że ideał van der Waerdena jest gęstym ideałem F_σ, który nie jest P-ideałem. Własnością BW dla ideału van der Waerdena zajmował się Kojman w [38], gdzie wprowadził on pojęcie przestrzeni van der Waerdena. Rozważali je później Kojman i Shelah we wspólnej pracy [39]. W [38] Kojman pokazał następującą własność ideału van der Waerdena.

Twierdzenie 2.1.4 ([38, Twierdzenie 4])**.** *Dla każdej przestrzeni Hausdorffa X, $(X, \mathcal{W}) \in FinBW \iff (X, \mathcal{W}) \in hFinBW$*

Poniżej przedstawiamy dowód analogicznego wyniku dla zbieżności ideałowej.

Twierdzenie 2.1.5. *Dla każdej przestrzeni Hausdorffa X, $(X, \mathcal{W}) \in BW \iff (X, \mathcal{W}) \in hBW$.*

Dowód. Implikacja „$\Leftarrow$" jest zawsze spełniona w sposób oczywisty, więc będziemy dowodzić jedynię implikację „$\Rightarrow$". Weźmy dowolny $A \notin \mathcal{W}$. Niech $x_n \in X$ dla $n \in A$. Odpowiednio obcinając zbiór A, możemy założyć, że $A =$

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$, gdzie każdy C_n jest takim ciągiem arytmetycznym, że $2 \cdot \max C_n < \min C_{n+1}$ i $|C_{n+1}| > (\max C_n)^2$.

Niech $h : \mathbb{N} \to A$ będzie rosnącym ponumerowaniem elementów zbioru A. Skoro $(X, \mathcal{W}) \in \mathrm{BW}$, musi istnieć $B \notin \mathcal{W}$, taki że $(x_{h(n)})_{n\in B}$ jest $\mathcal{W}$-zbieżny do pewnego $x \in X$.

Pokażemy, że $(x_n)_{n\in h[B]}$ jest $\mathcal{W}$-zbieżny do x, a $h[B] \notin \mathcal{W}$.

Na początek zauważmy, że dla każdego C_n i ciągu arytmetycznego $C \subseteq B$, $h[C] \cap C_n$ także jest ciągiem arytmetycznym, natomiast dla dowolnego ciągu arytmetycznego $D \subseteq C_n$, $h^{-1}[D]$ również jest ciągiem arytmetycznym.

Następnie dokonajmy spostrzeżenia, że dla każdego ciągu arytmetycznego $D = \{a_1, a_1+d, \ldots, a_1+(m-1)d\} \subseteq A$ o długości m, co najmniej $m-1$ jego elementów należy do pewnego C_N. Rzeczywiście, przypuśćmy że $\max D \in C_N$, $a_1 + ld \in C_N$ dla pewnego dodatniego $l \leqslant (m-1)$ i $a_1 + (l-1)d \in C_n$ dla pewnego $n < N$. Wówczas $a_1+(l-2)d$ byłby poniżej 0, gdyż w takim wypadku $d > \max C_n$, ponieważ $2 \max C_n < \min C_{n+1}$.

Teraz udowodnimy, że $(x_n)_{n\in h[B]}$ jest $\mathcal{W}$-zbieżny do x. Przypuśćmy, że istnieje otwarte otoczenie $U \subseteq X$ punktu x, takie że $A' = \{i \in h[B] : x_i \notin U\} \notin \mathcal{W}$. Pokażemy, że wówczas $\{n \in B : x_{h(n)} \notin U\}$ zawiera dowolnie długie ciągi arytmetyczne, co jest sprzeczne z tym, że $(x_{h(n)})_{n\in B}$ jest $\mathcal{W}$-zbieżny do x. Ustalmy $m \in \mathbb{N}$ oraz niech $D \subseteq A'$ będzie ciągiem arytmetycznym o długości m. Wtedy istnieje N, taki że $A' \cap C_N$ jest ciągiem arytmetycznym o długości co najmniej $m-1$. Wobec tego $h^{-1}[A' \cap C_N]$ także jest ciągiem arytmetycznym o długości co najmniej $m-1$ oraz $h^{-1}[A' \cap C_N] \subseteq \{n \in B : x_{h(n)} \notin U\}$.

Na koniec pokażemy, że $h[B] \notin \mathcal{W}$. Przeprowadzone rozumowanie będzie identyczne z pokazanym przez Kojmana w dowodzie twierdzenia 2.1.4. Zamieszczamy je w tej pracy w celu zapewnienia kompletności opisywanego dowodu.

Ustalmy $k \geqslant 2$ i niech $C = \{a_1, a_1+d, \ldots, a_1+(k-1)d\} \subseteq B$ będzie ciągiem arytmetycznym o długości k, takim że $k < a_1$. Niech N będzie taki, że $h(a_1+d) \in C_N$. Jasne jest, że k, a_1 i d są nie większe niż $\max C_N$, więc $a_1 + (k-1)d \leqslant \max C_N + (\max C_N - 1)(\max C_N) = (\max C_N)^2 \leqslant |C_{N+1}| \leqslant \max C_{N+1}$. Ponieważ h jest rosnącym ponumerowaniem elementów zbioru $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$, dostajemy $h(a_1 + (k-1)d) \in C_N \cup C_{N+1}$, a zatem $h[C \setminus \{a_1\}] \subseteq C_N \cup C_{N+1}$. Wobec tego $h[C] \cap C_N$ lub $h[C] \cap C_{N+1}$ jest ciągiem arytmetycznym o długości nie mniejszej niż $(k-1)/2$. □

Ideał Hindmana

Definicja 2.1.6. Dla dowolnego zbioru $A \subseteq \mathbb{N}$ wprowadźmy oznaczenie

$$\mathrm{FS}(A) = \left\{ \sum_{n\in F} n : F \subseteq A \text{ jest niepusty i skończony} \right\},$$

czyli $\mathrm{FS}(A)$ jest zbiorem wszystkich skończonych sum niepowtarzających się elementów z A. Zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$ nazywamy *IP-zbiorem* jeśli istnieje taki nieskończony zbiór $D \subseteq A$, że $\mathrm{FS}(D) \subseteq A$. Na podstawie twierdzenia Hindmana (por. [31]), rodzina

$$\mathcal{H} = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ nie jest IP-zbiorem}\}$$

jest ideałem, który nazywamy *ideałem Hindmana.*

IP-zbiorami oraz ideałem Hindmana w kontekście zbieżności ciągów zajmowali się między innymi Filipów, Kojman i Shelah (por. [19], [39] i [37]). W [37] Kojman wykazał poniższą własność tego ideału.

Twierdzenie 2.1.7 ([37, Twierdzenie 3])**.** *Dla każdej przestrzeni Hausdorffa X, $(X, \mathcal{H}) \in FinBW \iff (X, \mathcal{H}) \in hFinBW \iff X$ jest skończony.*

Tak samo jak w przypadku ideału van der Waerdena, udowodnimy analogiczny wynik dla zbieżności ideałowej. W tym celu skorzystamy z kilku pomocniczych pojęć i lematów.

Definicja 2.1.8. Nieskończony zbiór $D \subseteq \mathbb{N}$ nazywamy *rzadkim* jeśli dla każdego $x \in \mathrm{FS}(D)$ istnieje dokładnie jeden zbiór $F \subseteq D$, taki że $x = \sum_{n\in F} n$.

Nietrudno pokazać, że dla dowolnego nieskończonego zbioru D można znaleźć nieskończony rzadki zbiór $E \subseteq D$.

Jeśli $D = \{d_1, d_2, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}$ jest rzadki oraz $x \in \mathrm{FS}(D)$, to istnieje dokładnie jeden $F \subseteq \mathbb{N}$ dla którego $x = \sum_{i\in F} d_i$. Oznaczmy ten F poprzez $\alpha_D(x)$.

Definicja 2.1.9. Niech D będzie rzadkim zbiorem. Zbiór $D_1 \subseteq \mathrm{FS}(D)$ nazywamy *normalnym w* $\mathrm{FS}(D)$ jeśli dla wszystkich $x, y \in D_1$, jeśli $x \neq y$, to $\alpha_D(x) \cap \alpha_D(y) = \emptyset$.

Zauważmy, że jak D_1 jest normalny w $\mathrm{FS}(D)$, to $\mathrm{FS}(D_1) \subseteq \mathrm{FS}(D)$ ([37, Fakt 6]), więc ze względu na rzadkość D, również D_1 jest rzadki. Zatem powyższa definicja jest równoważna oryginalnej definicji Kojmana z [37], gdzie autor dodatkowo wymagał, żeby zbiór normalny był rzadki.

Lemat 2.1.10. *Jeśli $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ jest zbiorem rzadkim spełniającym $2\sum_{i\leqslant n} a_i < a_{n+1}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to dla każdego* $\mathrm{FS}(H) \subseteq \mathrm{FS}(A)$*, H jest normalny w* $\mathrm{FS}(A)$.

Dowód. Przypuśćmy, że H nie jest normalny w $\mathrm{FS}(A)$. Wówczas możemy znaleźć takie $h_1, h_2 \in H$, że $h_1 = a_k + \sum_{i\in\alpha_A(h_1)\setminus\{k\}} a_i$, $h_2 = a_k + \sum_{i\in\alpha_A(h_2)\setminus\{k\}} a_i$, dla pewnego $k \in \mathbb{N}$.

Niech $K = \max(\alpha_A(h_1) \cup \alpha_A(h_2))$. Ze względu na to, że $2\sum_{i\leqslant K} a_i < a_{K+1}$, otrzymujemy $h_1 + h_2 < a_{K+1}$. Mamy teraz dwa przypadki:

Przypadek 1.: Gdyby $K \in \alpha_A(h_1) \cap \alpha_A(h_2)$, to $a_{K+1} > h_1 + h_2 > \sum_{i\leqslant K} a_i$, sprzeczność z $h_1 + h_2 \in \mathrm{FS}(H) \subseteq \mathrm{FS}(A)$.

Przypadek 2.: Jeśli $K \notin \alpha_A(h_1) \cap \alpha_A(h_2)$, to $K \in \alpha_A(h_1 + h_2)$. Łatwo widać, że $h_1 + h_2 - a_K \in \mathrm{FS}(A)$. Powtórzmy powyższe rozumowanie dla $h_1 + h_2 - a_K$ oraz $K' = \max((\alpha_A(h_1) \cup \alpha_A(h_2)) \setminus \{K\})$. Skoro $k \in \alpha_A(h_1) \cap \alpha_A(h_2)$, po co najwyżej $K - k$ krokach otrzymamy przypadek 1, co prowadzi nas do sprzeczności. □

Lemat 2.1.11 ([37, Lemat 7]). *Niech $E = \{2^n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Jeśli B jest rzadki, to istnieje $B_1 \subseteq \mathrm{FS}(B)$, który jest normalny zarówno w $\mathrm{FS}(E)$, jak i $\mathrm{FS}(B)$ (zatem $\mathrm{FS}(B_1) \subseteq \mathrm{FS}(B)$).*

Zauważmy, że Kojman oryginalnie zdefiniował zbiór E z powyższego lematu jako $\{2^n : n \in \mathbb{N}\}$, ale wtedy $\mathrm{FS}(E)$ jest równy zbiorowi liczb parzystych, a w pracy [37] autor napisał, że $\mathrm{FS}(E) = \mathbb{N}$. Lemat jest prawdziwy w obu przypadkach, więc prawdopodobnie już w oryginalnej pracy zbiór E powinien być jak zdefiniowany w powyższym lemacie.

Twierdzenie 2.1.12. *Dla każdej przestrzeni Hausdorffa X, $(X, \mathcal{H}) \in BW \iff (X, \mathcal{H}) \in hBW$.*

Dowód. Implikacja„$\Leftarrow$" jest zawsze spełniona w sposób oczywisty, więc będziemy dowodzić jedynię implikację „$\Rightarrow$". Weźmy dowolny $A' \notin \mathcal{H}$. Niech $x_n \in X$ dla $n \in A'$. Odpowiednio obcinając zbiór A', możemy założyć, że $A' = \mathrm{FS}(A)$, gdzie $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ jest takim zbiorem, że $2\sum_{i \leqslant n} a_i < a_{n+1}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Niech $E = \{2^n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Zauważmy, że E jest rzadki i $\mathrm{FS}(E) = \mathbb{N}$. Zdefiniujmy $g : \mathbb{N} \to \mathrm{FS}(A)$ jako

$$g(n) = g\left(\sum_{i \in \alpha_E(n)} 2^i\right) = \sum_{i \in \alpha_E(n)} a_i,$$

czyli jako rosnące ponumerowanie elementów zbioru $\mathrm{FS}(A)$. Zdefiniujmy ciąg $y_n = x_{g(n)}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ $(X, \mathcal{H}) \in \mathrm{BW}$, istnieją nieskończony $B \subseteq \mathbb{N}$ oraz $y \in X$, takie że $(y_n)_{n \in \mathrm{FS}(B)}$ jest $\mathcal{H}$-zbieżny do y. Bez zmiany ogólności, możemy założyć, że B jest rzadki, a dzięki lematowi 2.1.11, że jest także normalny w $\mathrm{FS}(E)$

Niech $C = g[B]$. Ponieważ B jest normalny w $\mathrm{FS}(E)$, C jest normalny w $\mathrm{FS}(A)$, gdyż $\alpha_E(n) = \alpha_A(g(n))$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Stąd, $\mathrm{FS}(C) \subseteq \mathrm{FS}(A)$. Żeby zakończyć dowód, pokażemy, że $(x_n)_{n \in \mathrm{FS}(C)}$ jest $\mathcal{H}$-zbieżny do y. Najpierw jednak udowodnimy dwa stwierdzenia.

Stwierdzenie. $g\,[\mathrm{FS}(B)] = \mathrm{FS}(g[B])$.

Dowód stwierdzenia. Weźmy $b_i \in B$ dla $i = 1, \ldots, n$. Ponieważ B jest normalny w $\mathrm{FS}(E)$, dla $i \neq j$ mamy $\alpha_E(b_i) \cap \alpha_E(b_j) = \emptyset$. Ponieważ E jest rzadki, $\alpha_E\left(\sum_{i=1}^n b_i\right) = \bigcup_{i=1}^n \alpha_E(b_i)$.

Wreszcie,

$$g\left(\sum_{i=1}^n b_i\right) = g\left(\sum_{j \in \alpha_E\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)} 2^j\right) = \sum_{j \in \alpha_E\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)} a_j =$$

$$\sum_{j \in \bigcup_{i=1}^n \alpha_E(b_i)} a_j = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j \in \alpha_E(b_i)} a_j\right) = \sum_{i=1}^n g(b_i).$$

□

Stwierdzenie. *Jeśli* $D \subseteq \mathrm{FS}(B)$, $D \in \mathcal{H}$, *to* $g[D] \in \mathcal{H}$.

Dowód stwierdzenia. Przypuśćmy, że $g[D] \notin \mathcal{H}$. Niech $G \subseteq \mathbb{N}$ będzie takim nieskończonym zbiorem, że $\mathrm{FS}(G) \subseteq g[D]$. Ponieważ $\mathrm{FS}(G) \subseteq \mathrm{FS}(A)$, w wyniku lematu 2.1.10 dostajemy, że G jest normalny w $\mathrm{FS}(A)$. Niech $D^{'} = g^{-1}[G]$. Funkcja g jest bijekcją, zatem $D^{'} \subseteq D$. Zakończymy dowód tego stwierdzenia poprzez pokazanie, że $\mathrm{FS}(D^{'}) \subseteq D$, co oczywiście stoi w sprzeczności z tym, że $D \in \mathcal{H}$. Po pierwsze, przypomnijmy, że $\alpha_A(g(n)) = \alpha_E(n)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Następnie weźmy $d_1, d_2 \in D^{'}$. Ponieważ G jest normalny w $\mathrm{FS}(A)$, wiemy, że $\alpha_A(g(d_1)) \cap \alpha_A(g(d_2)) = \emptyset$, co oznacza, że

$$g(d_1) + g(d_2) = \sum_{i \in \alpha_A(g(d_1))} a_i + \sum_{i \in \alpha_A(g(d_2))} a_i = \sum_{i \in \alpha_E(d_1)} a_i + \sum_{i \in \alpha_E(d_2)} a_i =$$

$$\sum_{i \in \alpha_E(d_1) \cup \alpha_E(d_2)} a_i = \sum_{i \in \alpha_E(d_1+d_2)} a_i = g\left(d_1 + d_2\right).$$

Wynika stąd, że $g(d_1 + d_2) \in \mathrm{FS}(G) \subseteq g[D]$, więc $d_1 + d_2 \in D$. W ten sam sposób można łatwo pokazać, że $d_1 + \ldots + d_n \in D$ dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$, $d_1 \ldots, d_n \in D'$. □

Teraz możemy pokazać, że $(x_n)_{n \in \mathrm{FS}(C)}$ jest $\mathcal{H}$-zbieżny do y. Niech $U \subseteq X$ będzie otwartym otoczeniem y. Ponieważ $\{n \in \mathrm{FS}(B) : y_n \notin U\} \in \mathcal{H}$, mamy $g[\{n \in \mathrm{FS}(B) : y_n \notin U\}] \in \mathcal{H}$. Z drugiej strony, $g[\{n \in \mathrm{FS}(B) : y_n \notin U\}] = \{g(n) \in g\left[\mathrm{FS}(B)\right] : x_{g(n)} \notin U\} = \{k \in \mathrm{FS}(g[B]) : x_k \notin U\} = \{k \in \mathrm{FS}(C) : x_k \notin U\}$. □

2.2 Ideały jednorodne

W poniższym podrozdziale wprowadzimy główne pojęcie tego rozdziału, czyli rodzinę jednorodności ideału. Korzystamy z niej w celu uogólnienia wyników z poprzedniego podrozdziału oraz wykazania jednorodności ideałów Hindmana i van der Waerdena. Przedstawimy tutaj też kilka przykładów ideałów jednorodnych. Definicja rodziny jednorodności ideału oraz większość następujących po niej wyników pochodzi z naszej wspólnej pracy z Kwelą [43].

Pojęcie ideałów jednorodnych jest dualne do pojęcia jednorodnych filtrów, wprowadzonych przez Fremlina w [22], gdzie pokazał on, że niegłówne ultrafiltry są jednorodne. Jednorodność ideałów jest przydatnym narzędziem do badania struktury ideałów. Może być także wykorzystana w kontekście porządku Katětova, który jest dogłębnie badanym zagadnieniem w ostatnich latach (por. [7], [9], [32], [33], [51]). Pokażemy to w dalszej części podrozdziału poprzez udzielenie odpowiedzi na pytania Hrušáka i Meza-Alcántary pochodzące z [33] i [51].

Definicja 2.2.1. Mówimy, że ideały $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ i $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ są *izomorficzne* jeśli istnieje bijekcja $f : X \to Y$ spełniająca

$$A \in \mathcal{I} \iff f[A] \in \mathcal{J}$$

dla każdego $A \subseteq X$. Będziemy to oznaczać przez $\mathcal{I} \cong \mathcal{J}$.

Definicja 2.2.2. Niech $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ i $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ będą ideałami. Mówimy, że *$\mathcal{I}$ zawiera izomorficzną kopię $\mathcal{J}$* jeśli istnieje bijekcja $f : X \to Y$, taka że

$$A \in \mathcal{J} \Rightarrow f^{-1}[A] \in \mathcal{I}$$

dla każdego $A \subseteq Y$. Będziemy to oznaczać przez $\mathcal{J} \sqsubseteq \mathcal{I}$.

Definicja 2.2.3. Niech $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ i $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ będą ideałami. Mówimy, że *ideał $\mathcal{J}$ jest poniżej ideału $\mathcal{I}$ w porządku Katětova* jeśli istnieje taka funkcja $f : X \to Y$, że

$$A \in \mathcal{J} \Rightarrow f^{-1}[A] \in \mathcal{I}$$

dla każdego $A \subseteq Y$. Będziemy to oznaczać przez $\mathcal{J} \leqslant_K \mathcal{I}$.

Wyniki otrzymane w poprzednim podrozdziale dla ideałów van der Waerdena i Hindmana można uogólnić w następujący sposób.

Twierdzenie 2.2.4. *Jeśli dla każdego $A \notin \mathcal{I}$ istnieje taki $B \subseteq A$, że $B \notin \mathcal{I}$ oraz $\mathcal{I}|B \cong \mathcal{I}$, to dla każdej przestrzeni Hausdorffa X, $(X, \mathcal{I}) \in BW \iff (X, \mathcal{I}) \in hBW$.*

Dowód. Implikacja „$\Leftarrow$" jest zawsze spełniona w sposób oczywisty, więc będziemy dowodzić jedynię implikację „$\Rightarrow$". Weźmy dowolny $A \notin \mathcal{I}$. Niech $x_n \in X$ dla $n \in A$. Odpowiednio obcinając zbiór A, możemy założyć, że $\mathcal{I}|A \cong \mathcal{I}$.

Niech $f : \mathbb{N} \to A$ będzie izomorfizmem między $\mathcal{I}|A$ a $\mathcal{I}$. Ponieważ $(X, \mathcal{I}) \in$ BW, możemy znaleźć taki $B \notin \mathcal{I}$, że $(x_{f(n)})_{n \in B}$ jest $\mathcal{I}$-zbieżny do pewnego $x \in X$.

Skoro f jest izomorfizmem, $C = f[B] \notin \mathcal{I}$. Ponadto, dla każdego otwartego otoczenia U punktu x mamy $D = \{n \in B : x_{f(n)} \notin U\} \in \mathcal{I}$. Wtedy $f[D] = \{n \in C : x_n \notin U\} \in \mathcal{I}$. Zatem $(x_n)_{n \in C}$ jest $\mathcal{I}$-zbieżny do $x \in X$. $\square$

Twierdzenie 2.2.5. *Jeśli dla każdego $A \notin \mathcal{I}$ mamy $\mathcal{I}|A \leqslant_K \mathcal{I}$, to dla każdej przestrzeni Hausdorffa X, $(X, \mathcal{I}) \in FinBW \iff (X, \mathcal{I}) \in hFinBW$.*

Dowód. Implikacja „$\Leftarrow$" jest zawsze spełniona w sposób oczywisty, więc będziemy dowodzić jedynię implikację „$\Rightarrow$". Weźmy $A \notin \mathcal{I}$. Niech $x_n \in X$ dla $n \in A$. Wówczas $\mathcal{I}|A \leqslant_K \mathcal{I}$.

Niech $f : \mathbb{N} \to A$ będzie taką funkcją, że $f^{-1}[B] \in \mathcal{I}$ dla wszystkich $B \in \mathcal{I}|A$. Wynika stąd, że $f[B] \notin \mathcal{I}|A$ dla $B \notin \mathcal{I}$.

Ponieważ $(X, \mathcal{I}) \in$ FinBW, znajdziemy zbiór $B \notin \mathcal{I}$, taki że $(x_{f(n)})_{n \in B}$ jest zbieżny do pewnego $x \in X$. Łatwo widać, że $f[B] \notin \mathcal{I}$ i $f[B] \subseteq A$. W takim razie, żeby zakończyć dowód, wystarczy pokazać, że $(x_n)_{n \in f[B]}$ jest zbieżny do x.

Wiemy, że dla każdego otwartego otoczenia U punktu x, zbiór $D = \{n \in B : x_{f(n)} \notin U\}$ jest skończony. Ponieważ dla każdej funkcji obraz zbioru skończonego jest skończony, $f[D] = \{n \in f[B] : x_n \notin U\}$ także jest skończony. $\square$

Definicja 2.2.6. Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem na $\mathbb{N}$. Wówczas rodzinę

$$H(\mathcal{I}) = \{A \subseteq \mathbb{N} : \mathcal{I}|A \cong \mathcal{I}\}$$

nazywamy *rodziną jednorodności ideału* $\mathcal{I}$.

Na potrzeby tego rozdziału, ideał będzie nazywany *odpowiednim* jeśli nie będzie izomorficzny z

$$\mathrm{Fin} \oplus \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{A \subseteq \{0,1\} \times \mathbb{N} : \{n \in \mathbb{N} : (0,n) \in A\} \in \mathrm{Fin}\}.$$

Twierdzenie 2.2.7.

1. *$H(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{I}^+$ dla każdego ideału $\mathcal{I}$.*

2. *$H(\mathcal{I}) \supseteq \mathcal{I}^*$ dla każdego ideału odpowiedniego $\mathcal{I}$.*

Dowód. Żeby udowodnić pierwszy punkt, weźmy dowolny ideał $\mathcal{I}$ oraz zbiór $A \in \mathcal{I}$. Wówczas $\mathcal{I}|A = \mathcal{P}(A)$, więc $\mathcal{I}|A \ncong \mathcal{I}$.

Żeby udowodnić drugi punkt, weźmy ideał odpowiedni $\mathcal{I}$ oraz zbiór $A \in \mathcal{I}^*$. Jeśli $\mathcal{I} \cong \mathrm{Fin}$, to jasne jest, że $\mathcal{I}|A \cong \mathcal{I}$. Załóżmy więc, że $\mathcal{I} \ncong \mathrm{Fin}$. Znajdziemy wtedy nieskończony zbiór $B \subseteq A$, taki że $B \in \mathcal{I}$, gdyż $\mathcal{I}$ nie jest izomorficzny z $\mathrm{Fin} \oplus \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Niech $f : \mathbb{N} \to A$ będzie taką funkcją, że $f(x) = x$ dla każdego $x \in A \setminus B$, zaś $f \restriction (B \cup (\mathbb{N} \setminus A))$ będzie dowolną bijekcją pomiędzy $B \cup (\mathbb{N} \setminus A)$ a B. Wówczas f jest izomorfizmem między $\mathcal{I}|A$ a $\mathcal{I}$. $\square$

Powyższe twierdzenie skłania do wyróżnienia dwóch klas ideałów ze względu na ich rodziny jednorodności. Pozostałe pojęcia z poniższej definicji pochodzą z podrozdziału 2.1.2 pracy Meza-Alcántary [51], gdzie pojawia się także definicja ideałów jednorodnych.

Definicja 2.2.8. Mówimy, że ideał $\mathcal{I}$ jest:

- *jednorodny*, jeśli $H(\mathcal{I}) = \mathcal{I}^+$;
- *antyjednorodny*, jeśli $H(\mathcal{I}) = \mathcal{I}^*$;
- *słabo jednorodny*, jeśli dla każdego $A \in \mathcal{I}^+$ istnieje taki $B \subseteq A$, że $B \in H(\mathcal{I})$.
- *K-jednorodny*, jeśli $\mathcal{I}|A \leqslant_K \mathcal{I}$ dla każdego $A \notin \mathcal{I}$

Twierdzenia 2.2.4 i 2.2.5 można więc przeformułować w następujący sposób.

Twierdzenie 2.2.9. *Jeśli $\mathcal{I}$ jest ideałem słabo jednorodnym, to dla każdej przestrzeni Hausdorffa X, $(X, \mathcal{I}) \in BW \iff (X, \mathcal{I}) \in hBW$.*

Twierdzenie 2.2.10. *Jeśli $\mathcal{I}$ jest ideałem K-jednorodnym, to dla każdej przestrzeni Hausdorffa X, $(X, \mathcal{I}) \in FinBW \iff (X, \mathcal{I}) \in hFinBW$.*

Możemy także zauważyć, że dowody twierdzeń 2.1.5 i 2.1.12 w rzeczywistości pokazują, że ideały van der Waerdena $\mathcal{W}$ i Hindmana $\mathcal{H}$ są ideałami słabo jednorodnymi. Jedną z inspiracji do naszych rozważań nad jednorodnością ideałów było pytanie, czy ideały van der Waerdena i Hindmana są ideałami jednorodnymi. Badania nad tym zagadnieniem doprowadziły do jednego z głównych wyników naszej pracy [43].

Twierdzenie 2.2.11. *Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem. Wówczas jego rodzina jednorodności $H(\mathcal{I})$ jest zamknięta na nadzbiory, czyli jak $A \in H(\mathcal{I})$ oraz $A \subseteq B$, to $B \in H(\mathcal{I})$.*

Dowód. Weźmy dowolny $A \in H(\mathcal{I})$ oraz $A \subseteq B$. Istnieje wtedy bijekcja $f : \mathbb{N} \to A$, taka że $X \in \mathcal{I} \iff f[X] \in \mathcal{I}$ dla dowolnego $X \subseteq \mathbb{N}$. Wprowadźmy teraz zbiory

$$A' = \left\{a \in A : \exists_{n\in\mathbb{N}} \left(\forall_{k<n}\ f^{-k}(a) \in A\right) \ \wedge\ f^{-n}(a) \in B \setminus A\right\}$$

oraz $M = A' \cup (B \setminus A)$. Zdefiniujmy funkcję $\varphi : \mathbb{N} \to B$ wzorem:

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{gdy } x \in \mathbb{N} \setminus M, \\ x, & \text{gdy } x \in M. \end{cases}$$

Pokażemy, że φ jest bijekcją zapewniającą, że $\mathcal{I}|B \cong \mathcal{I}$.

Najpierw udowodnimy, że φ jest różnowartościowa. Weźmy $x, y \in \mathbb{N}$, $x \neq y$. Jeśli $x, y \in M$, to $\varphi(x) = x \neq y = \varphi(y)$. Jeśli $x, y \notin M$, to $\varphi(x) = f(x) \neq f(y) = \varphi(y)$, ponieważ f jest różnowartościowa. Pozostaje nam do rozpatrzenia przypadek, gdy $x \in M$ i $y \notin M$. Wtedy $\varphi(x) = x$ i $\varphi(y) = f(y)$. Przypuśćmy, że $f(y) = x$. Ponieważ $x \in M$, wiemy, że $x \in A'$ (przypadek $x \in B \setminus A$ nie może mieć miejsca, gdyż $f(y) \in f[\mathbb{N}] = A$). Zauważmy, że $f^{-1}(x) = y \notin B \setminus A$, gdyż $y \notin M$. Wobec tego, $y \in A$. Jednak wtedy $y \in A' \subseteq M$, sprzeczność z założeniem, że $y \notin M$.

Teraz udowodnimy, że φ jest na. Niech $y \in B$. Jeśli $y \in M$, to $\varphi(y) = y$, zatem y należy do zbioru wartości funkcji φ. Załóżmy więc, że $y \notin M$ i zauważmy, że $f^{-1}(y) \notin M$. Faktycznie, w przeciwnym wypadku mielibyśmy albo $f^{-1}(y) \in B \setminus A$, albo $f^{-1}(y) \in A'$. W obu przypadkach uzyskalibyśmy $y \in A'$, co przeczy temu, że $y \notin M$. Zatem $f^{-1}(y) \notin M$ i otrzymujemy $y = f(f^{-1}(y)) = \varphi(f^{-1}(y))$.

Na koniec pokażemy, że φ świadczy o tym, że $\mathcal{I}|B \cong \mathcal{I}$. Weźmy dowolny $X \in \mathcal{I}$. Ponieważ f świadczy o tym, że $\mathcal{I}|A \cong \mathcal{I}$, otrzymujemy

$$\varphi[X] = \varphi[X \cap M] \cup \varphi[X \setminus M] = (X \cap M) \cup f[X \setminus M] \in \mathcal{I},$$

$$\varphi^{-1}[X] = \varphi^{-1}[X \cap M] \cup \varphi^{-1}[X \setminus M] = (X \cap M) \cup f^{-1}[X \setminus M] \in \mathcal{I},$$

co kończy dowód. □

Pierwszy wniosek z powyższego twierdzenia będzie pomocny w znajdowaniu przykładów ideałów jednorodnych.

Wniosek 2.2.12. *Jeśli $\mathcal{I}$ jest ideałem słabo jednorodnym, to jest on ideałem jednorodnym.*

Drugi wniosek z powyższego twierdzenia jest zarazem odpowiedzią na pytanie zadane przez Meza-Alcántarę w jego rozprawie doktorskiej napisanej pod kierunkiem Hrušáka (pytanie 2.1.10 z [51]). Meza-Alcántara pokazał w niej, że ideały maksymalne oraz ideał $\mathcal{I}_d$ są K-jednorodne oraz wykorzystał to pojęcie w badaniach nad własnością Fubiniego ideałów, ale nie wiedział, czy ideały słabo jednorodne są K-jednorodne.

Wniosek 2.2.13. *Jeśli $\mathcal{I}$ jest ideałem słabo jednorodnym, to jest on ideałem K-jednorodnym.*

Podamy teraz kilka przykładów ideałów jednorodnych oraz antyjednorodnych.

Przykład 2.2.14. *Ideał* Fin *jest najprostszym przykładem ideału jednorodnego.*

Przykład 2.2.15. *Maksymalne ideały są jedynymi ideałami będącymi jednocześnie jednorodnymi i antyjednorodnymi.*

Przykład 2.2.16. *Na podstawie dowodów twierdzeń 2.1.5, 2.1.12 oraz 2.2.11 łatwo wywnioskować, że ideały van der Waerdena $\mathcal{W}$ i Hindmana $\mathcal{H}$ są ideałami jednorodnymi.*

Na mocy powyższych rezultatów, otrzymujemy pozytywną odpowiedź na pytanie 6.11 z pracy Hrušáka [33], gdzie autor zadaje pytanie o istnienie K-jednorodnych gęstych ideałów F_σ.

Wniosek 2.2.17. *Istnieje K-jednorodny gęsty ideał F_σ.*

Dowód. Ideał van der Waerdena $\mathcal{W}$ jest gęstym ideałem F_σ, który na mocy powyższych wyników jest jednorodny, zatem jest on także K-jednorodny. $\square$

Przykład 2.2.18. *Niech $D = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : i \geqslant j\}$ oraz*

$$\mathcal{ED}_{fin} = \{A \subseteq D : \exists_{m\in\mathbb{N}} \forall_{k\in\mathbb{N}} |A \cap (\{k\} \times \mathbb{N})| \leqslant m\}$$

(por. [51], gdzie Meza-Alcántara pokazał między innymi, że jest to ideał krytyczny dla Q-ideałów względem porządku Katětova-Blassa). Wówczas $\mathcal{ED}_{fin}$ jest ideałem jednorodnym.

Dowód. Ustalmy dowolny $A \notin \mathcal{ED}_{fin}$ i dla każdego $n \in \mathbb{N}$ wybierzmy $k_n \in \mathbb{N}$ oraz $a_1^n, \ldots, a_n^n \in A \cap (\{k_n\} \times \mathbb{N})$. Bez zmiany ogólności możemy założyć, że ciąg $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest rosnący. Niech $A' = \{a_m^n : n \in \mathbb{N}, m \leqslant n\}$. Wtedy bijekcja $f : D \to A'$ dana przez $f(n,m) = a_m^n$ świadczy o tym, że $\mathcal{ED}_{fin} \cong \mathcal{ED}_{fin}|A'$, więc $\mathcal{ED}_{fin}$ jest słabo jednorodny. Z wniosku 2.2.12 wynika, że ideał $\mathcal{ED}_{fin}$ jest jednorodny. $\square$

Twierdzenie 2.2.19. *Istnieje antyjednorodny ideał Erdősa-Ulama.*

Dowód. Niech $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie rodziną rozłącznych, następujących po sobie przedziałów długości $n!$. Niech $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie rodziną miar na $\mathbb{N}$ daną przez:

$$\varphi_n(\{k\}) = \begin{cases} \frac{1}{n!}, & \text{jeśli } k \in I_n, \\ 0, & \text{jeśli } k \in \mathbb{N} \setminus I_n. \end{cases}$$

Rozważmy $\mathcal{I} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \lim_{n\to\infty} \varphi_n(A) = 0\}$. Jest to ideał gęstościowy, a na podstawie twierdzenia 1.3.5 jest to także ideał Erdősa-Ulama. Pokażemy, że $\mathcal{I}$ jest antyjednorodny.

Weźmy dowolny $B \notin \mathcal{I} \cup \mathcal{I}^*$. Wtedy istnieje $M \in \mathbb{N}$ oraz pewien nieskończony zbiór $T \subseteq \mathbb{N} \setminus \{1, 2, \ldots, M\}$, taki że $\varphi_n(B) \geqslant \frac{1}{M}$ dla każdego $n \in T$. Dla każdego $n \in T$ wybierzmy $A_n \subseteq I_n \cap B$ spełniający $|A_n| = \frac{n!}{M}$. Pokażemy, że $A = \mathbb{N} \setminus \bigcup_{n\in T} A_n$ nie należy do $H(\mathcal{I})$. Wówczas z twierdzenia 2.2.11 będzie wynikało, że $\mathbb{N} \setminus B \notin H(\mathcal{I})$.

Załóżmy, że $A \in H(\mathcal{I})$, a $f : \mathbb{N} \to A$ jest bijekcją świadczącą o tym. Wprowadźmy oznaczenia:

$$\begin{aligned} \mathbb{N}^+ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in I_n : f(x) > \max I_n\}, \\ \mathbb{N}^- &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in I_n : f(x) < \min I_n\}, \\ \mathbb{N}^= &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in I_n : f(x) \in I_n\}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że $\varphi_n(\mathbb{N}^-) = \varphi_n(\mathbb{N}^- \cap I_n) < \frac{2}{n}$ dla każdego n. Zatem $\mathbb{N}^- \in \mathcal{I}$. Zwróćmy także uwagę na to, że $\varphi_n(\mathbb{N}^=) \leqslant \varphi_n(A)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, natomiast $A \notin \mathcal{I}^*$. Wobec tego, $\mathbb{N}^+ \notin \mathcal{I}$.

Z drugiej strony,

$$\varphi_n\left(f\left[\mathbb{N}^+\right]\right) = \varphi_n\left(f\left[\bigcup_{k<n} I_k \cap \mathbb{N}^+\right]\right) < \frac{2}{n}$$

dla każdego n. Stąd $f[\mathbb{N}^+] \in \mathcal{I}$, co jest sprzeczne z faktem, że f jest izomorfizmem zapewniającym, że $A \in H(\mathcal{I})$. Zatem $A \notin H(\mathcal{I})$. $\square$

Warto zwrócić uwagę na to, że powyższe twierdzenie przypomina wyniki przedstawione przez Olivera w [52], gdzie autor wykorzystał opisany wyżej ideał w celu konstrukcji $\mathfrak{c}$ parami nieizomorficznych algebr Boole'a postaci $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\mathcal{I}$.

Twierdzenie 2.2.20. *Jeśli ideały $\mathcal{I}$ oraz $\mathcal{J}$ są jednorodne, to $\mathcal{I} \otimes \mathcal{J} = \{A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \{x \in X : A_x \notin \mathcal{I}\} \in \mathcal{J}\}$ także jest ideałem jednorodnym.*

Dowód. Weźmy dowolny $A \notin \mathcal{I} \otimes \mathcal{J}$. Wtedy $B = \{n \in \mathbb{N} : A_n \notin \mathcal{J}\}$ nie należy do $\mathcal{I}$. Zdefiniujmy

$$A' = \bigcup_{n\in B} \{n\} \times A_n \notin \mathcal{I} \otimes \mathcal{J}.$$

Z wniosku 2.2.12 wynika, że do zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że $A' \in H(\mathcal{I} \otimes \mathcal{J})$.

Dla każdego $n \in B$ istnieje bijekcja $f_n : A_n \to \mathbb{N}$, taka że $X \in \mathcal{J} \iff f_n^{-1}[X] \in \mathcal{J}|A_n$ dla wszystkich $X \subseteq \mathbb{N}$. Istnieje wtedy także bijekcja $g : B \to \mathbb{N}$, taka że $X \in I \iff g^{-1}[X] \in \mathcal{I}|B$ dla każdego $X \subseteq \mathbb{N}$. Weźmy funkcję $\varphi : A' \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ daną wzorem $\varphi((i,j)) = (g(i), f_i(j))$ dla wszystkich $(i,j) \in A'$. Wówczas φ jest bijekcją świadczącą o tym, że $\mathcal{I} \otimes \mathcal{J} \cong \mathcal{I} \otimes \mathcal{J}|A'$. $\square$

2.3 Funkcje ideałowo niezmiennicze

Dalsze części tego rozdziału będą poświęcone na udzielenie odpowiedzi na pytania zadane przez Balcerzaka, Głąba i Swaczynę w [6], które dotyczą wprowadzonych w ich pracy funkcji ideałowo niezmienniczych. W tym celu wykorzystamy opisane w poprzednim podrozdziale rodziny jednorodności ideałów.

Definicja 2.3.1. Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem na $\mathbb{N}$, zaś $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ niech będzie injekcją. Mówimy, że f jest:

- *$\mathcal{I}$-niezmiennicza*, jeśli $f[A] \in \mathcal{I}$ dla każdego $A \in \mathcal{I}$;
- *bi-$\mathcal{I}$-niezmiennicza*, jeśli $f[A] \in \mathcal{I} \iff A \in \mathcal{I}$ dla każdego $A \subseteq \mathbb{N}$.

Autorzy [6] opisują klasy funkcji $\mathcal{I}$-niezmienniczych dla kilku ideałów oraz badają topologiczne własności zbioru takich funkcji. Istnieje oczywiste powiązanie pomiędzy rodzinami jednorodności a funkcjami ideałowo niezmienniczymi.

Uwaga. *Jeśli $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest bi-$\mathcal{I}$-niezmiennicza, to $f[\mathbb{N}] \in H(\mathcal{I})$. Z drugiej strony, jak $A \in H(\mathcal{I})$, to znajdziemy taką funkcję bi-$\mathcal{I}$-niezmienniczą $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że $f[\mathbb{N}] = A$.*

Ideały maksymalne

W tej części pracy udzielimy odpowiedzi na pytanie 1 z [6].

Łatwo zauważyć, że dla dowolnego ideału $\mathcal{I}$ oraz injekcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, jeżeli $\mathrm{Fix}(f) = \{n \in \mathbb{N} : f(n) = n\} \in \mathcal{I}^*$, to f jest bi-$\mathcal{I}$-niezmiennicza. Powiemy, że ideał $\mathcal{I}$ na $\mathbb{N}$ spełnia warunek $(C1)$, jeśli powyższą implikację da się odwrócić, to znaczy dla każdej bi-$\mathcal{I}$-niezmienniczej injekcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ otrzymamy $\mathrm{Fix}(f) \in \mathcal{I}^*$. Najpierw odpowiemy na pierwszą część pytania 1 z [6] dotyczącą charakteryzacji ideałów spełniających warunek $(C1)$.

Twierdzenie 2.3.2. *Następujące warunki są równoważne dla każdego ideału $\mathcal{I}$ na $\mathbb{N}$:*

1. *$\mathcal{I}$ nie spełnia warunku $(C1)$;*
2. *istnieją $A, B \subseteq \mathbb{N}$, takie że $A \triangle B \notin \mathcal{I}$ oraz $\mathcal{I}|A \cong \mathcal{I}|B$.*

Dowód. **1 ⇒ 2:** Z założenia istnieje bi-$\mathcal{I}$-niezmiennicza injekcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, taka że $\mathrm{Fix}(f) \notin \mathcal{I}^*$. Wiemy, że $f[\mathbb{N}] \notin \mathcal{I}$, gdyż w przeciwnym wypadku mielibyśmy $\mathbb{N} = f^{-1}[f[\mathbb{N}]] \in \mathcal{I}$, więc otrzymalibyśmy sprzeczność. Najpierw zajmiemy się przypadkiem, gdy $f[\mathbb{N}] \notin \mathcal{I}^*$. Weźmy wtedy $A = \mathbb{N}$ i $B = f[\mathbb{N}]$. Wówczas $A \triangle B \notin \mathcal{I}$, a f jest izomorfizmem między $\mathcal{I}|A = \mathcal{I}$ a $\mathcal{I}|B$, ponieważ f jest bi-$\mathcal{I}$-niezmiennicza.

Załóżmy teraz, że $f[\mathbb{N}] \in \mathcal{I}^*$. Wybierzemy indukcyjnie punkty a_n i b_n dla $n \in \mathbb{N}$. Zaczniemy od $a_1 = \min(\mathbb{N} \setminus \mathrm{Fix}(f))$ i $b_1 = f(a_1)$. Jak zdefiniowaliśmy już a_k oraz b_k dla $k < n$, weźmy

$$a_n = \min\big(\mathbb{N} \setminus (\mathrm{Fix}(f) \cup \{a_k : k < n\} \cup \{b_k : k < n\} \cup f^{-1}[\{a_k : k < n\}])\big)$$

oraz $b_n = f(a_n)$. Zdefiniujmy zbiory $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ i $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. Wówczas $A \cap B = \emptyset$. Ponadto, $A \triangle B \notin \mathcal{I}$. Rzeczywiście, gdyby $A \triangle B \in \mathcal{I}$, to otrzymalibyśmy $f^{-1}[A] \in \mathcal{I}$, co stałoby w sprzeczności z faktem, że $A \cup B \cup f^{-1}[A] = \mathbb{N} \setminus \mathrm{Fix}(f) \notin \mathcal{I}$. Na koniec zauważmy, że $f \restriction A$ jest bijekcją pomiędzy A i B świadczącą o tym, że $\mathcal{I}|A \cong \mathcal{I}|B$.

2 ⇒ 1: Istnieje bijekcja $f : A \to B$ pokazująca, że $\mathcal{I}|A \cong \mathcal{I}|B$. Skoro $A \triangle B \notin \mathcal{I}$, $A \setminus B \notin \mathcal{I}$ lub $B \setminus A \notin \mathcal{I}$. Możemy założyć, że $A \setminus B \notin \mathcal{I}$ (drugi przypadek rozwiązuje się w sposób niemal identyczny).

Zdefiniujmy funkcję $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ przez

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{jeśli } x \in A \setminus B, \\ f^{-1}(x), & \text{jeśli } x \in f[A \setminus B], \\ x, & \text{jeśli } x \notin A \setminus B \cup f[A \setminus B]. \end{cases}$$

Wówczas g jest bi-$\mathcal{I}$-niezmienniczą injekcją, a $\mathbb{N} \setminus \mathrm{Fix}(g) \supseteq A \setminus B \notin \mathcal{I}$. □

Z poprzedniego twierdzenia łatwo wynika, że każdy ideał spełniający warunek $(C1)$ jest antyjednorodny. Z drugiej strony, jeśli $\mathcal{I}$ jest ideałem maksymalnym, to ideał $\mathcal{J} = \mathcal{I} \oplus \mathcal{I}$ jest antyjednorodny (gdyż $\mathcal{J} \ncong \mathcal{I}$), ale nie spełnia warunku $(C1)$ (ponieważ $\mathcal{J}|(\{0\} \times \mathbb{N}) \cong \mathcal{J}|(\{1\} \times \mathbb{N})$). Ideał zdefiniowany w twierdzeniu 2.2.19 jest kolejnym przykładem ideału antyjednorodnego niespełniającego warunku $(C1)$, ponieważ obcięcia tego ideału do zbiorów liczb parzystych i nieparzystych są ze sobą izomorficzne.

Pokażemy teraz kilka przykładów ideałów spełniających warunek $(C1)$. Następujące dwa przykłady pochodzą z [6], ale przedstawimy tu znacznie prostsze dowody spełniania przez te ideały warunku $(C1)$.

Przykład 2.3.3 (por. [6, Wniosek 9])**.** *Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem maksymalnym. Wówczas $\mathcal{I}$ spełnia warunek* $(C1)$.

Dowód. Jak $A \triangle B \notin \mathcal{I}$, to wtedy $A \in \mathcal{I}$ i $B \in \mathcal{I}^*$ lub $B \in \mathcal{I}$ i $A \in \mathcal{I}^*$. Jednak wtedy $\mathcal{I}|A$ i $\mathcal{I}|B$ nie mogą być ze sobą izomorficzne, gdyż jeden z tych ideałów jest izomorficzny z $\mathcal{I}$, natomiast drugi jest izomorficzny z $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. □

Przykład 2.3.4 (por. [6, Przykład 10])**.** *Niech $\mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$ będą dwoma nieizomorficznymi ideałami maksymalnymi. Wówczas ideał $\mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$ spełnia warunek* $(C1)$.

Dowód. Załóżmy, że $A \triangle B \notin \mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$ dla pewnych $A, B \subseteq \{0,1\} \times \mathbb{N}$. Bez zmiany ogólności możemy założyć, że $A \cap (\{0\} \times \mathbb{N}) \in \mathcal{I}$ i $A \cap (\{1\} \times \mathbb{N}) \notin \mathcal{J}$ oraz $B \cap (\{0\} \times \mathbb{N}) \notin \mathcal{I}$ i $B \cap (\{1\} \times \mathbb{N}) \in \mathcal{J}$. Wówczas otrzymujemy $(\mathcal{I} \oplus \mathcal{J})|A \cong \mathcal{J}$ oraz $(\mathcal{I} \oplus \mathcal{J})|B \cong \mathcal{I}$. Zatem $(\mathcal{I} \oplus \mathcal{J})|A \not\cong (\mathcal{I} \oplus \mathcal{J})|B$. □

Następny przykład pochodzi z naszej pracy z doktorem Kwelą [43] i jest on bardziej skomplikowany od poprzednich. Żeby go przedstawić, będziemy potrzebowali kilku dodatkowych definicji.

Definicja 2.3.5. Niech $\mathcal{J}$ będzie ideałem na $\mathbb{N}$, zaś $(\mathcal{J}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem ideałów na $\mathbb{N}$. Wówczas rodzina

$$\mathcal{J}\text{-}\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{J}_i = \{A \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \{n \in \mathbb{N} : A_n \notin \mathcal{J}_n\} \in \mathcal{J}\}$$

jest ideałem zwanym *sumą $\mathcal{J}$-Fubiniego ideałów* $(\mathcal{J}_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Przykład 2.3.6. *Niech $(\mathcal{J}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem parami nieizomorficznych ideałów maksymalnych na $\mathbb{N}$. Wtedy ideał $\mathcal{I} = \mathrm{Fin}\text{-}\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{J}_i$ spełnia warunek $(C1)$.*

Dowód. Przypuśćmy, że istnieją $A, B \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, takie że $A \triangle B \notin \mathcal{I}$ oraz $\mathcal{I}|A \cong \mathcal{I}|B$. Wówczas $A, B \notin \mathcal{I}$ (gdyby $A \in \mathcal{I}$, to $B \in \mathcal{I}$, gdyż $\mathcal{I}|A \cong \mathcal{I}|B$, sprzeczność z $A \triangle B \notin \mathcal{I}$). Wobec tego zbiór $R = \{n \in \mathbb{N} : A_n \in \mathcal{J}_n^*\}$ jest nieskończony. Ustalmy bijekcję $f : A \to B$ świadczącą o tym, że $\mathcal{I}|A \cong \mathcal{I}|B$. Wprowadźmy zbiory

$$S = \{n \in R : \exists_{k(n) \in \mathbb{N}} \left(f\left[\{n\} \times A_n\right]\right)_{k(n)} \in \mathcal{J}^*_{k(n)}\}$$

oraz $T = R \setminus S$. Zauważmy, że jeśli $n \neq m$ i $n, m \in S$, to $k(n) \neq k(m)$, ponieważ jak $k(n) = k(m)$ dla pewnych $n, m \in \mathbb{N}$, zarówno $\left(f\left[\{n\} \times A_n\right]\right)_{k(n)}$, jak i $\left(f\left[\{m\} \times A_m\right]\right)_{k(n)}$ należałyby do $\mathcal{J}^*_{k(n)}$, co jest sprzeczne z faktem, że te zbiory są rozłączne. Mamy teraz dwa przypadki.

Przypadek 1.: Jeśli $T \notin \mathrm{Fin}$, zbadamy zbiór $f\left[\bigcup_{i \in T}(\{i\} \times A_i)\right] \notin \mathcal{I}|B$. Niech L składa się z tych $l \in \mathbb{N}$, dla których istnieje nieskończenie wiele $j \in T$, takich że $f\left[\{j\} \times A_j\right]$ ma niepusty przekrój z $\{l\} \times \mathbb{N}$. Zauważmy, że $L \notin \mathrm{Fin}$ oraz $L \times \mathbb{N} \cap f\left[\bigcup_{i \in T}(\{i\} \times A_i)\right] \notin \mathcal{I}$.

Najpierw pokażemy, że zbiór T' składający się z tych $j \in T$, dla których istnieje pewien $l(j) \in L$, taki że $(f^{-1}[\{l(j)\} \times \mathbb{N} \cap B] \cap \{j\} \times A_j)_j \in J_j^*$, jest skończony. Załóżmy, że tak nie jest i rozważmy przypadek w którym istnieje pewien $l \in L$, taki że $l = l(j)$ dla nieskończenie wielu $j \in T'$. Wówczas $X = \{l\} \times \mathbb{N} \cap B \in \mathcal{I}|B$, ale $f^{-1}[X] \notin \mathcal{I}|A$, sprzeczność z założeniem, że f jest izomorfizmem. Z drugiej strony, gdyby nie było ani jednego takiego l, zbiór

$$X = \bigcup_{j \in T'} f^{-1}[\{l(j)\} \times \mathbb{N} \cap B] \cap \{j\} \times A_j$$

nie należałby do $\mathcal{I}|A$. Jednakże, $f[X] \in \mathcal{I}|B$, ponieważ

$$(f[X])_{l(j)} = \bigcup_{\{j' \in T' : l(j') = l(j)\}} (f[\{j'\} \times A_{j'}])_{l(j)} \in \mathcal{J}_{l(j)}$$

dla wszystkich $j \in T'$ (gdyż $j \in T$) oraz $(f[X])_i = \emptyset$ dla $i \notin \{l(j) : j \in T'\}$. Ponownie otrzymaliśmy sprzeczność z założeniem, że f jest izomorfizmem. Zatem T' jest skończony.

Niech $T \setminus T' = \{t_1, t_2, \ldots\}$ oraz $L = \{l_1, l_2, \ldots\}$. Rozważmy zbiór

$$X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (f[\{t_i\} \times A_{t_i}] \setminus (\{1, 2, \ldots, l_i\} \times \mathbb{N})) .$$

Wówczas $X \in \mathcal{I}|B$. Żeby otrzymać sprzeczność, pokażemy, że $f^{-1}[X] \notin \mathcal{I}|A$. Wynika to z faktu, że dla każdego $i \in \mathbb{N}$ mamy

$$f^{-1}[X] \cap A_{t_i} = A_{t_i} \setminus \bigcup_{j < l_i} f^{-1}[\{l_j\} \times \mathbb{N} \cap B] ,$$

a zarazem $f^{-1}[\{l_j\} \times \mathbb{N} \cap B] \in \mathcal{J}_{t_i}$, ponieważ $t_i \notin T'$.

Przypadek 2.: Jeśli $T \in \mathrm{Fin}$, to $S \notin \mathrm{Fin}$. Skoro $A \triangle B \notin \mathcal{I}$, możemy wybrać elementy $k(n)$ w taki sposób, że $S' = \{n \in S : n \neq k(n)\} \notin \mathrm{Fin}$. Niech $(s_1, s_2, \ldots)$ będzie rosnącym ponumerowaniem elementów zbioru S'. Zauważmy, że $\mathcal{J}_{s_i}|A_{s_i} \cong \mathcal{J}_{s_i}$ oraz $\mathcal{J}_{k(s_i)}|f[A_{s_i}] \cong \mathcal{J}_{k(s_i)}$ na mocy maksymalności każdego $\mathcal{J}_i$. Ponieważ ideały $(\mathcal{J}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ są parami nieizomorficzne, dla każdego $i \in \mathbb{N}$ możemy znaleźć taki zbiór $X_{s_i} \subseteq A_{s_i}$, że $X_{s_i} \in \mathcal{J}_{s_i}|A_{s_i}$, ale $f[\{s_i\} \times X_{s_i}] \notin \mathcal{J}_{k(s_i)}|f[A_{s_i}]$ (jeśli dla pewnego i istnieje $Y_{s_i} \subseteq A_{s_i}$, taki że $Y_{s_i} \notin \mathcal{J}_{s_i}|A_{s_i}$ oraz $f[\{s_i\} \times Y_{s_i}] \in \mathcal{J}_{k(s_i)}|f[A_{s_i}]$, to z maksymalności wszystkich $\mathcal{J}_i$ wystarczy wziąć $X_{s_i} = A_{s_i} \setminus Y_{s_i}$). Weźmy zbiór

$$X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{s_i\} \times X_{s_i} .$$

Wówczas jasne jest, że $X \in \mathcal{I}|A$. Ponadto, $f[X] \notin \mathcal{I}|B$ (ponieważ $k(s_i) \neq k(s_j)$ dla $i \neq j$), co stoi w sprzeczności z tym, że f jest izomorfizmem. $\square$

Problem 2.3.7. Czy istnieje „ładny” ideał (np. borelowski lub analityczny) spełniający warunek $(C1)$?

Przejdźmy teraz do odpowiedzi na drugą część pytania 1 z [6] dotyczącego charakteryzacji ideałów $\mathcal{I}$, dla których dla każdej $\mathcal{I}$-niezmienniczej injekcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mamy $\mathrm{Fix}(f) \in \mathcal{I}^*$ lub $f[\mathbb{N}] \in \mathcal{I}$.

Twierdzenie 2.3.8. *Następujące warunki są równoważne dla każdego ideału $\mathcal{I}$ na $\mathbb{N}$:*

1. *istnieje $\mathcal{I}$-niezmiennicza injekcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, taka że $\mathrm{Fix}(f) \notin \mathcal{I}^*$ oraz $f[\mathbb{N}] \notin \mathcal{I}$;*
2. *istnieją zbiory $A, B \subseteq \mathbb{N}$, takie że $B \notin \mathcal{I}$, $A \triangle B \notin \mathcal{I}$ oraz $\mathcal{I}|A \sqsubseteq \mathcal{I}|B$;*
3. *$\mathcal{I}$ nie jest ideałem maksymalnym.*

Dowód. **1 ⇒ 3:** Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem maksymalnym. Pokażemy, że $\mathcal{I}$ nie spełnia warunku z pierwszego punktu. Załóżmy, że istnieje $\mathcal{I}$-niezmiennicza injekcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ spełniająca $\mathrm{Fix}(f) \notin \mathcal{I}^*$ i $f[\mathbb{N}] \notin \mathcal{I}$. Wtedy istnienie $C \in \mathcal{I}$, takiego że $f^{-1}[C] \in \mathcal{I}^*$, zaprzeczałoby temu, że $f[\mathbb{N}] \notin \mathcal{I}$. Zatem f jest bi-$\mathcal{I}$-niezmiennicza. Jednak wtedy $\mathcal{I}$ nie może być maksymalny na mocy twierdzenia 2.3.2 i przykładu 2.3.3. Dochodzimy do sprzeczności z założeniem o maksymalności $\mathcal{I}$.

3 ⇒ 2: Weźmy dowolny ideał $\mathcal{I}$, który nie jest maksymalny. Rozpatrzmy przypadek, kiedy $\mathcal{I}$ nie jest gęsty. Weźmy taki $C \subseteq \mathbb{N}$, że $\mathcal{I}|C \cong \mathrm{Fin}$. Niech A i B będą dwoma nieskończonymi, rozłącznymi podzbiorami C. Wówczas A i B są zbiorami, które zapewniają, że $\mathcal{I}$ spełnia warunek z drugiego punktu.

Rozważmy teraz przypadek, kiedy $\mathcal{I}$ jest gęsty i weźmy $A = \mathbb{N}$ oraz dowolny $B \notin \mathcal{I} \cup \mathcal{I}^*$. Wówczas $A \triangle B = \mathbb{N} \setminus B \notin \mathcal{I}$. Zdefiniujmy funkcję $f : B \to \mathbb{N}$ wzorem $f(x) = x$ dla wszystkich $x \in B$. Na mocy lematu 3.3 z [7], jeśli $\mathcal{J}_1$ jest gęstym ideałem, to w definicji $\mathcal{J}_1 \sqsubseteq \mathcal{J}_2$ można użyć słowo „injekcja" w miejscu słowa „bijekcja". Z powyższego faktu dostajemy $\mathcal{I}|A \sqsubseteq \mathcal{I}|B$.

2 ⇒ 1: Jeśli $\mathcal{I} = \mathrm{Fin}$, to oczywiście istnieje $\mathcal{I}$-niezmiennicza injekcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, taka że $\mathrm{Fix}(f) \notin \mathcal{I}^*$ i $f[\mathbb{N}] \notin \mathcal{I}$ (weźmy na przykład funkcję daną wzorem $f(x) = x + 1$ dla $x \in \mathbb{N}$). Możemy więc założyć, że $\mathcal{I} \neq \mathrm{Fin}$. Weźmy nieskończony $C \in \mathcal{I}$. Możemy założyć, że $(A \cup B) \cap C = \emptyset$ (w przeciwnym razie rozważmy $A' = A \setminus C$ i $B' = B \setminus C$).

Jesteśmy gotowi, żeby zdefiniować $\mathcal{I}$-niezmienniczą injekcję f. Niech $f \restriction A$ będzie równa funkcji odwrotnej do funkcji świadczącej o tym, że $\mathcal{I}|A \sqsubseteq \mathcal{I}|B$ (mamy już więc, że $f[\mathbb{N}] \supseteq f[A] = B \notin \mathcal{I}$), $f \restriction (C \cup (B \setminus A))$ będzie dowolną bijekcją między $C \cup (B \setminus A)$ a C, zaś $f \restriction (\mathbb{N} \setminus (A \cup B \cup C))$ będzie funkcją identycznościową. Wówczas f jest $\mathcal{I}$-niezmienniczą injekcją. Ponadto, $\mathbb{N} \setminus \mathrm{Fix}(f)$ zawiera zbiór $A \triangle B \notin \mathcal{I}$. Zatem $\mathrm{Fix}(f) \notin \mathcal{I}^*$, co kończy dowód. □

Rosnące funkcje niezmiennicze

W poniższej części pracy udzielimy odpowiedzi na pytanie 2 z [6]. Zaczniemy od podania kilku wyników z pracy [6], żeby ukazać kontekst, w jakim to pytanie występuje.

Twierdzenie 2.3.9 ([6, Twierdzenie 11])**.** *Niech φ będzie półciągłą z dołu podmiarą, a $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ niech będzie rosnącą injekcją, taką że dla pewnego $c_f > 0$ mamy $\varphi(A) \geqslant c_f \varphi(f[A])$ dla wszystkich $A \subseteq \mathbb{N}$. Wówczas f jest jednocześnie $\mathrm{Fin}(\varphi)$-niezmiennicza, jak i $\mathrm{Exh}(\varphi)$-niezmiennicza. Ponadto, jeśli istnieje $c'_f > 0$, takie że $\varphi(A) \geqslant c'_f \varphi(f^{-1}[A])$ dla wszystkich $A \subseteq \mathbb{N}$, to f jest jednocześnie bi-$\mathrm{Fin}(\varphi)$-niezmiennicza i bi-$\mathrm{Exh}(\varphi)$-niezmiennicza.*

Przypomnijmy, że jeśli $g : \mathbb{N} \to [0, +\infty)$ jest funkcją spełniającą warunek $\sum_{n \in \mathbb{N}} g(n) = +\infty$, to przez $\mathcal{I}_g$ oznaczamy ideał sumowalny $\{A \subseteq \mathbb{N} : \sum_{n \in A} g(n) < \infty\}$. Jeśli dodatkowo $\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{\sum_{i \leqslant n} g(i)} = 0$, to przez $\mathcal{EU}_g$ oznaczamy ideał Erdősa-Ulama $\left\{A \subseteq \mathbb{N} : \lim_{n\to\infty} \frac{A_f(n)}{\mathbb{N}_f(n)}\right\}$.

Twierdzenie 2.3.10 ([6, Rozdział 4])**.** *Niech $g : \mathbb{N} \to [0, +\infty)$ będzie taką funkcją, że $\sum_{n \in \mathbb{N}} g(n) = +\infty$. Załóżmy dodatkowo, że g jest nierosnąca.*

Wówczas każda rosnąca injekcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest zarówno $\mathcal{EU}_g$-niezmiennicza, jak i $\mathcal{I}_g$-niezmiennicza.

Następny wynik pokazuje, że założenie o monotoniczności funkcji g jest kluczowe w powyższym twierdzeniu.

Twierdzenie 2.3.11 ([6, Twierdzenie 15])**.** *Istnieje ideał Erdősa-Ulama $\mathcal{I}$ oraz rosnąca injekcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, taka że f i f^{-1} nie są $\mathcal{I}$-niezmiennicze.*

Możemy teraz sformułować problem, o którym mowa w [6]. Niech $g : \mathbb{N} \to [0, \infty)$ będzie niemalejąca. Czy klasa rosnących injekcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, które są bi-$\mathcal{EU}_g$-niezmiennicze jest równa klasie rosnących injekcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, które są bi-$\mathcal{I}_{(1/g)}$-niezmiennicze?

Zwróćmy uwagę, że w pierwotnym sformułowaniu pytania 2 z [6] funkcja g jest rosnąca. Jednakże, w naszych rozważaniach wygodniej będzie używać funkcji niemalejącej zamiast rosnącej. Wszakże zawsze można zamienić niemalejącą funkcję g na rosnącą $g' \geqslant g$ nie zmieniając ideału, definiując ją w taki sposób, że szereg $\sum_{n\in\mathbb{N}} g'(n) - g(n)$ jest zbieżny.

Poniższe twierdzenie pokazuje, że odpowiedź na to pytanie jest twierdząca w przypadku $g(n) = n$. Łatwo zauważyć w tym wypadku, że $\mathcal{EU}_g = \mathcal{I}_d$ oraz $\mathcal{I}_{(1/g)} = \mathcal{I}_{1/n}$.

Twierdzenie 2.3.12 ([6, Wniosek 20])**.** *Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie rosnącą injekcją. Następujące warunki są równoważne:*

1. *f jest bi-$\mathcal{I}_d$-niezmiennicza;*
2. *$\underline{d}(f[\mathbb{N}]) > 0$;*
3. *istnieje $c \in \mathbb{N}$, taka że $f(n) \leqslant Cn$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$;*
4. *f jest bi-$\mathcal{I}_{1/n}$-niezmiennicza.*

W ogólności otrzymaliśmy jednak odpowiedź negatywną.

Twierdzenie 2.3.13. *Istnieje taka niemalejąca funkcja $g : \mathbb{N} \to [0, \infty)$, że klasy rosnących injekcji bi-$\mathcal{EU}_g$-niezmienniczych oraz rosnących injekcji bi-$\mathcal{I}_{(1/g)}$-niezmienniczych nie są równe.*

Dowód. Niech $g : \mathbb{N} \to [0, \infty)$ będzie funkcją niemalejącą, ograniczoną. Wówczas $\mathcal{EU}_g = \mathcal{I}_d$, natomiast $\mathcal{I}_{(1/g)} = \text{Fin}$. Ponieważ istnieją rosnące funkcje, które nie są bi-$\mathcal{I}_d$-niezmiennicze (np. $f(n) = n^2$), a każda injekcja jest bi-Fin-niezmiennicza, klasy ich rosnących funkcji bi-$\mathcal{I}$-niezmienniczych są różne. □

Możemy osłabić powyższą własność w następujący sposób. Mówimy, że ideał Erdősa-Ulama $\mathcal{I}$ spełnia warunek $(C2)$ jeśli istnieje taka niemalejąca funkcja $g : \mathbb{N} \to [0, \infty)$, że $\mathcal{I} = \mathcal{EU}_g$ oraz klasa rosnących injekcji bi-$\mathcal{EU}_g$-niezmienniczych jest taka sama, jak klasa rosnących injekcji bi-$\mathcal{I}_{(1/g)}$-niezmienniczych. Twierdzenie 2.3.12 pokazuje, że ideał $\mathcal{I}_d$ ma własność $(C2)$. Powstaje teraz pytanie, czy wszystkie ideały Erdősa-Ulama spełniają własność $(C2)$?

Twierdzenie 2.3.14. *Istnieje ideał Erdősa-Ulama niespełniający warunku* $(C2)$.

Dowód. Niech $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem danym przez $k_1 = 1$ oraz

$$k_n = \min\left\{x \in \mathbb{N} : \frac{2^x}{2^{k_{n-1}}} \geqslant n\right\}$$

dla wszystkich $n > 1$. Rozważmy $I_n = [2^{k_n}, 2^{k_{n+1}})$ oraz $\mathcal{I} = \mathcal{EU}_h$, gdzie funkcja $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest dana wzorem $h(i) = 2^{k_n}$ dla wszystkich $i \in I_n$.

Nietrudno spostrzec, że dla każdego $i \in I_n$ mamy

$$\frac{h(i)}{\mathbb{N}_h[1,i]} \leqslant \frac{2^{k_n}}{(2^{k_{n-1}})^2} \leqslant \frac{2n}{2^{k_{n-1}}} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

W takim razie $\mathcal{I}$ faktycznie jest ideałem Erdősa-Ulama.

Zauważmy, że dla każdego ciągu liczb dodatnich $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ograniczonego przez 1, jeśli przez A oznaczymy zbiór pierwszych $[a_n 2^{k_n}]$ elementów każdego I_{n+1}, to

$$A \in \mathcal{I} \iff \lim_{n\to\infty} a_n = 0, \tag{*}$$

ponieważ

$$\frac{A_h(I_{n+1})}{\mathbb{N}_h(I_n)} = \frac{a_n \cdot 2^{k_n} \cdot 2^{k_{n+1}}}{2^{k_n} \cdot (2^{k_{n+1}} - 2^{k_n})} \approx a_n \cdot \frac{n+1}{n},$$

podczas gdy $\frac{A_h(I_n)}{\mathbb{N}_h(I_n)} \leqslant \frac{a_{n-1}}{n}$.

Weźmy niemalejącą funkcję $g : \mathbb{N} \to [0,\infty)$, taką że $\mathcal{I} = \mathcal{EU}_g$ i niech $\mathcal{J} = \mathcal{I}_{(1/g)}$ będzie ideałem sumowalnym. Rozważmy zbiory B_b dla $b \in (0,1]$ składające się z ostatnich $[b2^{k_n}]$ elementów każdego przedziału I_n. Mamy dwa przypadki:

Przypadek 1.: Istnieje taki $b \in (0,1]$, że $B_b \in \mathcal{J}$. Rozważmy zbiór $C = B_b \in \mathcal{J}$ i zdefiniujmy funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ przez

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } x = 1, \\ 2^{k_{n+1}}, & \text{jeśli } x = \min(I_n \cap C) \text{ dla pewnego } n, \\ f(x-1)+1, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Zauważmy, że $f[C]$ składa się z pierwszych $[b2^{k_n}]$ elementów każdego I_{n+1}. Zatem $f[C] \notin \mathcal{I}$ na mocy (*). Z drugiej strony, $\frac{C_h(I_n)}{\mathbb{N}_h(I_n)} \leqslant \frac{b}{n}$, więc $C \in \mathcal{I}$. Stąd f nie jest bi-$\mathcal{I}$-niezmiennicza.

Ponieważ ciąg $(1/g(n))_{n\in\mathbb{N}}$ jest nierosnący, a f jest rosnąca, f jest w oczywisty sposób $\mathcal{J}$-niezmiennicza. Pokażemy, że f^{-1} także jest $\mathcal{J}$-niezmiennicza. Ustalmy $D \notin \mathcal{J}$. Musimy jedynie spostrzec, że

$$\sum_{i\in f[D]} \frac{1}{g(i)} \geqslant \sum_{i\in D} \frac{1}{g(i)} - \sum_{i\in C} \frac{1}{g(i)},$$

gdyż $(1/g(n))_{n\in\mathbb{N}}$ jest nierosnący, a szereg $\sum_{i\in C} \frac{1}{g(i)}$ jest zbieżny. Wobec tego, $f[D] \notin \mathcal{J}$ dla każdego $D \notin \mathcal{J}$.

Przypadek 2.: $B_b \notin \mathcal{J}$ dla wszystkich $b \in (0,1]$. Na początek zauważmy, że dla każdego $b \in (0,1]$ ciąg ilorazów

$$\frac{(B_b + b2^{k_n})_g(I_{n+1})}{(B_b)_g(I_n)}$$

musi zbiegać do nieskończoności, żeby utrzymać $\mathcal{I} = \mathcal{EU}_g$. Rzeczywiście, gdyby był on ograniczony na jakimś podciągu $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$, to wtedy każdy zbiór utworzony z początkowych elementów każdego I_{i_n} byłby w $\mathcal{EU}_g$ wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie podzbiory B_b byłyby w $\mathcal{EU}_g$. Nie jest jednak to prawdą dla ideału $\mathcal{I}$, gdyż $B_b \in \mathcal{I}$ dla wszystkich $b \leqslant 1$, zaś $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}((B_b \cap I_{i_n}) + b2^{k_{i_n}}) \notin \mathcal{I}$ dla wszystkich $b \leqslant 1$ na mocy (*). Wobec tego dla każdych $M > 0$ i $c \in (0,1]$ istnieje taki $N \in \mathbb{N}$, że dla dowolnego $n \geqslant N$ mamy $\frac{g(\max I_n + c2^{k_n})}{g(\max I_n)} \geqslant M$.

Następnie znajdujemy taki nierosnący ciąg $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dążący do 0, że zbiór B składający się z ostatnich $[b_n 2^{k_n}]$ elementów każdego przedziału I_n nie należy do $\mathcal{J}$, podczas gdy ciąg $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $M_n = \frac{g(\max I_n + b_n 2^{k_n})}{g(\max I_n)}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, będzie zbiegał do nieskończoności.

Na mocy twierdzenia Abela-Diniego [36, twierdzenie 173], które mówi, że jeżeli szereg $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ jest rozbieżny, to szereg $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x_n}{(x_1+\ldots+x_n)^{1+\delta}}$ jest zbieżny dla wszystkich $\delta > 0$, możemy znaleźć ciąg $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ograniczony przez 1, taki że $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n B_{1/g}(I_n)$ jest rozbieżny, zaś $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{c_n B_{1/g}(I_n)}{M_n}$ jest zbieżny. W tym celu wystarczy upewnić się, że ciąg $((c_1 B_{1/g}(I_1) + \ldots + c_n B_{1/g}(I_n))^2)$ rozbiega do nieskończoności i jednocześnie jest nie większy niż M_n.

Zdefiniujmy zbiór C jako sumę pierwszych $[c_n|B \cap I_n|]$ elementów każdego $B \cap I_n$. Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie dana przez

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } x = 1, \\ 2^{k_{n+1}} + [b_n 2^{k_n}] + [(1-c_n)|B \cap I_n|], & \text{jeśli } x = \min(I_n \cap C), \\ f(x-1) + 1, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Zauważmy, że skoro $\sum_{n\in\mathbb{N}} C_{1/g}(I_n) \geqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n B_{1/g}(I_n)$, zbiór C nie należy do $\mathcal{J}$. Ponadto, możemy spostrzec, że $\sum_{n\in\mathbb{N}} f[C]_{1/g}(I_{n+1}) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{c_n B_{1/g}(I_n)}{M_n}$, więc $f[C] \in \mathcal{J}$. Zatem f nie jest bi-$\mathcal{J}$-niezmiennicza.

W celu pokazania, że f jest bi-$\mathcal{I}$-niezmiennicza, ustalmy $D \subseteq \mathbb{N}$. Zarówno B, jak i $f[B]$ należą do $\mathcal{I}$ (na mocy (*)), więc bez straty ogólności możemy przyjąć, że $D \cap B = \emptyset$. Najpierw rozważmy przypadek, gdy $D \in \mathcal{I}$. Łatwo widać, że $f[D] \in \mathcal{I}$, ponieważ dla $i \in D \cap I_n$ mamy $f(i) \in I_n$, a funkcja h jest stała na I_n. Z drugiej strony, jak $D \notin \mathcal{I}$, to istnieje $\alpha > 0$ oraz nieskończenie wiele $i \in \mathbb{N}$, takich że $\frac{D_h[1,i]}{\mathbb{N}_h[1,i]} > \alpha$. Wówczas dla tych $i \in I_n$ otrzymujemy

$$\frac{f[D]_h[1,i]}{\mathbb{N}_h[1,i]} \geqslant \frac{D_h[1, i - 2b_n 2^{k_{n-1}}]}{\mathbb{N}_h[1,i]} > \alpha - \frac{2b_n \cdot 2^{k_{n-1}} \cdot 2^{k_n}}{2^{k_{n-1}} \cdot (2^{k_n} - 2^{k_{n-1}})}.$$

Żeby zakończyć dowód, wystarczy zauważyć, że prawa strona powyższej nierówności jest większa od $\alpha/2$ dla prawie wszystkich n. Zatem $f[D] \notin \mathcal{I}$. $\square$

Funkcje niezmiennicze a zbieżność ideałowa

W tym miejscu udzielimy odpowiedzi na pytania 3 i 4 z pracy [6], które dotyczą zbieżności ideałowej ciągów. Przypomnijmy, że ciąg liczb rzeczywistych $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest $\mathcal{I}$-zbieżny do pewnego $x \in \mathbb{R}$, gdy $\{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| > \varepsilon\} \in \mathcal{I}$ dla każdego $\varepsilon > 0$.

Mówimy, że ideał $\mathcal{I}$ spełnia warunek $(C3)$ jeśli dla każdego ciągu liczb rzeczywistych $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{I}$-zbieżność tego ciągu do pewnego $x \in \mathbb{R}$ implikuje zbieżność $(x_{f(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ do x dla pewnej bi-$\mathcal{I}$-niezmienniczej injekcji f. Pytanie 3 z [6] dotyczy charakteryzacji ideałów spełniających warunek $(C3)$.

Łatwo widać, że $\mathrm{Fin}\oplus\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nie spełnia warunku $(C3)$. Autorzy [6] uzyskali następujące wyniki dotyczące tego warunku.

Twierdzenie 2.3.15 ([6, Twierdzenie 22])**.** *Każdy odpowiedni P-ideał spełnia warunek $(C3)$.*

Twierdzenie 2.3.16 ([6, Twierdzenie 23])**.** *Wszystkie ideały, które nie są słabymi P-ideałami, nie spełniają warunku $(C3)$.*

W naszej pracy [43] otrzymaliśmy poniższą charakteryzacje ideałów spełniających warunek $(C3)$.

Twierdzenie 2.3.17. *Następujące warunki są równoważne dla każdego ideału odpowiedniego $\mathcal{I}$ na $\mathbb{N}$:*

1. *$\mathcal{I}$ spełnia warunek $(C3)$;*
2. *dla każdej przeliczalnej rodziny $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{I}$ istnieje taki zbiór $A \in H(\mathcal{I})$, że $A \cap A_n$ jest skończony dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.*

Dowód. **1 $\Rightarrow$ 2:** Weźmy przeliczalną rodzinę $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{I}$ i przypuśćmy, że dla każdego $A \in H(\mathcal{I})$ istnieje $n \in \mathbb{N}$, taki że $A \cap A_n$ jest nieskończony. Rozważmy ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dany wzorem

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{jeśli } n \in A_k \setminus \bigcup_{m<k} A_m \text{ dla pewnego } k, \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Wówczas jasne jest, że ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest $\mathcal{I}$-zbieżny do 0. Jednakże, dla każdej bi-$\mathcal{I}$-niezmienniczej injekcji f istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, że $f[\mathbb{N}] \cap A_k$ jest nieskończony (gdyż $f[\mathbb{N}] \in H(\mathcal{I})$). Wobec tego istnieje nieskończenie wiele $n \in \mathbb{N}$ dla których $x_{f(n)} \geqslant 1/k$. Zatem $(x_{f(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ nie jest zbieżny do 0.

2 $\Rightarrow$ 1: Niech $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych $\mathcal{I}$-zbieżnym do pewnego $x \in \mathbb{R}$. Rozważmy zbiory $A_k = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| > \frac{1}{k}\} \in \mathcal{I}$. Możemy wtedy znaleźć bi-$\mathcal{I}$-niezmienniczą injekcję f, taką że $f[\mathbb{N}] \cap A_k$ jest skończony dla każdego k. Zatem $(x_{f(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do x. □

Wniosek 2.3.18. *Odpowiedni ideał jednorodny spełnia warunek $(C3)$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest słabym P-ideałem. Ponadto, antyjednorodny ideał spełnia warunek $(C3)$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest P-ideałem.*

Przejdziemy teraz do kolejnego pytania z pracy [6]. Powszechnie wiadomo, że dla ciągu liczb rzeczywistych $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz pewnego $x \in \mathbb{R}$, jeśli dla każdego ciągu indeksów $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ znajdziemy taki podciąg $(n_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$, że $(x_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ zbiega do x, to cały ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ także zbiega do x.

Będą nas interesować ideały, dla których spełniona jest ideałowa wersja powyższego faktu. To znaczy, powiemy, że ideał $\mathcal{I}$ na $\mathbb{N}$ spełnia warunek $(C4)$ jeśli dla każdego ciągu liczb rzeczywistych $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $x \in \mathbb{R}$, jeśli dla każdej bi-$\mathcal{I}$-niezmienniczej funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ istnieje bi-$\mathcal{I}$-niezmiennicza $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, taka że $(x_{g(f(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ jest $\mathcal{I}$-zbieżny do x, to $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest $\mathcal{I}$-zbieżny do x. Pytanie 4 z [6] dotyczy charakteryzacji ideałów spełniających warunek $(C4)$. W [6] pokazano, że warunek $(C1)$ implikuje warunek $(C4)$. Dodatkowo, autorzy tego artykułu chcieli się dowiedzieć, czy ideał $\mathcal{I}_d$ spełnia warunek $(C4)$.

Twierdzenie 2.3.19. *Następujące warunki są równoważne dla każdego ideału $\mathcal{I}$ na $\mathbb{N}$:*

1. *$\mathcal{I}$ spełnia warunek $(C4)$;*
2. *$\mathcal{I}$ jest antyjednorodny.*

Dowód. **1 $\Rightarrow$ 2:** Załóżmy, że $\mathcal{I}$ nie jest antyjednorodny, czyli istnieje $A \in H(\mathcal{I}) \setminus \mathcal{I}^*$. Niech $g : \mathbb{N} \to A$ będzie izomorfizmem między $\mathcal{I}|A$ a $\mathcal{I}$. Wtedy g jest bi-$\mathcal{I}$-niezmiennicza. Zdefiniujmy

$$x_n = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } n \in A, \\ 0, & \text{jeśli } n \in \mathbb{N} \setminus A. \end{cases}$$

Wtedy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ w oczywisty sposób nie jest $\mathcal{I}$-zbieżny. Z drugiej strony, dla każdej bi-$\mathcal{I}$-niezmienniczej funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mamy $g[f[\mathbb{N}]] \subseteq A$. W takim razie $(x_{g(f(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem stałym, a więc zbieżnym. Otrzymaliśmy sprzeczność z założeniem. Zatem $\mathcal{I}$ jest antyjednorodny.

2 $\Rightarrow$ 1: Skoro $\mathcal{I}$ jest antyjednorodny, dla wszystkich bi-$\mathcal{I}$-niezmienniczych funkcji $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mamy $g[f[\mathbb{N}]] \in \mathcal{I}^*$. Żeby zakończyć dowód, wystarczy zauważyć, że jak $(x_n)_{n\in A}$ jest $\mathcal{I}$-zbieżny do x dla pewnego $A \in \mathcal{I}^*$, to $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ także jest $\mathcal{I}$-zbieżny do x. □

Wniosek 2.3.20. *Ideał $\mathcal{I}_d$ nie spełnia warunku $(C4)$.*

Dowód. Wynika z faktu, że ideał $\mathcal{I}_d$ nie jest antyjednorodny, gdyż zbiór liczb parzystych należy do $H(\mathcal{I}_d)$. □

Zamiast rozważać warunek $(C4)$, możemy zmienić dziedzinę i przeciwdziedzinę funkcji g z tego warunku, aby otrzymać trochę słabszą własność, prawdopodobnie lepiej oddającą intencje twórców warunku $(C4)$. Ideał $\mathcal{I}$ będzie spełniał warunek $(C5)$ jeśli dla dowolnego ciągu liczb rzeczywistych $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $x \in \mathbb{R}$ fakt, że dla każdej bi-$\mathcal{I}$-niezmienniczej funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ istnieje taka bi-$\mathcal{I}$-niezmiennicza funkcja $g : f[\mathbb{N}] \to f[\mathbb{N}]$, że $(x_{g(f(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ jest $\mathcal{I}$-zbieżny do x, będzie implikował $\mathcal{I}$-zbieżność ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ do x.

Uwaga. *Ideał* $\mathrm{Fin} \oplus \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *spełnia warunek* $(C5)$ *na mocy klasycznego twierdzenia z analizy, dzięki któremu* Fin *spełnia warunek* $(C5)$*. Nie spełnia on jednak warunku* $(C4)$*, gdyż nie jest antyjednorodny.*

Twierdzenie 2.3.21. *Następujące warunki są równoważne dla każdego ideału odpowiedniego* $\mathcal{I}$ *na* $\mathbb{N}$*:*

1. $\mathcal{I}$ *spełnia warunek* $(C5)$*;*

2. *dla każdego* $A \notin \mathcal{I} \cup \mathcal{I}^*$ *istnieje* $B \in H(\mathcal{I})$*, taki że dla wszystkich* $C \in H(\mathcal{I})$ *spełniających* $C \subseteq B$ *mamy* $A \cap C \notin \mathcal{I}$*.*

Dowód. **1 ⇒ 2:** Załóżmy, że istnieje $A \notin \mathcal{I} \cup \mathcal{I}^*$, taki że dla każdego $B \in H(\mathcal{I})$ istnieje $C \in H(\mathcal{I})$ spełniający $C \subseteq B$ oraz $A \cap C \in \mathcal{I}$. Zdefiniujmy

$$x_n = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } n \in A, \\ 0, & \text{jeśli } n \in \mathbb{N} \setminus A. \end{cases}$$

Wówczas oczywistym jest, że $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nie jest $\mathcal{I}$-zbieżny. Z drugiej strony, niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie dowolną funkcją bi-$\mathcal{I}$-niezmienniczą i wprowadźmy oznaczenie $B = f[\mathbb{N}]$. Z założenia istnieje $C \in H(\mathcal{I})$, taki że $C \subseteq B$ i $A \cap C \in \mathcal{I}$. Niech $g : B \to B$ będzie funkcją bi-$\mathcal{I}$-niezmienniczą, taką że $g[B] = C$. Zauważmy, że $(x_{g(f(n))})_{n \in \mathbb{N}}$ jest $\mathcal{I}$-zbieżny do 0, ponieważ $A \cap C \in \mathcal{I}$. Otrzymaliśmy sprzeczność z założeniem, że $\mathcal{I}$ spełnia warunek $(C5)$.

2 ⇒ 1: Przypuśćmy, że $\mathcal{I}$ nie spełnia warunku $(C5)$ i niech $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie takim ciągiem liczb rzeczywistych, że dla każdej funkcji bi-$\mathcal{I}$-niezmienniczej $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ istnieje bi-$\mathcal{I}$-niezmiennicza $g : f[\mathbb{N}] \to f[\mathbb{N}]$, dla której $(x_{g(f(n))})_{n \in \mathbb{N}}$ jest $\mathcal{I}$-zbieżny do x, ale sam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nie jest $\mathcal{I}$-zbieżny do x. Wówczas istnieje $\varepsilon > 0$, taki że $A = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| > \varepsilon\} \notin \mathcal{I} \cup \mathcal{I}^*$.

Na mocy założenia istnieje $B \in H(\mathcal{I})$, taki że dla wszystkich $C \in H(\mathcal{I})$ spełniających $C \subseteq B$ mamy $A \cap C \notin \mathcal{I}$. Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie funkcją bi-$\mathcal{I}$-niezmienniczą świadczącą o tym, że $B \in H(\mathcal{I})$, czyli $f[\mathbb{N}] = B$. Wówczas dla każdej bi-$\mathcal{I}$-niezmienniczej funkcji $g : B \to B$ mamy $g[B] \cap A \notin \mathcal{I}$. Stąd, $\{n \in g[B] : |x_n - x| > \varepsilon\} \notin \mathcal{I}$. W takim razie $(x_{g(f(n))})_{n \in \mathbb{N}}$ nie jest $\mathcal{I}$-zbieżny do x, co prowadzi nas do sprzeczności z założeniem. Zatem $\mathcal{I}$ spełnia warunek $(C5)$. □

Wniosek 2.3.22. *Wszystkie ideały jednorodne i antyjednorodne spełniają warunek* $(C5)$*.*

Dowód. Jeśli $\mathcal{I}$ jest ideałem jednorodnym, a $A \notin \mathcal{I} \cup \mathcal{I}^*$, weźmy $B = A$. Wówczas dla każdego $C \in H(\mathcal{I})$ spełniającego $C \subseteq B$ mamy $A \cap C = C \notin \mathcal{I}$. Jeśli $\mathcal{I}$ jest ideałem antyjednorodnym, to dla każdego $A \notin \mathcal{I} \cup \mathcal{I}^*$ i $C \in H(\mathcal{I}) = \mathcal{I}^*$ mamy $A \setminus C \in \mathcal{I}$, więc $A \cap C \notin \mathcal{I}$. □

Pokażemy, że ideał $\mathcal{I}_d$ nie spełnia warunku $(C5)$. W pracy [43] udowodniliśmy w tym celu następujący fakt.

Twierdzenie 2.3.23. *Niech* $A \in H(\mathcal{I}_d)$ *i niech* $(a_1, a_2 \ldots)$ *będzie rosnącym ponumerowaniem elementów zbioru* A*. Wówczas funkcja* $f : \mathbb{N} \to A$ *dana przez* $f(n) = a_n$ *jest izomorfizmem między* $\mathcal{I}_d|A$ *a* $\mathcal{I}_d$*.*

Jednakże, można go łatwo wywnioskować z następującego twierdzenia.

Definicja 2.3.24. Ideał $\mathcal{I}$ nazywamy *rosnąco-niezmienniczym* jeśli dla każdego zbioru $A \in \mathcal{I}$ oraz dowolnego zbioru $B \subseteq \mathbb{N}$ spełniającego $A(n) \geqslant B(n)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ mamy $B \in \mathcal{I}$.

Twierdzenie 2.3.25. *Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem rosnąco-niezmienniczym. Wtedy dla dowolnego $A \in H(\mathcal{I})$, którego rosnącym ponumerowaniem elementów jest $(a_1, a_2 \ldots)$, funkcja $f : \mathbb{N} \to A$ dana przez $f(n) = a_n$ jest izomorfizmem między $\mathcal{I}|A$ a $\mathcal{I}$.*

Dowód. Weźmy rosnąco-niezmienniczy ideał $\mathcal{I}$ oraz zbiór $A \in H(\mathcal{I})$. Przypuśćmy, że $f(n) = a_n$ nie jest izomorfizmem pomiędzy $\mathcal{I}|A$ a $\mathcal{I}$. Niech $g : \mathbb{N} \to A$ będzie takim izomorfizmem. Łatwo widać, że dla takiego ideału $\mathcal{I}$ każda funkcja rosnąca jest $\mathcal{I}$-niezmiennicza, więc musi istnieć taki zbiór $B \notin \mathcal{I}$, że $f[B] \in \mathcal{I}$. Niech $(b_1, b_2, \ldots)$ będzie rosnącym ponumerowaniem elementów B, a $(c_1, c_2, \ldots)$ niech będzie rosnącym ponumerowaniem elementów zbioru $f[B]$.

Zdefiniujemy teraz indukcyjnie ciąg (k_i^j) dla $i, j \in \mathbb{N}$, $i \leqslant j$. Niech k_1^1 będzie taką liczbą naturalną, że $k_1^1 \leqslant b_1$ oraz $g(k_1^1) \geqslant c_1$. Możemy znaleźć taki element, gdyż f jest rosnącym ponumerowaniem elementów zbioru A, więc $A(c_1) = b_1$.

Załóżmy, że zdefiniowaliśmy już (k_i^j) dla $i, j < n$, $i \leqslant j$. Wybierzmy teraz elementy $k_1^n, \ldots, k_n^n$ w taki sposób, że $\{k_1^{n-1}, \ldots, k_{n-1}^{n-1}\} \subseteq \{k_1^n, \ldots, k_n^n\}$, $k_i^n \leqslant b_n$ oraz $g(k_i^n) \geqslant c_i$ dla każdego $i \leqslant n$.

Zdefiniujmy zbiór $D = \bigcup_{i,j \in \mathbb{N}, i \leqslant j} \{k_i^j\}$. Wtedy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $D(n) \geqslant B(n)$, więc $D \notin \mathcal{I}$. Z drugiej strony, dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy $g[D](n) \leqslant f[B](n)$, zatem $g[D] \in \mathcal{I}$. Jest to sprzeczne z założeniem, że g jest izomorfizmem. $\square$

Problem 2.3.26. Czy implikację z powyższego twierdzenia da się odwrócić, to znaczy, czy jak dla dowolnego $A \in H(\mathcal{I})$, którego rosnącym ponumerowaniem elementów jest $(a_1, a_2 \ldots)$, funkcja $f : \mathbb{N} \to A$ dana przez $f_A(n) = a_n$ jest izomorfizmem między $\mathcal{I}|A$ a $\mathcal{I}$, to $\mathcal{I}$ jest ideałem rosnąco niezmienniczym?

Uwaga. *Ideały do których należy zbiór liczb parzystych $2\mathbb{N}$ lub zbiór liczb nieparzystych $2\mathbb{N} - 1$ (np. ideał Hindmana lub dowolny ideał maksymalny) nie mają własności z powyższego twierdzenia. Dla dowolnego ideału $\mathcal{I}$ mamy $\mathbb{N} \setminus \{1\} \in H(\mathcal{I})$, ale dla funkcji $f(n) = n + 1$ otrzymujemy $f[2\mathbb{N} - 1] = 2\mathbb{N}$, a dla tych ideałów dokładnie jeden z tych zbiorów należy do ideału.*

Na mocy dotychczasowych wyników możemy scharakteryzować rodzinę jednorodności ideału $\mathcal{I}_d$, dzięki czemu zdołamy pokazać, że nie spełnia on warunku $(C5)$.

Wniosek 2.3.27. *Dla każdego $A \subseteq \mathbb{N}$ mamy $A \in H(\mathcal{I}_d)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\underline{d}(A) > 0$.*

Dowód. Na mocy twierdzenia 2.3.23, $A \in H(\mathcal{I}_d)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rosnąca funkcja bi-$\mathcal{I}_d$-niezmiennicza $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ spełniająca $f[\mathbb{N}] = A$. W wyniku twierdzenia 2.3.12, rosnąca funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest bi-$\mathcal{I}_d$-niezmiennicza wtedy i tylko wtedy, gdy $\underline{d}(f[\mathbb{N}]) > 0$. □

Twierdzenie 2.3.28. *Ideał $\mathcal{I}_d$ nie spełnia warunku $(C5)$.*

Dowód. W dowodzie będziemy wykorzystywać charakteryzację z twierdzenia 2.3.21. Niech $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie rodziną rozłącznych, następujących po sobie przedziałów I_n długości $n!$. Niech A będzie zbiorem składającym się z ostatnich $\lfloor n!/5 \rfloor$ elementów każdego I_n. Łatwo widać, że $A \notin \mathcal{I}_d \cup \mathcal{I}_d^*$, gdyż $\overline{d}(A) = 1/5$. Weźmy dowolny $B \in H(\mathcal{I}_d)$. Wówczas na mocy wniosku 2.3.27 mamy $\underline{d}(B) > 0$. Niech $C = B \setminus A$. Wtedy $C \cap A = \emptyset \in \mathcal{I}_d$, więc do zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że $\underline{d}(C) > 0$, ponieważ wówczas na podstawie wniosku 2.3.27 otrzymamy $C \in H(\mathcal{I}_d)$.

Skoro $\underline{d}(B) > 2\alpha$ dla pewnego $\alpha > 0$ to $B(n) > \alpha n$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Niech $k \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $\alpha > 1/k$. Nietrudno zauważyć, że dla $k_n = \max I_n \setminus A$ mamy $C(k_n)/k_n \geqslant B(k_n)/k_n - 2/n$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$, bo zbiory C i B są sobie równe na każdym $I_n \cap C$, a $\left|\bigcup_{i<n} I_n\right| / |I_n| < 2/n$ dla wszystkich $n > 1$. Stąd $C(k_n) > \alpha k_n - 2k_n/n$. Zauważmy, że $C(i)/i \geqslant C(k_n)/k_n \cdot 4/5$ dla wszystkich $i \in [k_n, j_n]$, gdzie $j_n = \max \mathcal{I}_n$, ponieważ $k_n/j_n \geqslant 4/5$. Zwróćmy też uwagę na to, że $B(k_n) \geqslant 4\alpha B[k_n+1, j_n]$, ponieważ $A(I_n) \leqslant k_n/4$ oraz $B(k_n) > \alpha k_n$. Natomiast dla $i \in [j_n, k_{n+1}]$ dostaniemy

$$\frac{C(i)}{i} = \frac{C[j_n+1, i] + C(k_n)}{i} \geqslant \frac{B[j_n+1, i] + B(k_n) - \frac{2k_n}{n}}{i}.$$

Gdyby więc $\underline{d}(C) = 0$, to dla każdego $\varepsilon > 0$ znaleźlibyśmy nieskończenie wiele $i_n \in [j_n, k_{n+1}]$, takich że $B(k_n) + B[j_n+1, i_n] - 2k_n/n < \varepsilon i_n$, zaś $B(k_n) + B[k_n+1, j_n] + B[j_n+1, i_n] > \alpha i_n$. Z tego wynika, że $B[k_n+1, j_n] + 2k_n/n > (\alpha - \varepsilon) i_n$, ale $4\alpha B[k_n+1, j_n] < \varepsilon i_n$. Zatem $2k_n/n > i_n(\alpha - \varepsilon(1 + 1/4\alpha))$, czyli $2/n > (\alpha - 2k\varepsilon)$, sprzeczność dla $\varepsilon < \alpha/2k$ i prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Otrzymaliśmy więc, że $\underline{d}(C) > 0$, co kończy dowód. □

Możemy zauważyć, że powyższy dowód jest zupełnie inny niż oryginalny dowód tego twierdzenia z [43]. Wynika to stąd, że dowód twierdzenia 5.9 z [43] jest błędny (ponieważ wykorzystuje podaddytywność dolnej gęstości asymptotycznej), więc do ponownego wykazania tego faktu potrzebne było nowe rozumowanie.

Rozdział 3

Ideały typu gęstościowego

W tym rozdziale omówimy dwie nowe klasy ideałów, które zostały zdefiniowane przy pomocy różnych funkcji na liczbach naturalnych lub gęstości podzbiorów $\mathbb{N}$, w sposób przypominający definicje ideałów Erdősa-Ulama i gęstościowych.

3.1 Proste ideały gęstościowe

W tej części rozprawy doktorskiej zajmiemy się pojęciem prostych ideałów gęstościowych, wprowadzonych przez Balcerzaka, Dasa, Filipczak i Swaczynę w [4] (choć tam nie miały jeszcze ustalonej nazwy) i wykorzystywanych później w [6] i [14]. Pokażemy tutaj ich podstawowe własności i podamy wyniki opisane w naszej wspólnej pracy z Kwelą, Popławskim i Swaczyną [42], które dają odpowiedź na kilka pytań dotyczących prostych ideałów gęstościowych oraz ukazują powiązania tych ideałów z innymi klasami ideałów, takich jak ideały Erdősa-Ulama.

Definicja 3.1.1. Ustalmy zbiór

$$G = \left\{ g \in (0, \infty)^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} g(n) = \infty \wedge \limsup_{n\to\infty} \frac{n}{g(n)} > 0 \right\}.$$

Niech $g \in G$. Wówczas rodzina

$$\mathcal{Z}_g = \left\{ A \subseteq \mathbb{N} \colon \limsup_{n\to\infty} \frac{A(n)}{g(n)} = 0 \right\}.$$

jest ideałem na $\mathbb{N}$ zwanym *prostym ideałem gęstościowym*.

Nietrudno zauważyć, że jak g jest funkcją identycznościową, to $\mathcal{Z}_g = \mathcal{I}_d$, więc ideał zbiorów o gęstości asymptotycznej zero jest prostym ideałem gęstościowym. Innym przykładem prostego ideału gęstościowego jest ideał $\mathcal{I}$ z twierdzenia 2.2.19, dany przez $\mathcal{I} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \lim_{n\to\infty} A(I_n)/n! = 0\}$, gdzie I_n jest ciągiem następujących po sobie przedziałów długości $n!$. Ideał $\mathcal{I}$ będzie się równał $\mathcal{Z}_g$, kiedy $g(n) = k!$ dla $n \in I_k$. Następnym prostym spostrzeżeniem dotyczącym tych ideałów jest następujący fakt pochodzący z [4].

Twierdzenie 3.1.2 ([4, Twierdzenie 2.2]). *Dla każdego $f \in G$ istnieje taka niemalejąca funkcja $g \in G$, że $\mathcal{Z}_f = \mathcal{Z}_g$.*

W dalszej części pracy, żeby uprościć nasze rozważania na temat prostych ideałów gęstościowych, zmniejszymy trochę rodzinę G. Badana klasa ideałów się jednak nie zmieni na mocy poniższej uwagi, wynikającej z twierdzenia 3.1.2.

Uwaga. *Ustalmy zbiór*

$$H = \{h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : h \in G \wedge h \text{ jest niemalejąca}\}.$$

Dla każdego $g \in G$ istnieje taka funkcja $h \in H$, że $\mathcal{Z}_h = \mathcal{Z}_g$.

Łatwo pokazać, że każdy prosty ideał gęstościowy jest ideałem gęstym oraz rosnąco niezmienniczym (tj. jak $A \in \mathcal{I}$ oraz $B(n) \leqslant A(n)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to $B \in \mathcal{I}$). Ponadto, dzięki twierdzeniu 3.2 z pracy [4] wiadomo, że każdy prosty ideał gęstościowy jest ideałem gęstościowym w sensie Faraha.

Twierdzenie 3.1.3 ([4, Twierdzenie 3.2]). *Niech $g \in H$. Niech $n_1 = 1$ zaś dla $k \in \mathbb{N}$ niech $n_{k+1} = \min\{n \in \mathbb{N} : g(n) \geqslant 2g(n_k)\}$. Wówczas $\mathcal{Z}_g$ jest ideałem gęstościowym generowanym przez ciąg miar $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dany przez*

$$\varphi_k(A) = \frac{A[n_k, n_{k+1})}{g(n_k)}.$$

Możemy to twierdzenie odrobinę zmodyfikować, żeby uzyskać charakteryzację, kiedy prosty ideał gęstościowy jest ideałem Erdősa-Ulama.

Twierdzenie 3.1.4. *Ustalmy $g \in H$. Niech $n_1 = 1$ zaś dla $k > 1$ niech $n_k = \min\{n \in \mathbb{N} : g(n) \geqslant 2^k\}$. Wówczas $\mathcal{Z}_g$ jest ideałem gęstościowym generowanym przez ciąg miar $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dany przez*

$$\varphi_k(A) = \frac{A[n_k, n_{k+1})}{2^k}.$$

Dowód. Analogiczny do dowodu twierdzenia 3.1.3. □

Przypomnijmy uzyskane przez Faraha twierdzenie 1.3.5, które pokazuje kiedy ideał gęstościowy jest ideałem Erdősa-Ulama. Następnie wykorzystamy je w celu otrzymania pożądanej charakteryzacji.

Twierdzenie. *Ideał gęstościowy generowany przez ciąg miar $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ jest ideałem Erdősa-Ulama wtedy i tylko wtedy, gdy*

1. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(\mathbb{N}) < \infty$,
2. $\lim_{n\to\infty} \sup_{i\in\mathbb{N}} \varphi_n(\{i\}) = 0$,
3. $\limsup_{n\to\infty} \varphi_n(\mathbb{N}) > 0$.

Nietrudno zauważyć (por. dowód powyższego twierdzenia w [16]), że trzeci z powyższych warunków jest równoznaczny temu, że $\mathbb{N}$ nie należy do ideału, a drugi warunek jest równoznaczny temu, że ideał jest gęsty.

Twierdzenie 3.1.5. *Ustalmy $g \in H$. Wówczas $\mathcal{Z}_g$ jest ideałem Erdősa-Ulama wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(|g^{-1}[[2^n, 2^{n+1})]|/2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony.*

Dowód. Korzystamy z tego, że ideał $\mathcal{Z}_g$ jest ideałem gęstościowym generowanym przez miary zdefiniowane w twierdzeniu 3.1.4. Ponieważ $\mathbb{N} \notin \mathcal{Z}_g$, a proste ideały gęstościowe są zawsze gęste, drugi i trzeci z wyżej wymienionych warunków są zawsze spełnione przez $\mathcal{Z}_g$.

W takim razie, na mocy twierdzenia 1.3.5 musimy sprawdzić jedynie warunek $\sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(\mathbb{N}) < \infty$.

Zauważmy, że

$$\varphi_k(\mathbb{N}) = \frac{\mathbb{N}[n_k, n_{k+1})}{g(n_k)} = \frac{|g^{-1}[[2^k, 2^{k+1})]|}{g(n_k)}$$

oraz $g(n_k) \in [2^k, 2^{k+1})$ dla wszystkich niepustych przedziałów $[n_k, n_{k+1})$. Stąd $\sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(\mathbb{N}) < \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sup_{n\in\mathbb{N}} |g^{-1}[[2^n, 2^{n+1})]|/2^n < \infty$. □

Kontynuujemy rozważania na temat powyższej klasy ideałów poprzez znalezienie odpowiedzi na pytania zadane przez Rałowskiego i Żeberskiego na seminarium z teorii mnogości Politechniki Wrocławskiej o charakteryzację rodzin $\bigcap_{g\in H} \mathcal{Z}_g$ i $\bigcup_{g\in H} \mathcal{Z}_g$:

Twierdzenie 3.1.6. *$\bigcap_{g\in H} \mathcal{Z}_g = Fin$ oraz $\bigcup_{g\in H} \mathcal{Z}_g = \{A \subseteq \mathbb{N} : \underline{d}(A) = 0\}$.*

Dowód. Weźmy dowolny nieskończony $A \subseteq \mathbb{N}$. Wówczas funkcja dana wzorem $g(n) = A(n)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ w oczywisty sposób należy do H. Zarazem $A \notin \mathcal{Z}_g$, gdyż $A(n)/g(n) = 1$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Zatem $\bigcap_{g\in H} \mathcal{Z}_g = Fin$.

Weźmy dowolny zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$ spełniający $\limsup_{n\to\infty} A(n)/g(n) = 0$ dla pewnej funkcji $g \in H$. Zauważmy, że skoro $\limsup_{n\to\infty} n/g(n) > 0$ i $g > 0$, musi istnieć taki rosnący ciąg liczb naturalnych $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, że ciąg $(g(n_k)/n_k)$ jest ograniczony. Wówczas

$$\frac{A(n_k)}{n_k} = \frac{A(n_k)}{g(n_k)} \cdot \frac{g(n_k)}{n_k},$$

co zbiega do zera przy k dążącym do nieskończoności. Otrzymujemy więc $\liminf_{n\to\infty} A(n)/n = 0$. Zatem $\underline{d}(A) = 0$, czyli $\bigcup_{g\in H} \mathcal{Z}_g \subseteq \{A \subseteq \mathbb{N} : \underline{d}(A) = 0\}$.

Teraz wybierzmy dowolny zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$ spełniający $\underline{d}(A) = 0$. Istnieje wtedy rosnący ciąg liczb naturalnych (n_k), dla którego $\lim_{k\to\infty} A(n_k)/n_k = 0$. Zdefiniujmy funkcję $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ w następujący sposób:

$$g(n) = \begin{cases} n_1, & \text{jeśli } n \leqslant n_1, \\ n_k, & \text{jeśli } n_{k-1} < n \leqslant n_k \text{ dla pewnego } k \geqslant 2. \end{cases}$$

Nietrudno spostrzec, że g jest niemalejąca i rozbiega do nieskończoności, ponieważ (n_k) jest rosnący. Ponadto, skoro $g(n_k) = n_k$, mamy $n_k/g(n_k) = 1$ dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$, więc $\limsup_{n\to\infty} n/g(n) > 0$. W rezultacie, $g \in H$. Pokażemy, że $A \in \mathcal{Z}_g$. Weźmy $n \in (n_{k-1}, n_k]$ dla pewnego $k \geqslant 1$. Wówczas

$$\frac{A(n)}{g(n)} = \frac{A(n)}{n_k} \leqslant \frac{A(n_k)}{n_k}.$$

Ponieważ $\lim_{k\to\infty} A(n_k)/n_k = 0$, $A \in \mathcal{Z}_g$, co kończy dowód. □

Będziemy teraz rozważać, ile różnych funkcji może dać ten sam prosty ideał gęstościowy. Jednakże, pytanie o moc rodziny $\{g \in H : \mathcal{Z}_g = \mathcal{Z}_f\}$ dla ustalonej funkcji $f \in H$ ma bardzo prostą odpowiedź, gdyż możemy umieścić w tej rodzinie funkcje, które niewiele się różnią od f. Na przykład, nietrudno zauważyć, że dla wszystkich $\alpha \in (1,2)$ funkcja $\lfloor \alpha \cdot f \rfloor$ będzie należeć do tej rodziny, a zatem moc powyższej rodziny jest zawsze $\mathfrak{c}$ (gdyż $|H| = \mathfrak{c}$). Wobec tego, żeby uniknąć takiego „oszukania" problemu i rozważać tylko rzeczywiście różne funkcje, zajmiemy się badaniami na temat mocy rodziny $Z_f = \{g \in H : \mathcal{Z}_f = \mathcal{Z}_g\}/R$, gdzie R jest relacją równoważności daną przez

$$gRh \iff \limsup_{n\to\infty} \frac{g(n)}{h(n)} < \infty \ \wedge\ \limsup_{n\to\infty} \frac{h(n)}{g(n)} < \infty.$$

Twierdzenie 3.1.7. *Niech $f \in H$. Wówczas $|Z_f| = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $M > 0$ i $\varepsilon > 0$, takie że dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$ mamy*

$$\frac{f(n + \lfloor \varepsilon f(n) \rfloor)}{f(n)} \leqslant M.$$

Dowód. $\Rightarrow$: Przypuśćmy, że dla wszystkich $M > 0$ i $\varepsilon > 0$ istnieje nieskończenie wiele $n \in \mathbb{N}$, takich że $f(n + \lfloor \varepsilon f(n) \rfloor)/f(n) > M$. Pokażemy, że $|Z_f| \geqslant 2$.

Znajdujemy ciąg $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ spełniający $f(n_k + \lfloor f(n_k)/2^k \rfloor)/f(n_k) > k$ oraz $n_{k+1} > n_k + f(n_k)/2^k$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Oznaczmy jako I_k przedziały $[n_k, n_k + \lfloor f(n_k)/2^k \rfloor]$. Rozważmy funkcję $g \in H$ daną przez

$$g(n) = \begin{cases} f(n_k + \lfloor f(n_k)/2^k \rfloor), & \text{jeśli } n \in I_k \text{ dla pewnego } k \in \mathbb{N}, \\ f(n), & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Możemy łatwo zauważyć, że $\limsup_{n\to\infty} g(n)/f(n) = \infty$, gdyż $g(n_k)/f(n_k) > k$ dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$. Możemy także spostrzec, że $\mathcal{Z}_f \subseteq \mathcal{Z}_g$, ponieważ $g(n) \geqslant f(n)$ dla wszystkich naturalnych n.

Żeby udowodnić, że $\mathcal{Z}_g \subseteq \mathcal{Z}_f$, weźmy $A \in \mathcal{Z}_g$. Pokażemy, że $A \in \mathcal{Z}_f$. Jasne jest, że $A(n)/g(n) = A(n)/f(n)$ jak n nie należy do żadnego I_k. W takim razie, z monotoniczności f otrzymujemy $A \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k \in \mathcal{Z}_f$. Możemy także zauważyć, że $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k \in \mathcal{Z}_f$, bo $(|I_k| - 1)/f(n_k) \leqslant 1/2^k$ dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$, a więc dla każdego $K \in \mathbb{N}$ mamy

$$\frac{|\bigcup_{k\leqslant l} I_k|}{f(n_l)} = \frac{|\bigcup_{k\leqslant K} I_k|}{f(n_l)} + \frac{|\bigcup_{K<k\leqslant l} I_k|}{f(n_l)} < \frac{1}{2^K} + \frac{2}{2^K} = \frac{3}{2^K}$$

dla prawie wszystkich $l \in \mathbb{N}$. Ponieważ $A \subseteq \big(A \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k\big) \cup \big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k\big) \in \mathcal{Z}_f$, dostajemy $A \in \mathcal{Z}_f$.

$\Leftarrow$: Załóżmy nie wprost, że istnieje taka funkcja $g \neq f$, że $g \in Z_f$. Mamy wtedy dwa przypadki: zachodzi $\limsup_{n\to\infty} g(n)/f(n) = \infty$ lub zachodzi $\limsup_{n\to\infty} f(n)/g(n) = \infty$.

Na początek załóżmy, że dla każdego $m > 0$ istnieje nieskończenie wiele $n \in \mathbb{N}$, takich że $g(n)/f(n) > m$. Istnieje wtedy ciąg liczb naturalnych $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, taki że $g(n_k)/f(n_k) > k$ i $n_{k+1} \geqslant \varepsilon f(n_k) + n_k$ dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$. Skonstruujmy zbiór A w taki sposób, że $A(n_k + \lfloor \varepsilon f(n_k)\rfloor) = \lfloor \varepsilon f(n_k)\rfloor$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$ i $A \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} [n_k, n_k + \lfloor \varepsilon f(n_k)\rfloor]$. Wówczas $A \notin \mathcal{Z}_f$, gdyż $A(n)/f(n)$ będzie nie mniejszy niż $\varepsilon/2M$ dla prawie wszystkich $n = n_k + \lfloor \varepsilon f(n_k)\rfloor$, $k \in \mathbb{N}$, ale ponieważ $A(n_k + \lfloor \varepsilon f(n_k)\rfloor)/g(n_k) < \varepsilon/k$, $A \in \mathcal{Z}_g$. Zatem $\mathcal{Z}_f \neq \mathcal{Z}_g$, co jest sprzeczne z $g \in Z_f$.

Załóżmy teraz, że dla każdego $m > 0$ istnieje nieskończenie wiele $n \in \mathbb{N}$, takich że $f(n)/g(n) > m$. Ten przypadek jest bardziej skomplikowany.

Zaczniemy od konstrukcji dwóch ciągów $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ i $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Jeśli n_i oraz m_i są zdefiniowane dla wszystkich $i < k$, to niech $l_k = \min\{n > m_{k-1} : f(n) > (\frac{\varepsilon}{M} - \frac{\varepsilon}{k})^{-1}\}$ (na potrzeby tej definicji przyjmijmy $m_0 = 0$). Możemy dodatkowo założyć, że $f(l_k) > 1/\varepsilon$. Wybierzmy takie m_k, że $l_k + \varepsilon f(l_k)/k < m_k$ oraz $f(m_k)/g(m_k) > k$ (zauważmy, że $m_k > m_{k-1}$). Wówczas możemy wybrać takie n_k, że

$$n_k + \varepsilon f(n_k)/k < m_k < n_k + \varepsilon f(n_k).$$

Rzeczywiście, gdybyśmy nie mogli tego zrobić, to istniałoby $n \geqslant l_k$, takie że $n + \varepsilon f(n) < m_k < (n+1) + \varepsilon f(n+1)/k$. Oznaczałoby to, że $f(n)\varepsilon < 1 + f(n+1)\varepsilon/k$. Ponieważ $f(n) > 1/\varepsilon$, otrzymujemy dodatkowo $f(n+1)/f(n) \leqslant f(n + \lfloor \varepsilon f(n)\rfloor)/f(n) < M$. Wobec tego, $f(n+1)\varepsilon/M < f(n)\varepsilon < 1 + f(n+1)\varepsilon/k$, a więc $f(n+1) < (\frac{\varepsilon}{M} - \frac{\varepsilon}{k})^{-1}$, co stoi w sprzeczności z faktem, że $n \geqslant l_k$.

Konstruujemy zbiór A w taki sposób, że $A(m_k) = \max_{i\leqslant k} \lfloor \varepsilon f(n_i)/i\rfloor$, a zarazem $A \cap (m_k, n_{k+1}) = \emptyset$ dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$. Wówczas $A \in \mathcal{Z}_f$, jako że dla każdego $n_k \leqslant n < m_k$, gdzie $A \cap [n_k, m_k] \neq \emptyset$, otrzymujemy

$$\frac{A(n)}{f(n)} \leqslant \frac{\lfloor \varepsilon f(n_k)/k\rfloor}{f(n_k)} \leqslant \frac{\varepsilon}{k},$$

co zbiega do zera przy k dążącym do nieskończoności. Z drugiej strony,

$$\frac{A(m_k)}{g(m_k)} \geqslant \frac{\varepsilon f(n_k)}{2k} \cdot \frac{k}{f(m_k)} \geqslant \frac{\varepsilon}{2M},$$

ponieważ $f(m_k)/f(n_k) \leqslant f(n_k + \lfloor \varepsilon f(n_k)\rfloor)/f(n_k) \leqslant M$. Zatem $\mathcal{Z}_f \neq \mathcal{Z}_g$, co przeczy temu, że $g \in Z_f$. $\square$

Wniosek 3.1.8. *Niech $f \in H$. Jeśli $\limsup_{n\to\infty} f(n+1)/f(n) = \infty$, to $|Z_f| > 1$.*

Twierdzenie 3.1.9. *Niech $f \in H$. Jeśli $|Z_f| > 1$, to $|Z_f| = \mathfrak{c}$.*

Dowód. Weźmy $g \in Z_f$, takie że $f \neq g$. Bez straty ogólności możemy założyć, że znajdziemy ciąg $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, taki że $\lim_{n\to\infty} g(n_k)/f(n_k) = \infty$, a dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$ mamy $f(n_{k+1}) \geqslant g(n_k)$. Następnie, dla każdego $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ zdefiniujemy funkcję f_α w następujący sposób:

$$f_\alpha(n) = \begin{cases} f(n), & \text{jeśli } n < n_1, \\ f(n), & \text{jeśli } n \in [n_k, n_{k+1}) \text{ oraz } \alpha_k = 0, \\ \max\{g(n_k), f(n)\}, & \text{jeśli } n \in [n_k, n_{k+1}) \text{ oraz } \alpha_k = 1. \end{cases}$$

Łatwo widać, że dla każdego f_α spełnione jest $\mathcal{Z}_{f_\alpha} = \mathcal{Z}_f$, ponieważ $f_\alpha(n) \in [f(n), \max\{g(n), f(n)\}]$ dla wszystkich naturalnych n, a $\mathcal{Z}_f = \mathcal{Z}_g$. Zauważmy też, że kiedy $\alpha, \beta \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ są takie, że $\alpha_n > \beta_n$ dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$, to $\limsup_{n\to\infty} f_\alpha(n)/f_\beta(n) = \infty$, natomiast kiedy $\alpha_n < \beta_n$ dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$, to $\limsup_{n\to\infty} f_\beta(n)/f_\alpha(n) = \infty$. Powszechnie wiadomo, że istnieje rodzina $\mathcal{A}$ podzbiorów $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, taka że $|\mathcal{A}| = \mathfrak{c}$ i dla wszystkich różnych $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ zbiór $\{n \in \mathbb{N} : \alpha_n = \beta_n\}$ jest skończony. Wobec tego, $|Z_f| = \mathfrak{c}$. $\square$

Dla każdego prostego ideału gęstościowego $\mathcal{Z}_f$ mamy więc dwie możliwości: albo $|Z_f| = 1$, albo $|Z_f| = \mathfrak{c}$. Poznaliśmy też charakteryzację (twierdzenie 3.1.5), kiedy taki ideał jest ideałem Erdősa-Ulama. Poniżej podajemy przykłady prostych ideałów gęstościowych na każdą z kombinacji tych dwóch własności.

Przykłady.

1. Dla $f(n) = n$ mamy ideał Erdősa-Ulama $\mathcal{Z}_f = \mathcal{I}_d$, dla którego $|Z_f| = 1$, gdyż $f(2n)/f(n) = 2$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

2. Kiedy $f(n) = k!$ dla $n \in I_k$, gdzie $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem następujących po sobie przedziałów długości $k!$, to $\mathcal{Z}_f$ jest ideałem Erdősa-Ulama z twierdzenia 2.2.19, dla którego $|Z_f| = \mathfrak{c}$, gdyż $f(n+1)/f(n) = k+1$ dla $n = \max I_k$, $k \in \mathbb{N}$.

3. Kiedy $f(n) = k$ dla $n \in I_k$, gdzie $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem następujących po sobie przedziałów długości $k!$, to $\mathcal{Z}_f$ nie jest ideałem Erdősa-Ulama, ponieważ $f^{-1}\left[[2^n, 2^{n+1})\right]|/2^n \geqslant n!/2^n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, a $|Z_f| = 1$, gdyż $\lim_{n\to\infty} f(2n)/f(n) = 1$.

4. Kiedy $f(n) = k!$ dla $n \in I_k$, gdzie $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem następujących po sobie przedziałów długości $(k!)^2$, to $\mathcal{Z}_f$ nie jest ideałem Erdősa-Ulama, ponieważ $|f^{-1}\left[[2^n, 2^{n+1})\right]|/2^n \geqslant (k!)^2/(2\cdot k!)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ spełniającego $k! \in [2^n, 2^{n+1})$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, a $|Z_f| = \mathfrak{c}$, gdyż $f(n+1)/f(n) = k+1$ dla $n = \max I_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Na koniec tego podrozdziału pokażemy, że istnieje „dużo” różnych, ze względu na izomorfizm, a nawet porządek Katětova, prostych ideałów gęstościowych. Jest to rozszerzenie poniższego wyniku z [4].

Twierdzenie 3.1.10 ([4, Twierdzenie 2.7]). *Istnieje rodzina prostych ideałów gęstościowych mocy $\mathfrak{c}$, taka że $\mathcal{Z}_f \nsubseteq \mathcal{Z}_g$ dla dowolnych dwóch różnych ideałów z tej rodziny.*

Przypomnijmy, że jak $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ są ideałami na $\mathbb{N}$, to $\mathcal{J} \leqslant_K \mathcal{I}$ jeśli istnieje taka funkcja $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że $f^{-1}[A] \in \mathcal{I}$ dla każdego $A \in \mathcal{J}$. Natomiast $\mathcal{I}$ jest izomorficzny z $\mathcal{J}$ jeśli istnieje taka bijekcja $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że $A \in \mathcal{I} \iff \varphi[A] \in \mathcal{J}$. Zauważmy, że jak $\mathcal{I}$ jest izomorficzny z $\mathcal{J}$, to $\mathcal{J} \leqslant_K \mathcal{I}$ oraz $\mathcal{I} \leqslant_K \mathcal{J}$.

Twierdzenie 3.1.11. *Istnieje rodzina prostych ideałów gęstościowych mocy $\mathfrak{c}$, taka że $\mathcal{Z}_f \nleqslant_K \mathcal{Z}_g$ dla dowolnych dwóch różnych ideałów z tej rodziny.*

Dowód. Wykorzystamy zmodyfikowaną wersję rodziny mocy $\mathfrak{c}$ z dowodu powyższego twierdzenia. Na początek ustalmy rodzinę $\mathcal{F}$ mocy $\mathfrak{c}$ złożoną z parami prawie rozłącznych nieskończonych podzbiorów $\mathbb{N}$ oraz funkcję $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, taką że $2\alpha(n+1)-1 > (2\alpha(n)+1)!$ (we wspomnianym dowodzie $\alpha(n) = n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, jednak w obecnym dowodzie jest to odpowiednia funkcja tylko dla pierwszego i trzeciego przypadku poniżej, a w drugim przypadku potrzebujemy tego dodatkowego warunku). Dla każdego $M \in \mathcal{F}$ niech $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ będzie jego rosnącym ponumerowaniem elementów. Zdefiniujmy funkcję

$$f_M(n) = \begin{cases} (2\alpha(m_i))!, & \text{jeśli } (2\alpha(m_i) - 1)! < n \leqslant (2\alpha(m_i) + 1)! \text{ dla } i \in \mathbb{N}, \\ n, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Łatwo widać, że $f_M \in H$.

Ustalmy $K, M \in \mathcal{F}$, $K \neq M$. Pokażemy, że $\mathcal{Z}_{f_M} \nleqslant_K \mathcal{Z}_{f_K}$. Przypuśćmy przeciwnie, że istnieje $\varphi : N \to \mathbb{N}$ spełniający $\varphi^{-1}[A] \in \mathcal{Z}_{f_K}$ dla wszystkich $A \in \mathcal{Z}_{f_M}$.

Niech $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ będzie rosnącym ponumerowaniem elementów $K \setminus M$. Dla każdego $i \in \mathbb{N}$ wprowadźmy oznaczenia $I_{k_i} = [(2\alpha(k_i)-1)!, (2\alpha(k_i)+1)!)$ oraz

$$B_{k_i} = \{n \in I_{k_i} : \varphi(n) \geqslant (2\alpha(k_i) + 1)!\},$$

$$C_{k_i} = \{n \in I_{k_i} : 2\alpha(k_i) + 1 \leqslant \varphi(n) < (2\alpha(k_i) + 1)!\},$$
$$D_{k_i} = \{n \in I_{k_i} : \varphi(n) < 2\alpha(k_i) + 1\}.$$

Zauważmy, że $(2\alpha(k_i))! + \alpha(k_i)(2\alpha(k_i))! + \alpha(k_i)(2\alpha(k_i))! = (2\alpha(k_i)+1)! \leqslant 2|I_{k_i}|$ kiedy $\alpha(k_i) > 1$. Wobec tego, musi zachodzić przynajmniej jeden z następujących przypadków.

Przypadek 1.: Dla nieskończenie wielu $i \in \mathbb{N}$ mamy $|B_{k_i}| \geqslant (2\alpha(k_i))!/2$. Niech $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ będzie rosnącym ponumerowaniem zbioru elementów z tą własnością. Możemy dodatkowo założyć, że $\max \varphi[B_{t_j}] < (2\alpha(t_{j+1})+1)!$. Dla każdego $j \in \mathbb{N}$ niech B'_{t_j} będzie dowolnym podzbiorem B_{t_j} o mocy $(2\alpha(t_j))!/2$. Niech $B = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B'_{t_j}$. Wtedy dla $n = (2\alpha(t_j) + 1)!$ mamy $B(n)/f_K(n) \geqslant (2\alpha(t_j))!/(2(2\alpha(t_j))!) = 1/2$. Zatem $\varphi^{-1}[\varphi[B]] \supseteq B \notin \mathcal{Z}_{f_K}$. Jednakże, $\varphi[B] \in \mathcal{Z}_{f_M}$, ze względu na to, że $\varphi[B](n)/f_M(n) \leqslant 2(2\alpha(t_j))!/(2(2\alpha(t_j) + 1)!) < 1/\alpha(t_j)$ dla wszystkich $n \in [(2\alpha(t_j) + 1)!, (2\alpha(t_{j+1}) + 1)!)$.

Przypadek 2.: Dla nieskończenie wielu $i \in \mathbb{N}$ spełnione jest $|C_{k_i}| \geqslant \alpha(k_i)(2\alpha(k_i))!/2$. Niech $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ będzie rosnącym ponumerowaniem zbioru elementów z tą własnością. Możemy dodatkowo założyć, że $(j+1)2(2\alpha(t_j)+1)! < (2\alpha(t_{j+1})+1)$. Dla każdego $j \in \mathbb{N}$ i $l \leqslant (2\alpha(t_j))!-1$ wybierzmy $e_{j,l} \in [l(2\alpha(t_j)+1), (l+1)(2\alpha(t_j)+1))$, takie że $\varphi^{-1}[\{e_{j,l}\}](I_{t_j})$ jest największe możliwe ze wszystkich punktów należących do $[l(2\alpha(t_j)+1), (l+1)(2\alpha(t_j)+1))$.

Zdefiniujmy $E_j = \{e_{j,l} : l \leqslant (2\alpha(t_j))!-1\}$ i $E = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j$. Zauważmy, że $\varphi^{-1}[E_j](I_{t_j}) \geqslant (2\alpha(t_j))!/8$. Rzeczywiście, w przeciwnym wypadku otrzymalibyśmy $|C_{t_j}| \leqslant (2\alpha(t_j)+1)\varphi^{-1}[E_j](I_{t_j}) < (2\alpha(t_j)+1)(2\alpha(t_j))!/8 < \alpha(t_j)(2\alpha(t_j))!/2 \leqslant |C_{t_j}|$, sprzeczność. W takim razie dla $n = (2\alpha(t_j)+1)!$ mamy $\varphi^{-1}[E](n)/f_K(n) \geqslant \varphi^{-1}[E_j](n)/f_K(n) \geqslant 1/8$. Wynika stąd, że $\varphi^{-1}[E] \notin \mathcal{Z}_{f_K}$. Jednakże, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ albo istnieją takie $j \in \mathbb{N}$ oraz $l \leqslant (2\alpha(t_j))!-1$, że $n \in [l(2\alpha(t_j)+1), (l+1)(2\alpha(t_j)+1))$, albo istnieje taki $j \in \mathbb{N}$, że $n \in [(2\alpha(t_j)+1)!, 2\alpha(t_{j+1})+1)$. Rozważmy więc dwa podprzypadki (przypomnijmy wpierw, że $f_M(n) = n$ dla $n \in [2\alpha(t_j)+1, (2\alpha(t_j)+1)!])$:

- w pierwszym podprzypadku dostaniemy $E(n)/f_M(n) \leqslant (2(2\alpha(t_{j-1}))! + l)/(l(2\alpha(t_j)+1)) < 1/j + 1/\alpha(t_j)$;
- w drugim podprzypadku dostaniemy $E(n)/f_M(n) \leqslant (2(2\alpha(t_{j-1}))! + (2\alpha(t_j))!-1)/(2\alpha(t_j)+1)! < 1/j + 1/2\alpha(t_j)$.

Zatem $E \in \mathcal{Z}_{f_M}$.

Przypadek 3.: Dla nieskończenie wielu $i \in \mathbb{N}$ spełnione jest $|D_{k_i}| \geqslant \alpha(k_i)(2\alpha(k_i))!/2$. Niech T składa się ze wszystkich k_i o takiej własności. Wybierzemy indukcyjnie punkty $d_j \in \mathbb{N}$, $l_{j+1} \in \mathbb{N}$ i $t_{j+1} \in T$ dla $j \in \mathbb{N}$. Zaczniemy od $d_1 = 1$. Jeśli mamy wybrane wszystkie d_j dla $j \leqslant m$, to niech $l_m > d_{m-1}$ będzie taki, że $m/f_M(l_m) < 1/m$. Przedział $[1, l_m)$ należy do $\mathcal{Z}_{f_M}$ jako zbiór skończony, więc musi istnieć taki $t_m \in T$, że $|\{n \in D_{t_m} : \varphi(n) \geqslant l_m\}| > \alpha(t_m)(2\alpha(t_m))!/4$ (w przeciwnym razie $\varphi^{-1}[[1, l_m)] \notin \mathcal{Z}_{f_K}$, gdyż wtedy $\varphi^{-1}[[1, l_m)](I_t)/(2\alpha(t))! \geqslant \alpha(t)/4$ dla wszystkich $t \in T$). Łatwo widać, że $2\alpha(t_m)+1 > l_m$, gdyż dla t spełniających $\alpha(t) \leqslant (l_m-1)/2$ mamy $|\{n \in D_t : \varphi(n) \geqslant l_m\}| = 0$.

Weźmy d_m, takie że $l_m \leqslant d_m < 2\alpha(t_m)+1$ i $|\varphi^{-1}[\{d_m\}]| \geqslant (2\alpha(t_m))!/12$. Jest to możliwe, gdyż w przeciwnym wypadku otrzymalibyśmy $|\{n \in D_{t_m} : \varphi(n) \geqslant l_m\}| < (2\alpha(t_m)+1-l_m)(2\alpha(t_m))!/12 \leqslant \alpha(t_m)(2\alpha(t_m))!/4 < |\{n \in D_{t_m} : \varphi(n) \geqslant l_m\}|$, sprzeczność.

Zdefiniujmy $D = \{d_j : j \in \mathbb{N}\}$. Wówczas $D \in \mathcal{Z}_{f_M}$, gdyż $D(n)/f_M(n) \leqslant m/f_M(l_m) < 1/m$ dla $l_m \leqslant n < l_{m+1}$. Jednakże, $\varphi^{-1}[D] \notin \mathcal{Z}_{f_K}$, ponieważ $\varphi^{-1}[D](n)/f_K(n) \geqslant 1/12$ dla wszystkich $n = (2\alpha(t_m)+1)!$, $m \in \mathbb{N}$. □

Wniosek 3.1.12. *Istnieje $\mathfrak{c}$ parami nieizomorficznych prostych ideałów gęstościowych.*

3.2 Ideały ważonej gęstości jednostajnej

W poniższym podrozdziale opiszemy kilka własności ideałów ważonej gęstości jednostajnej, pojęcia wprowadzonego w pracy autora rozprawy [63]. Udowodnimy także kilka rezultatów dotyczących samej ważonej gęstości jednostajnej, z którą te ideały są związane. Między innymi, odpowiemy na pytanie Mačaja, Sleziaka i Tomy z [49] na temat charakteryzacji, kiedy ta gęstość ma własność Darboux. Ideały opisane w tej części rozprawy będą podzbiorami $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Główne pojęcie rozważane w tym rozdziale, ważona gęstość jednostajna, zostało wprowadzone przez Giuliano Antonini i Grekosa w [26], a następnie rozwijane w [49] i [63].

Definicja 3.2.1. Mówimy, że ciąg $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest *ciągiem wag* jeśli jest ciągiem wyrazów dodatnich, takim że $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n = \infty$.

Dla ustalonego ciągu wag $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *górna* oraz *dolna ważona gęstość jednostajna* zbioru $A \subseteq \mathbb{N}$ będą zdefiniowane odpowiednio w następujący sposób:

$$\overline{u}_c(A) = \lim_{h\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \frac{A_c[n, n+h]}{\mathbb{N}_c[n, n+h]},$$

$$\underline{u}_c(A) = \lim_{h\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \frac{A_c[n, n+h]}{\mathbb{N}_c[n, n+h]},$$

przypomnijmy, że $A_c[n, n+h] = \sum_{i\in A\cap[n,n+h]} c_i$. Kiedy $\overline{u}_c(A) = \underline{u}_c(A)$, będziemy oznaczali tę wartość przez $u_c(A)$ i nazywali ją *ważoną gęstością jednostajną* zbioru $A \subseteq \mathbb{N}$.

Zauważmy, że $\overline{u}_c(A) = 1 - \underline{u}_c(\mathbb{N} \setminus A)$ dla każdego ciągu wag $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz zbioru $A \subseteq \mathbb{N}$, a zarazem $u_c(A \cup B) = u_c(A) + u_c(B)$ jeśli $A \cap B = \emptyset$.

Istnieje także wiele innych równoważnych definicji ważonych gęstości jednostajnych, które zostały opisane w [49]. Na przykład, na mocy twierdzenia 4.1 z [49] możemy je równoważnie zdefiniować w poniższy sposób.

$$\overline{u}_c(A) = \lim_{h\to\infty} \sup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ h'\geqslant h}} \frac{A_c[n, n+h']}{\mathbb{N}_c[n, n+h']},$$

$$\underline{u}_c(A) = \lim_{h\to\infty} \inf_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ h'\geqslant h}} \frac{A_c[n, n+h']}{\mathbb{N}_c[n, n+h']}.$$

W dalszej części pracy często będziemy korzystali z tej alternatywnej definicji.

Definicja 3.2.2. Rodzina

$$\mathcal{I}_c = \{A \subseteq \mathbb{N} : \overline{u}_c(A) = 0\}$$

jest ideałem, który nazywamy *ideałem ważonej gęstości jednostajnej.*

Łatwo widać, że kiedy ciąg wag $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest stały, to mamy do czynienia z górną i dolną gęstością jednostajną (zwaną także gęstością Banacha), oznaczanymi odpowiednio przez $\overline{u}$ i $\underline{u}$, a także z ideałem gęstości jednostajnej $\mathcal{I}_u$. Możemy także zauważyć, że dla szybko rosnącego ciągu $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (na przykład danego przez $c_n = n!$) otrzymamy $\mathcal{I}_c = \mathrm{Fin}$.

Następujący warunek został wprowadzony w [49] jako jeden z kilku podobnych warunków koniecznych do wykazania kilku pożądanych własności ważonych gęstości jednostajnych.

Definicja 3.2.3. Ciąg $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia *warunek* U^m jeśli

$$\lim_{h\to\infty} \sup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ h'\geqslant h}} \frac{\max\{c_t : t \in [n, n+h']\}}{\mathbb{N}_c[n, n+h']} = 0.$$

Poniżej przedstawiamy kilka własności ideałów ważonej gęstości jednostajnej opisanych w naszym artykule [63]. Powyższy warunek charakteryzuje niektóre z tych własności, co ukazuje kluczowe znaczenie warunku U^m.

Twierdzenie 3.2.4. *Ideał ważonej gęstości jednostajnej $\mathcal{I}_c$ jest gęsty wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia warunek U^m.*

Dowód. $\Rightarrow$: Jeśli ciąg $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nie spełnia warunku U^m, to istnieje $k \in \mathbb{N}$ oraz ciąg $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$, taki że dla każdego $i \in \mathbb{N}$ mamy $d_i \in [n, n+i]$ oraz $d_i/\mathbb{N}_c[n, n+i] \geqslant 1/k$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Jak $D = \{d_i : i \in \mathbb{N}\}$, to żaden nieskończony podzbiór D nie należy do $\mathcal{I}_c$.

$\Leftarrow$: Jeżeli ciąg $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia warunek U^m, to dla każdego nieskończonego zbioru $A \subseteq \mathbb{N}$ można łatwo znaleźć nieskończony $B \subseteq A$ należący do $\mathcal{I}_c$. Rzeczywiście, dzięki warunkowi U^m dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje takie $h_k \in \mathbb{N}$, że dla każdego $h \geqslant h_k$ i $n \in \mathbb{N}$ mamy $\max\{c_t : t \in [n, n+h]\}/\mathbb{N}_c[n, n+h] \leqslant 1/k$. Wystarczy więc, żeby kolejne elementy $b_1, b_2, \ldots$ tworzące zbiór B spełniały $b_k - b_{k-1} > kh_k$, a dostaniemy $B \in \mathcal{I}_c$. □

Twierdzenie 3.2.5. *Ideały ważonej gęstości jednostajnej są ideałami $F_{\sigma\delta}$.*

Dowód. Niech $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem wag. Z definicji ideału ważonej gęstości jednostajnej mamy

$$\mathcal{I}_c = \left\{ A \subseteq \mathbb{N} : \lim_{h\to\infty} \sup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ h'\geqslant h}} \frac{A_c[n, n+h']}{\mathbb{N}_c[n, n+h']} = 0 \right\}.$$

Możemy więc go przedstawić jako

$$\mathcal{I}_c = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{h\in\mathbb{N}} \bigcap_{h'\geqslant h} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{ A \subseteq \mathbb{N} : \frac{A_c[n, n+h']}{\mathbb{N}_c[n, n+h']} < \frac{1}{k} \right\}.$$

Żeby zakończyć dowód, wystarczy zauważyć, że zbiór $\{A \subseteq \mathbb{N} : A_c[n, n+h']/\mathbb{N}_c[n, n+h'] < 1/k\}$ jest domknięty. □

Dodatkowo, w pracy autora rozprawy ([63, Twierdzenie 2.3]) pokazano, że gęste ideały ważonej gęstości jednostajnej nie są $G_{\delta\sigma}$.

Twierdzenie 3.2.6. *Jeśli (c_n) spełnia warunek U^m oraz $\mathcal{I}_c$ jest ideałem ważonej gęstości jednostajnej, to $\mathcal{I}_c$ nie jest P-ideałem.*

Dowód. Znajdźmy w $\mathbb{N}$ nieskończenie wiele przedziałów I_n, takich że dla każdego naturalnego n mamy $|I_n| = n$ oraz $\min I_{n+1} - \max I_n > n$.

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zdefiniujmy A_n jako zbiór n-tych elementów każdego I_k, $k \geqslant n$. Na mocy warunku U^m, $A_n \in \mathcal{I}_c$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Przypuśćmy, że istnieje $A \in \mathcal{I}_c$ spełniający $A_n \setminus A \in \text{Fin}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Oznacza to, że dla każdego naturalnego n możemy znaleźć taki $K \in \mathbb{N}$, że dla wszystkich $k > K$ zbiór A będzie zawierał pierwsze n elementów przedziału I_k. Wobec tego A zawiera przedział długości co najmniej n, a zatem zawiera on przedziały o dowolnej skończonej długości. Wynika stąd, że $A \notin \mathcal{I}_c$, co stoi w sprzeczności ze wcześniejszym przypuszczeniem. □

Przykład 3.2.7. Fin *jest ideałem ważonej gęstości jednostajnej niespełniającym warunku U^m, który jest P-ideałem.*

Przykład 3.2.8. *Niech $c_n = 2^{2^k}$ jeśli $n = 2^k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ zaś $c_n = 1$ w przeciwnym przypadku. Wówczas $\mathcal{I}_c$ jest ideałem ważonej gęstości jednostajnej niespełniającym warunku U^m, który nie jest P-ideałem.*

Twierdzenie 3.2.9. *Każdy ideał ważonej gęstości jednostajnej $\mathcal{I}_c$ jest słabym P-ideałem.*

Dowód. Weźmy rodzinę zbiorów $A_1, A_2, \ldots$ należących do $\mathcal{I}_c$. Bez zmiany ogólności możemy założyć, że są one rozłączne. Konstruujemy indukcyjnie zbiór $A \notin \mathcal{I}_c$, dla którego $A \cap A_i$ jest skończony dla wszystkich $i \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że skonstruowaliśmy A na przedziale $[1, k]$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Niech $I_k = \{i \in \mathbb{N} : A_i \cap A \cap [1, k] \neq \emptyset\}$. Ponieważ I_k jest skończony, $B = \bigcup_{i \in I_k} A_i \in \mathcal{I}_c$. Wobec tego, istnieją takie $n, h > k$, że $B_c[n, n+h]/\mathbb{N}_c[n, n+h] < 1/k$. Definiujemy wówczas A na przedziale $[k+1, n+h]$ jako $([n, n+h] \setminus B)$. Kontynuując indukcyjnie tę konstrukcję otrzymamy zbiór A, taki że $A \cap A_i$ jest skończony dla wszystkich $i \in \mathbb{N}$. Łatwo widać, że $A \notin \mathcal{I}_c$, co kończy dowód. □

Teraz zajmiemy się badaniem własności BW dla ideałów ważonej gęstości jednostajnej. Przypomnijmy, że ideał $\mathcal{I}$ ma własność BW jeśli dla każdego ciągu ograniczonego $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ istnieje taki zbiór $A \notin \mathcal{I}$, że $(x_n)_{n \in A}$ jest ciągiem $\mathcal{I}$-zbieżnym, namiomiast $\mathcal{I}$ ma własność FinBW jeśli dla każdego ciągu ograniczonego $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ istnieje taki zbiór $A \notin \mathcal{I}$, że $(x_n)_{n \in A}$ jest ciągiem zbieżnym. Przypomnijmy też, że ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest $\mathcal{I}$-zbieżny do x jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ mamy $\{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| > \varepsilon\} \in \mathcal{I}$.

Przypomnijmy także, że $\{0, 1\}^{<\mathbb{N}}$ jest zbiorem skończonych ciągów o wyrazach 0 lub 1. Jeśli $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \{0, 1\}^{<\mathbb{N}}$ oraz $x \in \{0, 1\}$, to poprzez $s\hat{\ }x$ oznaczamy ciąg $(s_1, s_2, \ldots, s_n, x)$. Jeśli $b = (b_1, b_2, \ldots) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ oraz $n \in \mathbb{N}$, to przez $b \restriction n$ oznaczamy skończony ciąg $(b_1, b_2, \ldots b_n)$.

Definicja 3.2.10. [17] Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem. Zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$ nazywamy *$\mathcal{I}$-małym* jeśli istnieją zbiory A_s ($s \in \{0, 1\}^{<\mathbb{N}}$), takie że dla każdego s mamy

1. $A_\emptyset = A$,
2. $A_s = A_{s\hat{\ }0} \cup A_{s\hat{\ }1}$,
3. $A_{s\hat{\ }0} \cap A_{s\hat{\ }1} = \emptyset$,
4. dla każdego $b \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ i $X \subseteq \mathbb{N}$, jeśli $X \setminus A_{b \restriction n} \in \mathcal{I}$ dla wszystkich n, to $X \in \mathcal{I}$.

W celu zbadania własności BW dla ideałów ważonej gęstości jednostajnej wykorzystamy opisaną przez Filipowa, Mrożka, Recława i Szucę w [20] następującą charakteryzację tejże własności.

Twierdzenie 3.2.11 ([20, Twierdzenie 3.3]). *$\mathcal{I}|A$ ma własność BW wtedy i tylko wtedy, gdy A nie jest zbiorem $\mathcal{I}$-małym.*

Twierdzenie 3.2.12. *Ideał ważonej gęstości jednostajnej $\mathcal{I}_c$ ma własność BW (FinBW) wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg (c_n) nie spełnia warunku U^m.*

Dowód. $\Leftarrow$: Jak (c_n) nie spełnia warunku U^m, ideał $\mathcal{I}_c$ nie jest gęsty na mocy twierdzenia 3.2.4. Wówczas istnieje $B \notin \mathcal{I}_c$, taki że $\mathcal{I}_c|B = \mathrm{Fin}$. Korzystając z klasycznego twierdzenie Bolzano-Weierstrassa, dla każdego ograniczonego ciągu $(x_n)_{n\in B}$ istnieje nieskończony $A \subseteq B$, taki że $(x_n)_{n\in A}$ jest zbieżny. Pokazuje to, że niegęste ideały mają własności BW i FinBW (wynika to także z twierdzenia 2.4 z [21]).

$\Rightarrow$: Na mocy powyższego twierdzenia wystarczy pokazać, że jak (c_n) spełnia warunek U^m, $\mathbb{N}$ jest zbiorem $\mathcal{I}_c$-małym. Niech $A_\emptyset = \mathbb{N}$, $A_0 = 2\mathbb{N}$, $A_1 = 2\mathbb{N}+1$. Dla ustalonego A_s, $s \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ zdefiniujemy zbiory $A_{s\frown 0}$ i $A_{s\frown 1}$ przez wybieranie do nich co drugiego elementu A_s. To znaczy, jeśli $s \in \{0,1\}^n$ i $A_s = 2^n\mathbb{N} + l$ dla pewnego $l \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, zdefiniujemy $A_{s\frown 0} = 2^{n+1}\mathbb{N} + l$, $A_{s\frown 1} = 2^{n+1}\mathbb{N} + l + 2^n$.

Weźmy dowolny $b \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ oraz zbiór $X \subseteq \mathbb{N}$ spełniający $X \setminus A_{b\restriction n} \in \mathcal{I}_c$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ $\overline{u}_c(A_{b\restriction n}) \leqslant \sup_{l\in\mathbb{N}} \frac{\max\{c_t : t\in[l,l+2^n]\}}{\mathbb{N}_c[l,l+2^n]}$, na mocy warunku U^m mamy $\lim_{n\to\infty} \overline{u}_c(A_{b\restriction n}) = 0$, zatem $X \in \mathcal{I}_c$. □

Przypomnijmy, że ideał $\mathcal{I}$ ma własność hBW (hFinBW) jeśli dla każdego $A \notin \mathcal{I}$ ideał $\mathcal{I}|A$ ma własność BW (FinBW).

Wniosek 3.2.13. *Ideał ważonej gęstości jednostajnej $\mathcal{I}_c$ ma własność hBW (hFinBW) wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{I}_c|A$ nie jest gęsty dla każdego $A \notin \mathcal{I}_c$.*

Dowód. $\Leftarrow$: Ideały niegęste mają własność BW (FinBW), więc w takim wypadku $\mathcal{I}_c$ ma własność hBW (hFinBW).

$\Rightarrow$: Jeśli $\mathcal{I}_c|A$ jest gęsty dla pewnego $A \notin \mathcal{I}_c$, to rozumowanie z twierdzenia 3.2.4 daje nam $\lim_{n\to\infty}\sup_{l\in\mathbb{N}} \frac{\max\{c_t : t\in[l,l+2^n]\cap A\}}{\mathbb{N}_c[l,l+2^n]} = 0$, więc powtarzając konstrukcję z twierdzenia 3.2.12 wykażemy, że A jest zbiorem $\mathcal{I}_c$-małym. Zatem $\mathcal{I}_c|A$ nie ma własności BW, czyli $\mathcal{I}_c$ nie ma własności hBW (hFinBW). □

Wszystkie dotychczasowe wyniki o gęstych ideałach ważonej gęstości jednostajnej sugerują, że posiadają one te same własności, co ideał $\mathcal{I}_u$. Niestety, pomimo wysiłków, nie udało nam się znaleźć przykładów gęstych ideałów ważonej gęstości jednostajnej innych niż $\mathcal{I}_u$ lub $\mathcal{I}_u \oplus \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Nasuwa nam to następujące przypuszczenie.

Problem 3.2.14. Czy wszystkie gęste ideały ważonej gęstości jednostajnej są izomorficzne z $\mathcal{I}_u$?

W dalszej części pracy uzyskamy wyniki (wniosek 3.2.21) mówiące, że powyższe pytanie ma twierdzącą odpowiedź, kiedy $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem nierosnącym.

Własności ważonej gęstości jednostajnej

W tej części rozprawy pokażemy kilka własności ważonej gęstości jednostajnej. Szczególnie będzie nas interesować gęstość ważona jednostajna oparta o monotoniczny ciąg wag, a także jej związki z klasyczną gęstościa jednostajną. Na koniec podamy charakteryzację własności Darboux dla ważonych gęstości jednostajnych.

Zaczniemy od wymienienia znanego wcześniej wyniku Grekosa i Giuliano porównującego różne ważone gęstości jednostajne.

Twierdzenie 3.2.15 ([26, Twierdzenie 3.5])**.** *Niech $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem wag spełniającym warunek U^m i niech $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie takim ciągiem wag, że $(c_n/d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem nierosnącym. Wówczas dla każdego $A\subseteq\mathbb{N}$ otrzymujemy*

$$\underline{u}_d(A)\leqslant\underline{u}_c(A)\leqslant\overline{u}_c(A)\leqslant\overline{u}_d(A).$$

Powyższe twierdzenie ma silniejsze założenia w oryginalnej pracy. Jednakże, w zamieszczonym tam dowodzie wykorzystano je tam jedynie raz, gdzie mogą być zastąpione przez warunek U^m.

Następujące fakty są prostymi wnioskami z twierdzenia 3.2.15.

Wniosek 3.2.16. *Niech $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie niemalejącym ciągiem wag. Wówczas $\mathcal{I}_c\subseteq\mathcal{I}_u$ i dla każdego $A\subseteq\mathbb{N}$ mamy*

$$\underline{u}_c(A)\leqslant\underline{u}(A)\leqslant\overline{u}(A)\leqslant\overline{u}_c(A).$$

Wniosek 3.2.17. *Niech $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie nierosnącym ciągiem wag spełniającym warunek U^m. Wówczas $\mathcal{I}_c\supseteq\mathcal{I}_u$ i dla każdego $A\subseteq\mathbb{N}$ mamy*

$$\underline{u}(A)\leqslant\underline{u}_c(A)\leqslant\overline{u}_c(A)\leqslant\overline{u}(A).$$

Zajmiemy się teraz pokazaniem, że $\mathcal{I}_c\subseteq\mathcal{I}_u$ dla wszystkich monotonicznych ciągów wag $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Lemat 3.2.18. *Niech $n\in\mathbb{N}$ będzie dowolne, zaś $h,k,l\in\mathbb{N}$ będą takie, że $k+2<l$ i $h=10^l$. Jeśli $A\subseteq\mathbb{N}$ spełnia $A[n,n+h)/h\geqslant 1/10^k$, to możemy znaleźć takie $m\leqslant n+h$, że dla każdego $s\leqslant 5\cdot 10^{l-k-1}$ mamy $A[m,m+s\cdot 2\cdot 10^k]\geqslant s+1$.*

Dowód. Przypuśćmy przeciwnie, że teza lematu nie jest spełniona dla odpowiednich $h,k,l,n\in\mathbb{N}$. Niech $I_t=[n+(t-1)\cdot 2\cdot 10^k, n+t\cdot 2\cdot 10^k))$ dla $1\leqslant t\leqslant 5\cdot 10^{l-k-1}$. Gdyby każdy $A\cap I_t$ był niepusty, teza lematu byłaby spełniona dla $m=\min A\cap I_T$, gdzie $T=\min\{t\leqslant 5\cdot 10^{l-k-1}: A(I_t)\geqslant 2\}$. Zatem musi istnieć jakiś przedział I_i rozłączny z A i spełniający $A(\bigcup_{n<i}I_n)\leqslant i$. Mamy teraz dwa przypadki:

Przypadek 1.: Dla każdego I_j, $j>i$, który jest rozłączny z A, mamy $A(\bigcup_{i<n<j}I_n)>j-i$. Wówczas wiemy, że $A(\bigcup_{n>i}I_n)<10^{l-k}-i-1$ (bo inaczej teza lematu byłaby spełniona dla $m=\min A\cap I_S$, gdzie $S=\min\{t>i: A(I_t)\geqslant 2\}$), co oznacza, że $A[n,n+h)<i+10^{l-k}-i-1<10^{l-k}$, co jest sprzeczne z faktem, że $A[n,n+h)\geqslant 10^{l-k}$.

Przypadek 2.: Istnieje I_j, $j > i$, rozłączny z A, taki że $A(\cup_{i<n<j} I_n) \leqslant j-i$. Powtarzamy wówczas powyższe rozumowanie poprzez rozważanie dwóch przypadków, tym razem dla I_j zamiast I_i. Po skończonej liczbie kroków otrzymamy w końcu pierwszy przypadek. Istniałby wtedy ciąg przedziałów $I_{j_1} = I_i, \ldots I_{j_q}$ rozłącznych z A, takich że $A(\cup_{i<n<j_q} I_n) \leqslant j_q - i$. Otrzymujemy wtedy $A[n, n+h) < i + 10^{l-k} - j_q - 1 + j_q - i < 10^{l-k}$, sprzeczność z faktem, że $A[n, n+h) \geqslant 10^{l-k}$. □

Twierdzenie 3.2.19. *Jeśli (c_n) jest nierosnącym ciągiem wag, to $\mathcal{I}_c \subseteq \mathcal{I}_u$.*

Dowód. Załóżmy, że $A \notin \mathcal{I}_u$. Wówczas istnieje taki $k \in \mathbb{N}$, że dla nieskończenie wielu $n, h \in \mathbb{N}$ mamy $A[n, n+h)/h \geqslant 1/10^{k-1}$. Możemy zauważyć, że istnieje wtedy także nieskończenie wiele $j, l \in \mathbb{N}$, takich że $A[j, j+10^l)/10^l \geqslant 1/10^k$, ponieważ jak $A[n, n+h)/h \geqslant 1/10^{k-1}$ dla $h \in [10^l, 10^{l+1}]$, to $A[n, n+h) \geqslant 10^{l-k+1}$, więc wewnątrz przedziału $[n, n+h)$ musi istnieć przedział $[j, j+10^l)$ spełniający $A[j, j+10^l) \geqslant 10^{l-k}$.

Na mocy powyższego lematu, jak $A[j, j+10^l)/10^l \geqslant 1/10^k$ dla pewnego $l > k+2$, to istnieje taki $m \leqslant j + 10^l$, że dla wszystkich $s \leqslant 5 \cdot 10^{l-k-1}$ mamy $A[m, m + s \cdot 2 \cdot 10^k] \geqslant s + 1$.

Skoro (c_n) jest nierosnący, nietrudno spostrzec, że

$$\frac{A_c[m, m+10^l]}{N_c[m, m+10^l]} \geqslant \frac{1}{2 \cdot 10^k}.$$

Zatem $A \notin \mathcal{I}_c$. □

Wniosek 3.2.20. *Jeśli (c_n) jest monotonicznym ciągiem wag, to $\mathcal{I}_c \subseteq \mathcal{I}_u$.*

Wniosek 3.2.21. *Jeśli $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest nierosnącym ciągiem wag spełniającym warunek U^m, to $\mathcal{I}_c = \mathcal{I}_u$.*

Przedstawimy teraz trochę zmienioną wersję lematu 3.2.18, dzięki której będziemy w stanie bezpośrednio porównać ważone gęstości jednostajne z klasyczną gęstością jednostajną.

Lemat 3.2.22. *Niech $a, b \in \mathbb{N}$. Niech $A \subseteq \mathbb{N}$ będzie taki, że dla pewnego przedziału I mamy $A(I)/|I| \geqslant a/b$. Wówczas możemy znaleźć takie $m \in I$, że $A[m, m+s \cdot b) \geqslant a \cdot s$ dla każdego $s \leqslant k(a, b, I)$, gdzie $k(a, b, I)$ dąży do nieskończoności jak a, b są stałe, a długość przedziału I dąży do nieskończoności.*

Dowód. Weźmy liczby naturalne a, b, zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$ oraz przedział $I = [c, d]$ spełniające $A(I)/|I| \geqslant a/b$. Niech $J_i = [c + (i-1) \cdot b, c + i \cdot b - 1]$ dla $i < |I|/b$ oraz $J_p = [\max J_{p-1} + 1, d]$ dla $p = \lceil |I|/b \rceil$. Łatwo widać, że $A(I) \geqslant a(p-1)$.

Jeśli dla każdego $i \leqslant p$ mamy $A(\bigcup_{n\leqslant i} J_n) \geqslant a \cdot i$, to nietrudno spostrzec, że teza lematu jest spełniona dla $m = c$ i $k(a, b, I) = p$.

Przypuśćmy więc, że istnieje $i \leqslant p$, taki że $A(\bigcup_{n\leqslant i} J_n) < a \cdot i$. Skonstruujemy teraz zbiór $L = \{l_1 = i < l_2 < \ldots < l_K\}$ w następujący sposób. Jeśli został już ustalony element l_j, definiujemy l_{j+1} jako najmniejszą liczbę naturalną większą od l_j, taką że $A(\bigcup_{l_{j+1}\geqslant n > l_j} J_n) < a(l_{j+1} - l_j)$.

Otrzymujemy teraz $A(\bigcup_{n\leqslant l_K} J_n) \leqslant a\cdot l_K - K$, więc $A(\bigcup_{n>l_K} J_n) \geqslant K$ i nie ma żadnych dalszych przeszkód, aby teza nie zachodziła dla $m = \min J_{l_K+1}$ oraz $k(a,b,I) \geqslant K/b - 1$. Zarazem, $\max(\{l_{j+1} - l_j : j < K\} \cup \{p - l_K\} \cup \{l_1\})$ jest nie mniejsze niż $p/(K+1)$. Wobec tego, teza lematu zachodzi dla odpowiedniego m (odpowiednio $\min J_{l_j+1}$, $\min J_{l_K+1}$ lub c, w zależności od tego, która liczba realizuje wcześniejsze maximum) i $k(a,b,I) \geqslant p/(K+1)$.

Ostatnią rzeczą potrzebną do zakończenia tego dowodu jest pokazanie, że $k(a,b,I)$ dąży do nieskończoności jak długość I dąży do nieskończoności, zaś a, b są stałe. W dotychczasowym rozumowaniu ustaliliśmy, że $k(a,b,I) \geqslant \max\{K/b-1, p/(K+1)\}$. Mamy dwa przypadki, K będzie ograniczone przez pewne $M \in \mathbb{N}$ lub będzie ono rosło do nieskończoności wraz z długością I. W pierwszym przypadku, $k(a,b,I) \geqslant p/(K+1)$, co dąży do nieskończoności, natomiast w drugim przypadku $k(a,b,I) \geqslant K/b - 1$ będzie dążyć do nieskończoności. □

Twierdzenie 3.2.23. *Niech $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie nierosnącym ciągiem wag spełniającym warunek U^m. Wówczas dla wszystkich $A \subseteq \mathbb{N}$ mamy*

$$\underline{u}_c(A) \leqslant \underline{u}(A) \leqslant \overline{u}(A) \leqslant \overline{u}_c(A).$$

Dowód. Musimy pokazać jedynie, że jak $\overline{u}(A) \geqslant \alpha$ to $\overline{u}_c(A) \geqslant \alpha$ dla dowolnego $A \subseteq \mathbb{N}$ i $\alpha \in (0,1]$. Weźmy $A \subseteq \mathbb{N}$, taki że $\overline{u}(A) \geqslant \alpha$ dla pewnego $\alpha \in (0,1]$. Wówczas dla wszystkich liczb naturalnych $a, b > 0$, takich że $a/b < \alpha$, istnieje nieskończenie wiele przedziałów $I_1, I_2, \ldots$, takich że $\lim_{n\to\infty} |I_n| = \infty$ i dla każdego I_n mamy $A(I_n)/|I_n| \geqslant a/b$.

Na mocy powyższego lematu, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ możemy znaleźć takie $m(n) \in I_n$, że $A[m(n), m(n) + s\cdot b) \geqslant a\cdot s$ dla wszystkich $s \leqslant k(n)$, gdzie $\lim_{n\to\infty} k(n) = \infty$. Zdefiniujmy $j_s^n = m(n) + (s-1)\cdot b$ oraz $J_s^n = [m(n) + (s-1)\cdot b, m(n) + s\cdot b)$. Żeby zakończyć dowód, pokażemy, że $A_c[m(n), m(n) + b\cdot k(n))/\mathbb{N}_c[m(n), m(n) + b\cdot k(n)) \geqslant a/b - \varepsilon_n$, gdzie $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Dzięki temu otrzymamy $\overline{u}_c(A) \geqslant a/b$ dla wszystkich $a/b < \alpha$, a zatem $\overline{u}_c(A) \geqslant \alpha$.

Ponieważ $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest nierosnący, wiemy, że $c_{j_l^n}/\mathbb{N}_c(J_l^n) \geqslant 1/b$ dla wszystkich $l \leqslant k(n)$ i spełniona jest nierówność

$$\frac{A_c[m(n), m(n) + b\cdot k(n))}{\mathbb{N}_c[m(n), m(n) + b\cdot k(n))} \geqslant \frac{a(c_{j_2^n} + \ldots + c_{j_{k(n)}^n})}{\mathbb{N}_c(J_1^n) + \mathbb{N}_c(J_2^n) + \ldots \mathbb{N}_c(J_{k(n)}^n)}.$$

Niech α_n będzie taką liczbą rzeczywistą, że $\mathbb{N}_c(J_1^n) = \alpha_n(\mathbb{N}_c(J_2^n) + \ldots + \mathbb{N}_c(J_{k(n)}^n))$. Wówczas prawa strona powyższej nierówności jest nie mniejsza niż $a/(b(1+\alpha_n) = a/b - \varepsilon_n$. Skoro $|J_1^n| = b$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, na mocy warunku U^m otrzymujemy $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, a więc $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. □

Wniosek 3.2.24. *Niech $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie nierosnącym ciągiem wag spełniającym warunek U^m. Wówczas dla każdego $A \subseteq \mathbb{N}$ mamy*

$$\underline{u}(A) = \underline{u}_c(A) \ i \ \overline{u}(A) = \overline{u}_c(A).$$

Kiedy $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nie spełnia warunku U^m, ideał $\mathcal{I}_c$ nie jest gęsty. Wynika stąd, że łatwo możemy znaleźć zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$ spełniający $\overline{u}_c(A) > 0$ i $u(A) = 0$. W takim razie, powyższa równość nie będzie zachodzić dla ciągów wag niespełniających warunku U^m. Jednakże, możemy zadać następujące pytanie.

Problem 3.2.25. Niech (c_n) będzie nierosnącym ciągiem wag. Czy dla każdego $A \subseteq \mathbb{N}$ spełnione jest

$$\underline{u}_c(A) \leqslant \underline{u}(A) \leqslant \overline{u}(A) \leqslant \overline{u}_c(A) \ ?$$

Na koniec tego rozdziału przedstawimy rozwiązanie problemu 7.3 postawionego w [49]. Dotyczy on znalezienia odpowiednich warunków koniecznych i dostatecznych, żeby ważona gęstość jednostajna miała własność Darboux, rozumianą jak w poniższej definicji.

Definicja 3.2.26. Mówimy, że u_c ma *własność Darboux* jeśli dla każdego zbioru $A \subseteq \mathbb{N}$ spełniającego $u_c(A) = \alpha > 0$ oraz dodatniej liczby $\beta < \alpha$, istnieje zbiór $B \subseteq A$, dla którego $u_c(B) = \beta$.

Zauważmy, że powyższa własność Darboux w przypadku ważonej gęstości jednostajnej jest równoważna definicji, gdzie dla wszystkich zbiorów $A \subseteq B$ spełniających $u_c(A) = \alpha < \beta = u_c(B)$ oraz dodatniej liczby $\gamma \in (\alpha, \beta)$, istnieje zbiór $A \subseteq C \subseteq B$, dla którego $u_c(C) = \gamma$. Rzeczywiście, wynika to z faktu, że znalezienie takiego zbioru C jest równoważne znalezieniu zbioru $D \subseteq B \setminus A$ spełniającego $u_c(D) = \gamma - \alpha$, gdyż $u_c(D \cup A) = u_c(D) + u_c(A) = \gamma$ ze względu na rozłączność zbiorów D i A.

Własnością Darboux w rozumieniu pierwszej definicji zajmowali się między innymi Grekos, Mišík oraz Šalát (por. [24], [29], [47], [49]), zaś własność Darboux w rozumieniu drugiej definicji była ostatnio badana przez Leonettiego i Tringaliego w [45].

W celu scharakteryzowania własności Darboux dla ważonych gęstości jednostajnych, potrzebne nam będzie poniższe twierdzenie Mačaja, Sleziaka i Tomy.

Twierdzenie 3.2.27 ([49, Twierdzenia 5.6,5.7])**.** *Niech $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem wag spełniającym warunek U^m. Wówczas dla dowolnego $A \subseteq \mathbb{N}$, którego rosnącym ponumerowaniem elementów jest $(a_1, a_2, \ldots)$, mamy*

$$u_c(A) = \lim_{k\to\infty} \sup_{\substack{p\in\mathbb{N}\\ k'\geqslant k}} \frac{A_c[a_p, a_{p+k'}]}{\mathbb{N}_c[a_p, a_{p+k'}]} = \lim_{k\to\infty} \inf_{\substack{p\in\mathbb{N}\\ k'\geqslant k}} \frac{A_c[a_p, a_{p+k'}]}{\mathbb{N}_c[a_p, a_{p+k'}]},$$

o ile $u_c(A)$ istnieje.

W [24] Gáliková, László i Šalát pokazali, że gęstość jednostajna u ma własność Darboux. Poniższe twierdzenie jest rozwiązaniem problemu 7.3 z [49].

Twierdzenie 3.2.28. *Niech $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem wag. Wówczas u_c ma własność Darboux $\iff$ $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia warunek U^m.*

Dowód. $\Rightarrow$: Przypuśćmy, że $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nie spełnia warunku U^m. Istnieje wtedy $\varepsilon > 0$, taki że dla nieskończenie wielu $h \in \mathbb{N}$ i pewnych $n \in \mathbb{N}$ otrzymamy $\frac{\max\{c_k : k\in(n,n+h)\}}{\mathbb{N}_c(n,n+h)} \geqslant \varepsilon$. Bez zmiany ogólności możemy założyć, że istnieje nieskończenie wiele takich maksymalnych c_k spełniających $|k-n| \geqslant |k-(n+h)|$. Możemy teraz dla każdego $\alpha \in (0,1)$ znaleźć taki $\varepsilon' > 0$, że kiedy $A_c(n,k)/\mathbb{N}_c(n,k) \in (\alpha-\varepsilon', \alpha+\varepsilon')$, to $A_c(n,k]/\mathbb{N}_c(n,k] \notin (\alpha-\varepsilon', \alpha+\varepsilon')$ dla wszystkich n, h, k jak powyżej. Zauważmy, że nieskończenie wiele z tych przedziałów $(n,k]$ ma długość $k-n \geqslant h/2$, gdzie h może być dowolnie duże. Zatem dla dowolnego $0 < \alpha < 1$ nie istnieje zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$ spełniający $u_c(A) = \alpha$.

$\Leftarrow$: Załóżmy, że $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia warunek U^m. Niech $A \subseteq \mathbb{N}$ będzie taki, że $u_c(A) = \alpha$ dla pewnego $\alpha > 0$, zaś $(a_1, a_2, \ldots\}$ niech będzie rosnącym ponumerowaniem jego elementów. Weźmy $\beta \in (0,\alpha)$. Szukamy takiego $B \subseteq A$, że $u_c(B) = \beta$. Wprowadźmy oznaczenia $\delta_c(I) = B_c(I)/A_c(I)$ oraz $\gamma = \beta/\alpha$. Dzięki warunkowi U^m, powyższe twierdzenie zachodzi, więc uzyskujemy

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\substack{p\in\mathbb{N}\\ k'\geqslant k}} \frac{A_c[a_p, a_{p+k'}]}{\mathbb{N}_c[a_p, a_{p+k'}]} = \lim_{k\to\infty} \inf_{\substack{p\in\mathbb{N}\\ k'\geqslant k}} \frac{A_c[a_p, a_{p+k'}]}{\mathbb{N}_c[a_p, a_{p+k'}]} = \alpha.$$

Żeby zakończyć dowód, musimy skonstruować zbiór $B \subseteq A$, taki że $(b_1, b_2, \ldots)$ będzie rosnącym ponumerowaniem jego elementów oraz

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\substack{p\in\mathbb{N}\\ k'\geqslant k}} \delta_c[b_p, b_{p+k'}] = \lim_{k\to\infty} \inf_{\substack{p\in\mathbb{N}\\ k'\geqslant k}} \delta_c[b_p, b_{p+k'}] = \frac{\beta}{\alpha} = \gamma.$$

Po pierwsze, na mocy warunku U^m możemy znaleźć $K_1 \in \mathbb{N}$, takie że dla wszystkich $k \geqslant K_1$ oraz $p \in \mathbb{N}$ spełniona będzie nierówność $\max\{c_t : t \in [a_{p+1}, a_{p+k}]\}/A_c[a_{p+1}, a_{p+k}] < 1/10$. Możemy teraz skonstruować pierwszą część zbioru B przez znalezienie podzbioru $A \cap [a_1, a_{K_1}]$ spełniającego $\delta_c[a_1, a_{K_1}] \in (\gamma - 1/10, \gamma + 1/10)$.

Następnie znajdujemy k_2, takie że dla każdego $k \geqslant k_2$ i $p \in \mathbb{N}$ mamy $\max\{c_t : t \in [a_{p+1}, a_{p+k}]\}/A_c[a_{p+1}, a_{p+k}] < 1/100K_1$. Wtedy wybieramy jako K_2 najmniejszą wielokrotność K_1 większą od k_2. Zauważmy, że $K_2 > 100K_1$.

Załóżmy, że skonstruowaliśmy B na przedziale $[a_1, a_{lK_1}]$ dla pewnego $l \in \mathbb{N}$ oraz $\delta_c[a_1, a_{lK_1}] \geqslant \gamma$ (odpowiednio $< \gamma$). Jeśli $(l+1)K_1 \leqslant K_2$, konstruujemy zbiór B na zbiorze $[a_{lK_1+1}, a_{(l+1)K_1}]$ w taki sposób, że $\delta_c[a_{lK_1+1}, a_{(l+1)K_1}] \in (\gamma - 1/10, \gamma]$ (odpowiednio $[\gamma, \gamma + 1/10)$).

Pokażemy, że $\delta_c[a_1, a_{K_2}] \in (\gamma - 1/100, \gamma + 1/100)$. Załóżmy przeciwnie, że $\delta_c[a_1, a_{K_2}] \geqslant \gamma + 1/100$. Znajdujemy teraz największe $l \leqslant K_2/K_1$, dla którego $\delta_c[a_{lK_1+1}, a_{(l+1)K_1}] > \gamma$. Wówczas $\delta_c[a_1, a_{lK_1}] < \gamma$ oraz $\delta_c[a_{(l+1)K_1}, a_{K_2}] \leqslant \gamma$. Rozważając wspólnie te wszystkie nierówności, otrzymujemy

$$\frac{B_c[a_{lK_1+1}, a_{(l+1)K_1}]}{A_c[a_1, a_{K_2}]} = \delta_c[a_1, a_{K_2}] - \frac{B_c[a_1, a_{lK_1}]}{A_c[a_1, a_{K_2}]} - \frac{B_c[a_{(l+1)K_1+1}, a_{K_2}]}{A_c[a_1, a_{K_2}]} > \gamma + \frac{1}{100} - \gamma,$$

sprzeczność z faktem, że $A_c[a_{lK_1+1}, a_{(l+1)K_1}]/A_c[a_1, a_{K_2}] < 1/100$ dla $l \leqslant K_2/K_1$. W podobny sposób dojdziemy do sprzeczności w przypadku, gdy $\delta_c[a_1, a_{K_2}] \leqslant \gamma - 1/100$.

Kontynuujemy konstrukcję w następujący sposób. Po zdefiniowaniu $B \cap [a_1, a_{K_n}]$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, znajdujemy k_{n+1}, takie że dla wszystkich $k \geqslant k_{n+1}$ i $p \in \mathbb{N}$ mamy $\max\{c_t : t \in [a_{p+1}, a_{p+k}]\}/A_c[a_{p+1}, a_{p+k}] < 1/10^{n+1}K_n$. Wybieramy wtedy jako K_{n+1} najmniejszą wielokrotność K_n większą od k_{n+1}. Zauważmy, że $K_{n+1} > 10^{n+1}K_n$.

Przypuśćmy teraz, że skonstruowaliśmy zbiór B na przedziale $[a_1, a_{lK_n}]$ dla pewnego $l \in \mathbb{N}$ oraz $\delta_c[a_1, a_{lK_n}] \geqslant \gamma$ (odpowiednio $< \gamma$). Jeśli $(l+1)K_n \leqslant K_{n+1}$, konstruujemy B na zbiorze $[a_{lK_n+1}, a_{(l+1)K_n}]$ w podobny sposób do $B \cap [a_1, a_{K_n}]$(tworzymy go poprzez konstrukcję odpowiednich przedziałów $[a_{rK_{n-1}+1}, a_{(r+1)K_{n-1}}]$ w taki sam sposób jak przedział $[a_1, a_{K_{n-1}}]$, które z kolei są skonstruowane przez budowę przedziałów $[a_{sK_{n-2}+1}, a_{(s+1)K_{n-2}}]$ w taki sam sposób jak przedziały $[a_1, a_{K_{n-2}}]$, itd.), upewniając się cały czas, że $\delta_c[a_{lK_n+1}, a_{(l+1)K_n}] \in (\gamma - 1/10^n, \gamma]$ (odpowiednio $[\gamma, \gamma + 1/10^n)$). Korzystając z tej samej argumentacji jak poprzednio, otrzymujemy $\delta_c[a_1, a_{K_{n+1}}] \in (\gamma - 1/10^{n+1}, \gamma + 1/10^{n+1})$.

Powtarzając indukcyjnie konstrukcję zbioru B na przedziale $[a_1, a_{K_n}]$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ otrzymamy pożądany zbiór B. Weźmy $\varepsilon > 0$. Pozostaje nam pokazać, że istnieje $K \in \mathbb{N}$, takie że dla wszystkich $k \geqslant K$ i $p \in \mathbb{N}$ otrzymamy $\delta_c[b_p, b_{p+k}] \in (\gamma - \varepsilon, \gamma + \varepsilon)$.

Niech $n \in \mathbb{N}$ będzie taki, że $\varepsilon/2 > 1/10^n$. Weźmy $K = K_{n+1} + 2K_n$. Wówczas dla wszystkich $k \geqslant K$ przedział $I = [b_p, b_{p+k}]$ zawiera pewną liczbę przedziałów $[a_{lK_n}, a_{(l+1)K_n}]$ (oznaczmy sumę tych przedziałów jako J) i co najwyżej dwie niekompletne części takich przedziałów. Jednakże, takie niekompletne przedziały mają całościowo nieduży wpływ na przedział I, ponieważ $A_c[a_{lK_n}, a_{(l+1)K_n}]/A_c(J) < 1/10^{n+1}$ dla wszystkich l, takich że $[a_{lK_n}, a_{(l+1)K_n}]$ sąsiaduje z J. Otrzymujemy więc

$$\frac{B_c(J)}{A_c(J)(1 + 2/10^{n+1})} < \delta_c(I) < \frac{B_c(J) + 2A_c(J)/10^{n+1}}{A_c(J)}.$$

Ponieważ wiemy, że $\delta_c[a_{lK_n}, a_{(l+1)K_n}] \in (\gamma - 1/10^n, \gamma + 1/10^n)$, mamy $\delta_c(J) \in (\gamma - 1/10^n, \gamma + 1/10^n)$. Wobec tego, prawa strona powyższej nierówności jest nie większa niż $\gamma + 1/10^n + 2/10^{n+1}$, co jest nie większe niż $\gamma + \varepsilon$. Z drugiej strony, lewa strona nierówności jest nie mniejsza niż $(\gamma - 1/10^n)/(1 + 2/10^{n+1})$, co jest nie mniejsze niż $\gamma - \varepsilon$. $\square$

Na podstawie obserwacji powyższego dowodu, nietrudno dokonać następującego spostrzeżenia.

Uwaga. *Niech $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem wag. Wówczas u_c ma własność Darboux $\iff$ u_c może przyjąć inne wartości niż* 0 *lub* 1.

Rozdział 4

Gęstości podzbiorów liczb naturalnych

W poniższym rozdziale zajmiemy się kilkoma rodzajami gęstości podzbiorów $\mathbb{N}$. Przyjrzymy się różnym pojęciom związanym z gęstościami oraz odpowiemy na kilka pytań postawionych przez Giuliano, Grekosa i Mišíka w [25]. Wyniki przedstawiane w tym rozdziale zostały opisane w pracy autora rozprawy [62].

Gęstość ogólnie rozumie się jako funkcję określoną na podzbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, taką że $f(\emptyset) = 0$, $f(\mathbb{N}) = 1$ i dla wszystkich $A, B \subseteq \mathbb{N}$, dla których $f(A), f(B)$ są określone oraz $A \subseteq B$, mamy $f(A) \leqslant f(B)$. Nie będziemy jednak w naszych rozważaniach zajmowali się ogólną definicją gęstości, zamiast tego skupimy się na kilku wybranych rodzajach gęstości opisanych poniżej.

Przypomnijmy wprowadzoną już w poprzednim rozdziale gęstość jednostajną.

Definicja 4.0.1. *Górną gęstość jednostajną* zbioru $A \subseteq \mathbb{N}$ definiujemy jako

$$\overline{u}(A) = \lim_{h\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \frac{A[n, n+h]}{\mathbb{N}[n, n+h]},$$

zaś jego *dolna gęstość jednostajna* jest dana wzorem

$$\underline{u}(A) = \lim_{h\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \frac{A[n, n+h]}{\mathbb{N}[n, n+h]}.$$

Kiedy $\overline{u}(A) = \underline{u}(A)$, będziemy oznaczali tę wartość przez $u(A)$ i nazywali ją *gęstością jednostajną* zbioru $A \subseteq \mathbb{N}$.

Przypomnijmy kolejną gęstość pojawiającą się wcześniej w tej pracy w kontekście ideałów, czyli gęstość asymptotyczną.

Definicja 4.0.2. Dla $A \subseteq \mathbb{N}$ i $n \in \mathbb{N}$, wprowadźmy oznaczenie $d_n(A) = A(n)/n$. Zdefiniujmy *górną gęstość asymptotyczną* zbioru $A \subseteq \mathbb{N}$ jako

$$\overline{d}(A) = \limsup_{n\to\infty} d_n(A),$$

zaś jego *dolna gęstość asymptotyczna* jest dana wzorem

$$\underline{d}(A) = \liminf_{n\to\infty} d_n(A).$$

Kiedy $\overline{d}(A) = \underline{d}(A)$, będziemy oznaczali tę wartość przez $d(A)$ i nazywali ją *gęstością asymptotyczną* zbioru $A \subseteq \mathbb{N}$.

Obie gęstości powyżej można uogólnić poprzez wprowadzenie dodatniego ciągu wag $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spełniającego $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n = \infty$. Rozważając w powyższych definicjach $A_c[n, n+h]/\mathbb{N}_c[n, n+h]$ zamiast $A[n, n+h]/\mathbb{N}[n, n+h]$ oraz $A_c(n)/\mathbb{N}_c(n)$ zamiast $d_n(A)$, uzyskamy definicje *ważonej gęstości jednostajnej* u_c (omówionej szerzej w poprzednim rozdziale) oraz *gęstości ważonej* d_c wprowadzonej przez Alexandera w [1]. W przypadku tej ostatniej, będziemy dodatkowo zakładali, że jej ciąg wag spełnia

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{\sum_{i\leqslant n} c(i)} = 0.$$

Następną klasyczną gęstością podzbiorów liczb naturalnych jest gęstość logarytmiczna.

Definicja 4.0.3. Dla $A \subseteq \mathbb{N}$ i $n \in \mathbb{N}$ wprowadźmy oznaczenie

$$\delta_n(A) = \left(\sum_{i\in A, i\leqslant n} \frac{1}{i}\right) \Big/ \left(\sum_{i\leqslant n} \frac{1}{i}\right).$$

Górną gęstość logarytmiczną zbioru $A \subseteq \mathbb{N}$ definiujemy jako

$$\overline{\delta}(A) = \limsup_{n\to\infty} \delta_n(A),$$

natomiast jego *dolna gęstość logarytmiczna* jest dana wzorem

$$\underline{\delta}(A) = \liminf_{n\to\infty} \delta_n(A).$$

Poniższe gęstości zostały wprowadzone przez Pólyę w [54].

$$\overline{\overline{d}}(A) = \lim_{\theta\to 1^-} \limsup_{n\to\infty} \frac{A(n) - A(\theta n)}{(1-\theta)n},$$

$$\underline{\underline{d}}(A) = \lim_{\theta\to 1^-} \liminf_{n\to\infty} \frac{A(n) - A(\theta n)}{(1-\theta)n}.$$

Pólya nazywa je odpowiednio *maksymalną* i *minimalną* gęstością zbioru $A \subseteq \mathbb{N}$.

Można zauważyć (por. [54, Twierdzenie 8]), że

$$\underline{\underline{d}}(A) = \sup\{d(B) : B \subseteq A\}, \quad \overline{\overline{d}}(A) = \inf\{d(B) : B \supseteq A\}.$$

Warto zwrócić uwagę na to, że dla każdego $A \subseteq \mathbb{N}$ mamy $\overline{d}(A) = 1 - \underline{d}(\mathbb{N} \setminus A)$, $\overline{u}(A) = 1 - \underline{u}(\mathbb{N} \setminus A)$, $\overline{\delta}(A) = 1 - \underline{\delta}(\mathbb{N} \setminus A)$, $\overline{\overline{d}}(A) = 1 - \underline{\underline{d}}(\mathbb{N} \setminus A)$.

Powszechnie wiadomo (dowód nietrywialnych nierówności można znaleźć np. w [53], 70–75, 95–96), że dla każdego $A \subseteq \mathbb{N}$ mamy

$$\underline{u}(A) \leqslant \underline{\underline{d}}(A) \leqslant \underline{d}(A) \leqslant \underline{\delta}(A) \leqslant \overline{\delta}(A) \leqslant \overline{d}(A) \leqslant \overline{\overline{d}}(A) \leqslant \overline{u}(A).$$

Wprowadźmy jeszcze dodatkowe, nieformalne pojęcia, które uproszczą nasze rozważania w dalszej części rozdziału.

Definicja 4.0.4. Mówimy, że stosunek dwóch liczb naturalnych a/b jest *około* α jeśli $a/b \in [\alpha - 2/b, \alpha + 2/b]$.

W kolejnych podrozdziałach będziemy konstruowali zbiór A na przedziale I w taki sposób, że $|A \cap I|/|I|$ będzie około α, a *elementy A będą rozmieszczone na I w sposób regularny.* Oznaczać to będzie, że dla każdego $x \in I$, $x < \max I$, spełnione będzie $x \in A \iff \lfloor (x+1-\min I)\cdot\alpha \rfloor > \lfloor x - \min I \cdot \alpha \rfloor$. Ponadto, $\max I$ będzie należało do A wtedy i tylko wtedy, gdy $|I|\cdot\alpha - \lfloor (|I|-1)\cdot\alpha \rfloor \geqslant 1/2$.

Przybliżając intuicyjnie treść powyższego akapitu, jeśli na przykład $\alpha = 1/3$, to taki zbiór A na przedziale I będzie się składał z co trzeciego elementu I. Natomiast jeśli $\alpha = 2/7$, to w każdym kolejnym podprzedziale I długości 7 (czyli $[\min I, \min I + 6]$, $[\min I + 7, \min I + 13]$, itd.) będą dokładnie dwa elementy należące do A.

4.1 Funkcje dystrybucji

W poniższej części doktoratu będziemy zajmowali się funkcjami dystrybucji ciągów stosunków. Przede wszystkim będzie nas interesować kiedy ciąg stosunków ma jednorodną dystrybucję. Rozwiążemy kilka powiązanych z tym tematem pytań postawionych w [25].

Wykorzystanie teorii dystrybucji przy pomocy ciągów stosunków w celu zbadania dystrybucyjnych własności podzbiorów liczb naturalnych zostało zapoczątkowane przez Straucha i Tótha w [60] w celu rozwinięcia badań Šaláta z [65], a następnie kontynuowane przez nich w [30], [2] i [3]. Dystrybucją podobnie definiowanych ciągów zajmował się jednak także Schoenberg już w latach dwudziestych dwudziestego wieku (por. [55]), choć badał je przy użyciu innych środków i terminologii. Ich wyniki wpisują się w badania nad funkcjami dystrybucji ciągów rzeczywistych modulo 1. Badania na temat funkcji dystrybucji zawsze dotyczą zbiorów nieskończonych, więc we wszystkich poniższych definicjach i rozważaniach będziemy zakładali, że zbiór X jest nieskończony.

Definicja 4.1.1. Niech $X \subseteq \mathbb{N}$ i niech $(x_1, x_2, \ldots)$ będzie jego rosnącym ponumerowaniem elementów. Wówczas *ciągiem stosunków* nazywamy ciąg $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dany wzorem

$$X_n = \left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_n}{x_n}\right)$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Definicja 4.1.2. *Funkcją dystrybucji* będziemy nazywać niemalejącą funkcję $g : [0,1] \to [0,1]$, dla której $g(0) = 0$ oraz $g(1) = 1$.

Poniżej przedstawiamy znany fakt o zbiorze funkcji dystrybucji.

Fakt. *Zbiór wszystkich funkcji dystrybucji $\mathcal{D}$ wraz z metryką $\mathcal{L}^2$ (utożsamiamy funkcje równe sobie na wspólnych punktach ciągłości, a więc różniące się między sobą na zbiorze miary zero) jest przestrzenią zwartą.*

Dowód. Twierdzenie Helly'ego (por. twierdzenie 1 na stronie 20 w [46]) mówi, że dla każdego określonego na przedziale ciągu funkcji monotonicznych i wspólnie ograniczonych istnieje podciąg punktowo zbieżny. Na podstawie twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej, podciąg ten jest zbieżny także w metryce $\mathcal{L}^2$. $\square$

Definicja 4.1.3. Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem stosunków. Dla danego $n \in \mathbb{N}$ rozważmy *schodkową funkcję dystrybucji* daną wzorem

$$F(X_n, x) = \frac{|\{i \leqslant n : \frac{x_i}{x_n} < x\}|}{n}$$

dla każdego $x \in [0, 1]$.

Zbiorem funkcji dystrybucji ciągu stosunków $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy zbiór $G(X_n)$ składający się z punktów skupienia ciągu funkcyjnego w metryce $\mathcal{L}^2$.

Dzięki zwartości $\mathcal{D}$, zbiór $G(X_n)$ jest zawsze domknięty i niepusty. Warto także zwrócić uwagę na podstawowe własności zbioru funkcji dystrybucji znalezione w pierwszej pracy Straucha i Tótha na ten temat.

Twierdzenie 4.1.4 ([60, Twierdzenie 6.2])**.** *Niech $\underline{d}(X) > 0$. Wówczas dla każdych $g \in G(X_n)$, $x \in [0, 1]$ mamy*

$$\frac{\underline{d}(X)}{\overline{d}(X)} x \leqslant g(x) \leqslant \frac{\overline{d}(X)}{\underline{d}(X)} x.$$

Ponadto, każda funkcja $g \in G(X_n)$ jest wtedy ciągła.

Definicja 4.1.5. Mówimy, że zbiór X i ciąg stosunków $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mają *jednorodną dystrybucję* jeśli $G(X_n) = \{id_{[0,1]}\}$.

Przykład 4.1.6. *Każdy zbiór o niezerowej gęstości asymptotycznej ma jednorodną dystrybucję.*

Przykład 4.1.7. *Zbiór liczb pierwszych P jest przykładem zbioru o gęstości asymptotycznej zero z jednorodną dystrybucją.*

Przykład 4.1.8. *Zbiór $X = \{n! : n \in \mathbb{N}\}$ jest zbiorem o gęstości asymptotycznej zero bez jednorodnej dystrybucji, gdyż $\chi_{(0,1]} \in G(X_n)$.*

Charakteryzację, kiedy ciąg stosunków ma jednorodną dystrybucję, znalazł już Schoenberg w [55] przy pomocy kryterium Weyla.

Twierdzenie 4.1.9 ([55, (7)])**.** *X ma jednorodną dystrybucję wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $l \in \mathbb{N}$ mamy*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i l \frac{x_k}{x_n}} = 0.$$

Jednakże, ze względu na trudności z zastosowaniem tej charakteryzacji, nadal starano się (por. [25], [60]) znaleźć jakąś łatwiejszą do sprawdzenia charakteryzację ciągów o jednorodnej dystrybucji. Z tego powodu Giuliano, Grekos i Mišík postawili w [25] kilka hipotez dotyczących tego problemu. Jedna z nich przedstawia się następująco.

Hipoteza ([25, Hipoteza 4]). *Niech $\overline{d}(X) > 0$. Wówczas X ma jednorodną dystrybucję wtedy i tylko wtedy, gdy $\theta(X) = 0$, gdzie*

$$\theta(X) = \inf\left\{\theta > 0 : \exists N\ \forall n > N\ \forall k, l \in (\theta n, n) : \left|\frac{X(k)}{k} - \frac{X(l)}{l}\right| < \theta\right\}.$$

Poniższy przykład pokazuje, że ta hipoteza nie jest prawdziwa. Potem udowodnimy jednak, że będzie ona spełniona dla wszystkich zbiorów o dodatniej dolnej gęstości asymptotycznej.

Przykład 4.1.10. *Istnieje zbiór X o dodatniej górnej gęstości asymptotycznej, dla którego powyższa hipoteza nie jest prawdziwa.*

Dowód. Niech $i_1 = 10$ oraz $i_n = i_{n-1} + 10^n$ dla $n > 1$. Niech $I_0 = [1, 10]$. Konstruujemy zbiór X w następujący sposób. Po pierwsze, niech 1 należy do X, zaś pozostałe liczby nie większe od 10 nie należą do X, czyli $d_{10}(X) = 1/10$. Dla $0 < n < i_1$, niech I_n będą następującymi po sobie, rozłącznymi przedziałami, takimi że $\max I_n = 10 \max I_{n-1}$. Potem, dla $n < i_1$ rozmieszczamy w sposób regularny elementy X na przedziale I_n w taki sposób, że $d_{\max I_n}(X) = d_{\max I_{n-1}}(X) - 1/100$. Zauważmy, że $d_{\max I_{i_1-1}}(X) = 1/100$.

Następnie konstruujemy I_n dla $n \in [i_1, i_2]$ jako następujące po sobie, rozłączne przedziały, takie że $\max I_n = 100 \max I_{n-1}$. Weźmy wtedy $X \cap I_{i_1} = \emptyset$ i skonstruujmy zbiór X na przedziale I_{i_1+1} poprzez regularne rozmieszczenie jego elementów na tym przedziale, w taki sposób, że $d_{\max I_{i_1+1}}(X) = 1/1000$. Później, dla $i_1 + 1 < n \leqslant i_2$, rozmieszczamy regularnie elementy X na przedziale I_n, w taki sposób, że $d_{\max I_n}(X) = d_{\max I_{n-1}}(X) + 1/1000$. Zauważmy, że $d_{\max I_{i_2}} = 1/10$.

Kontynuujemy konstrukcję w sposób indukcyjny. Przypuśćmy, że dla pewnego parzystego k mamy skonstruowane przedziały I_n dla $n \leqslant i_k$ oraz zbiór X na tych przedziałach, a zarazem $d_{\max I_{i_k}}(X) = 1/10$. Wówczas, dla $i_k < n < i_{k+1}$, niech I_n będą następującymi po sobie, rozłącznymi przedziałami spełniającymi $\max I_n = 10^{k+1} \max I_{n-1}$. Następnie, dla $i_k < n < i_{k+1}$, rozmieszczamy regularnie elementy X na przedziale I_n, w taki sposób, że $d_{\max I_n}(X) = d_{\max I_{n-1}}(X) - 1/10^{k+2}$. Zauważmy, że $d_{\max I_{i_{k+1}-1}}(X) = 1/10^{k+2}$.

Kontynuując konstrukcję, tworzymy przedziały I_n dla $n \in [i_{k+1}, i_{k+2}]$ jako następujące po sobie, rozłączne przedziały, takie że $\max I_n = 10^{k+2} \max I_{n-1}$. Weźmy wtedy $X \cap I_{i_{k+1}} = \emptyset$ i skonstruujmy zbiór X na przedziale $I_{i_{k+1}+1}$ poprzez regularne rozmieszczenie jego elementów na tym przedziale, w taki sposób, że $d_{\max I_{i_{k+1}+1}}(X) = 1/10^{k+3}$. Później, dla $i_{k+1} + 1 < n \leqslant i_{k+2}$, rozmieszczamy regularnie elementy X na przedziale I_n, w taki sposób, że $d_{\max I_n}(X) = d_{\max I_{n-1}}(X) + 1/10^{k+3}$. Zauważmy, że $d_{\max I_{i_{k+2}}} = 1/10$.

Łatwo widać, że $\overline{d}(X) = 1/10$ i $\underline{d}(X) = 0$. Pokażemy teraz, że $\theta(X) = 0$ oraz $G(X_n) \neq \{id_{[0,1]}\}$.

Weźmy dowolne $\theta > 0$. Istnieje wtedy takie $k \in \mathbb{N}$, że $\theta > 1/10^k$. Wówczas dla każdego $n > \max I_{i_k+1}$, jeśli $n \in I_l$ dla pewnego $l \in \mathbb{N}$, to albo $\lceil \theta n \rceil \in I_l$ albo $\lceil \theta n \rceil \in I_{l-1}$, gdyż $\max I_m \geqslant 10^{k+1} \max I_{m-1}$ dla wszystkich $m > i_k$. Weźmy dowolne $a, b \in (\theta n, n)$, $a > b$, $b \in I_l$ dla pewnego $l > i_k$. Ponieważ X został skonstruowany w sposób regularny na przedziale I_l, jego elementy są rozłożone równomiernie, więc $|d_a(X) - d_b(X)| < 2/10^{k+2} < \theta$ jeśli a należy do I_l. Gdyby a należał do I_{l+1}, otrzymalibyśmy

$$|d_a(X) - d_b(X)| \leqslant |d_a(X) - d_{\max I_l}(X)| + |d_b(X) - d_{\max I_l}(X)| \leqslant \frac{2}{10^{k+2}} + \frac{2}{10^{k+2}},$$

co jest mniejsze niż θ. Zatem $\theta(X) = 0$.

Niech $x_{n_k} = \min X \cap I_{i_{2k+1}+1}$, czyli niech x_{n_k} będzie najmniejszym elementem X następującym po k-tym przedziale rozłącznym z X. Ponieważ $\max I_{i_{2k+1}} = 10^{2k+2} \max I_{i_{2k+1}-1}$, $x_i/x_{n_k} < 1/10^{2k+2}$ dla każdego $i < n_k$, a więc dostajemy $F(X_{n_k}, x) = (n_k - 1)/n_k$ dla wszystkich $x \geqslant 1/10^{2k+2}$. Zatem $\lim_{k\to\infty} F(X_{n_k}, x) = \chi_{(0,1]} \in G(X_n)$. □

Twierdzenie 4.1.11. *Niech* $\underline{d}(X) > 0$. *Wówczas* $\theta(X) = 0 \iff G(X_n) = \{id_{[0,1]}\}$.

Dowód. $\Rightarrow$: Niech $\underline{d}(X) = \alpha > 0$. Wiemy, że dla każdego $m \in \mathbb{N}$ możemy znaleźć takie $N_m \in \mathbb{N}$, że dla wszystkich $n > N_m$, $k \in (n/m, n)$ będziemy mieli $|d_n(X) - d_k(X)| < 1/m$. Weźmy dowolne $m \in \mathbb{N}$ i pewne $x_n \in X$, takie że $x_n > N_m$. Wprowadźmy oznaczenie $d_{x_n}(X) = \gamma$. Wówczas

$$F(X_n, x) = \frac{|\{i \in \mathbb{N} : x_i/x_n < x\}|}{n} = \frac{|\{i \in \mathbb{N} : x_i < x_n \cdot x\}|}{\gamma \cdot x_n}.$$

Kiedy $x > 2/m$, $\lceil x_n \cdot x - 1 \rceil \in (x_n/m, x_n)$, więc $|d_{x_n}(X) - d_{\lceil x_n \cdot x - 1 \rceil}(X)| < 1/m$. Oznacza to, że $|\{i \in \mathbb{N} : x_i < x_n \cdot x\}| = d_{\lceil x_n \cdot x - 1 \rceil}(X) \cdot \lceil x_n \cdot x - 1 \rceil \in ((\gamma - 1/m) \cdot \lceil x_n \cdot x - 1 \rceil, (\gamma + 1/m) \cdot \lceil x_n \cdot x - 1 \rceil)$. Zatem

$$x - \frac{1}{x_n} - \frac{x}{m\gamma} + \frac{1}{m\gamma x_n} < F(X_n, x) < x - \frac{1}{x_n} + \frac{x}{m\gamma} - \frac{1}{m\gamma x_n}$$

dla $x > 2/m$.

Zwróćmy uwagę, że skoro $\underline{d}(X) = \alpha > 0$, $\limsup_{n\to\infty} F(X_n, x) \leqslant x(1 + 1/m\alpha)$ i $\liminf_{n\to\infty} F(X_n, x) \geqslant x(1 - 1/m\alpha)$ dla $x > 2/m$. Ponieważ m jest dowolną liczbą naturalną, a $F(X_n, 0)$ jest zawsze równy 0, otrzymujemy $\lim_{n\to\infty} F(X_n, x) = x$ dla wszystkich $x \in [0, 1]$. Zatem $G(X_n) = \{id_{[0,1]}\}$.

$\Leftarrow$: Przypuśćmy, że $\theta(X) > 0$. Oznacza to, że istnieje $\theta > 0$, taka że istnieje nieskończenie wiele naturalnych n, dla których możemy znaleźć $k, l \in (\theta n, n)$, $k > l$, $k \in X$, takie że $|d_k(X) - d_l(X)| > \theta$. Zauważmy, że warunek $k \in X$ może być spełniony, ponieważ możemy znaleźć takie $\theta > 0$, że $X \cap (\theta n, n)$ prawie nigdy nie jest zbiorem pustym (ponieważ w przeciwnym razie $\underline{d}(X) < \theta$ dla wszystkich $\theta > 0$, sprzeczność z $\underline{d}(X) > 0$), więc w najgorszym razie znajdziemy odpowiedni x w przedziale $[n, n/\theta)$ i potem zamienimy θ na $\theta' = \theta^2$. Ponieważ dla tych k, l mamy $l/k \in (\theta, 1)$, możemy znaleźć pewne $\delta \in [\theta, 1)$ i ciąg $(k_n, l_n)_{n\in\mathbb{N}}$, takie że $\lim_{n\to\infty} l_n/k_n = \delta$, $k_n \in X$, $|d_{k_n}(X) - d_{l_n}(X)| > \theta$ i $d_{k_n}(X) - d_{l_n}(X)$ jest tego samego znaku dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Niech $x_{i_n} = k_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$F(X_{i_n}, \delta) = \frac{|\{i \in \mathbb{N} : x_i < k_n \cdot \delta\}|}{i_n} = \frac{d_{\lceil k_n\cdot\delta-1\rceil}(X) \cdot \lceil k_n \cdot \delta - 1\rceil}{d_{k_n}(X) \cdot k_n},$$

a więc

$$\lim_{n\to\infty} F(X_{i_n}, \delta) = \lim_{n\to\infty} \frac{d_{l_n}(X) \cdot l_n}{d_{k_n}(X) \cdot k_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{d_{l_n}(X)}{d_{k_n}(X)} \cdot \frac{l_n}{k_n}.$$

Wiemy, że l_n/k_n zbiega do δ. Jednakże, $d_{l_n}(X)/d_{k_n}(X)$ jest albo nie mniejsze niż $1+\theta$ (jak $d_{k_n}(X) - d_{l_n}(X)$ jest ujemne) albo nie większe niż $1/(1+\theta)$ (jak $d_{k_n}(X) - d_{l_n}(X)$ jest dodatnie), więc ciąg $(d_{l_n}(X)/d_{k_n}(X))$ nie jest zbieżny do 1. Wobec tego, na mocy zwartości $\mathcal{D}$ istnieje podciąg (i_n) spełniający $g(x) = \lim_{n\to\infty} F(X_{i_{m_n}}, x) \in G(X_n)$ oraz $g(\delta) \neq \delta$. □

Poniżej przedstawiony jest dowód, że jedna z implikacji w powyższym twierdzeniu nie wymaga założenia „$\underline{d}(X) > 0$”.

Twierdzenie 4.1.12. $\theta(X) > 0 \Rightarrow G(X_n) \neq \{id_{[0,1]}\}$

Dowód. Przyjrzyjmy się dowodowi implikacji „$\Leftarrow$” z poprzedniego twierdzenia. Wykorzystaliśmy tam warunek $\underline{d}(X) > 0$ jedynie w celu znalezienia odpowiedniego $k \in X$ spełniającego $|d_k(X) - d_l(X)| > \theta$ dla wybranego $l \in \mathbb{N}$, gdyż warunek $k \in X$ nie jest obecny w definicji $\theta(X)$. Możemy jednak łatwo zauważyć, że jeśli różnica $d_k(X) - d_l(X)$ jest dodatnia, możemy założyć, że $k \in X$, ponieważ $d_i(X)$ może rosnąć jedynie kiedy $i \in X$. Kiedy różnica $d_k(X) - d_l(X)$ była ujemna, jeśli nie mogliśmy znaleźć odpowiedniego $k \in X$ w przedziale $(\theta n, n)$, w poprzednim dowodzie znaleźlibyśmy takie k w przedziale $[n, n/\theta)$, gdyż różnica $d_i(X) - d_l(X)$ byłaby coraz mniejsza dla kolejnych $i \notin X$, a jedynie skończenie wiele przedziałów $[n, n/\theta)$ mogło być rozłącznych z X ze względu na $\underline{d}(X) > 0$ (jak $\theta < \underline{d}(X)$). W takim przypadku mieliśmy $l/k > \theta^2$.

Bez założenia $\underline{d}(X) > 0$ nie możemy zakładać, że znajdziemy $k \in X$ w prawie każdym przedziale $[n, n/\theta)$. Mamy teraz dwa przypadki.

Przypadek 1.: Istnieje pewien $N \in \mathbb{N}$, dla którego możemy znaleźć indukcyjnie nieskończenie wiele par (k, l) spełniających $k > l$, $k \in X$, $d_k(X) - d_l(X) < -\theta$ oraz $l/k > \theta^N$. Możemy teraz postępować tak samo jak w poprzednim dowodzie, podstawiając $\theta' = \theta^N$ w miejsce θ.

Przypadek 2.: Jeśli dla żadnego $N \in \mathbb{N}$ nie możemy znaleźć takich par jak opisane powyżej, szukamy nieskończenie wielu par (k_n, l_n), takich że $k_n > l_n$, $k_n \in X$, $d_{k_n}(X) - d_{l_n}(X) < -\theta$, $(l_n/\theta, k_n) \cap X = \emptyset$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim_{n\to\infty} l_n/k_n = 0$. Zdefiniujmy wtedy $x_{i_n} = k_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Wówczas $|\{i \in \mathbb{N} : x_i < k_n \cdot x\}| = |\{i \in \mathbb{N} : x_i < l_n/\theta\}| = i_n - 1$ dla $x > l_n/(k_n \cdot \theta)$. Wynika stąd, że $F(X_{i_n}, x) = (i_n - 1)/i_n$ dla $1 \geqslant x > l_n/(k_n \cdot \theta)$. Skoro $l_n/(k_n \cdot \theta)$ zbiega do 0, dostajemy $\lim_{n\to\infty} F(X_{i_n}, x) = \chi_{(0,1]} \in G(X_n)$. Zatem $G(X_n) \neq \{id_{[0,1]}\}$. □

Autorzy [25] wprowadzili następującą „miarę nieregularności” dystrybucji elementów zbioru X:

$$\eta(X) = \overline{\overline{d}}(X) - \overline{d}(X) + \underline{d}(X) - \underline{\underline{d}}(X).$$

Postawili oni także hipotezę dotyczącą powiązań między tą funkcją a zbiorem funkcji dystrybucji. Pokażemy, że ta hipoteza jest prawdziwa.

Hipoteza ([25, Hipoteza 5]).

$$G(X_n) = \{id_{[0,1]}\} \Rightarrow \eta(X) = 0$$

Twierdzenie 4.1.13. *Jeśli $\theta(X) = 0$, to $\eta(X) = 0$.*

Dowód. Weźmy dowolny $\varepsilon \in (0, 1/2)$ oraz $\theta \in (2\varepsilon, 1)$. Wiemy, że istnieje N, taki że mamy $|d_n(X) - d_{\theta n}(X)| < \varepsilon$ dla wszystkich $n > N$. Wobec tego,

$$\frac{X(n) - X(\theta n)}{(1-\theta)n} \leqslant \frac{d_n(X)n - (d_n(X) - \varepsilon)\theta n}{(1-\theta)n} = d_n(X) + \frac{\varepsilon\theta}{1-\theta}$$

dla $n > N$.

Wynika stąd, że dla każdego $\theta \in (1/2, 1)$ dostajemy

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X(n) - X(\theta n)}{(1-\theta)n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} d_n(X) = \overline{d}(X).$$

Zatem $\overline{\overline{d}}(X) = \overline{d}(X)$. Używając niemal identycznych argumentów jak w rozumowaniu powyżej, możemy pokazać, że $\underline{\underline{d}}(X) = \underline{d}(X)$. Zatem $\eta(X) = 0$. □

Wniosek 4.1.14. $G(X_n) = \{id_{[0,1]}\} \Rightarrow \eta(X) = 0$.

Dowód. Na podstawie twierdzenia 4.1.12, jak $G(X_n) = \{id_{[0,1]}\}$, to $\theta(X) = 0$. Na mocy twierdzenia 4.1.13, jeśli $\theta(X) = 0$, to $\eta(X) = 0$. □

Ten sam rezultat możemy uzyskać w alternatywny sposób, nie wykorzystując funkcji θ. Tym razem użyjemy słabszych założeń o zbiorze funkcji dystrybucji, które zagwarantują, że minimalna (maksymalna) gęstość zbioru jest równa jego dolnej (górnej) gęstości asymptotycznej. Poniższe rezultaty pokazują nam też powiązania między gęstością minimalną (maksymalną) podzbioru liczb naturalnych a jego zbiorem funkcji dystrybucji.

Twierdzenie 4.1.15. *Jeśli $g \leqslant id_{[0,1]}$ dla wszystkich $g \in G(X_n)$, to $\underline{\underline{d}}(X) = \underline{d}(X)$.*

Dowód. Niech $(x_1, x_2, \dots)$ będzie rosnącym ponumerowaniem elementów zbioru X. Przypuśćmy, że $\underline{\underline{d}}(X) < \alpha < \beta < \underline{d}(X)$. Wówczas dla pewnego $\theta < 1$ istnieje nieskończenie wiele $n \in X$ spełniających $(X(n) - X(\theta n))/(1-\theta)n < \alpha$. Możemy znaleźć takie $n \in X$, ponieważ jeśli ten iloraz jest mniejszy niż

$\alpha - 1/k$ dla pewnego $k \notin X$, to nie może być on większy od α dla najmniejszego $n > k$ należącego do X. Z drugiej strony, dla prawie wszystkich takich n mamy $d_n(X) > \beta$.

Wybierzmy jeden z tych n i wprowadźmy oznaczenia $n = x_k$ oraz $l = |\{i \leqslant k : x_i < \theta x_k\}|$. Nietrudno spostrzec, że $k > \beta n$ i możemy także łatwo zauważyć, że $k - l < \alpha(1-\theta)n$. Otrzymujemy stąd

$$F(X_k, \theta) = \frac{l}{k} = 1 - \frac{k-l}{k} \geqslant 1 - \frac{\alpha(1-\theta)n}{\beta n} = \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) + \frac{\alpha}{\beta}\theta,$$

co jest większe od θ, ponieważ $\alpha < \beta$ i $\theta < 1$. Wynika stąd, że istnieje nieskończenie wiele $k \in \mathbb{N}$, takich że $F(X_k, \theta) \geqslant (1 - \alpha/\beta) + (\alpha/\beta)\theta > \theta$. Wobec tego, na mocy zwartości $\mathcal{D}$ istnieje $g \in G(X_n)$ spełniająca $g(\theta) > \theta$. $\square$

Używając niemal identycznego dowodu, można udowodnić następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.1.16. *Jeśli $g \geqslant id_{[0,1]}$ dla wszystkich $g \in G(X_n)$, to $\overline{\overline{d}}(X) = \overline{d}(X)$.*

4.2 Zbiory gęstości

W tej części pracy doktorskiej będziemy rozważać zbiory gęstości podzbiorów $\mathbb{N}$. Pojęcie to zostało wprowadzone przez Grekosa w jego pracy doktorskiej [27], a następnie opisane w jego artykule [28]. W ostatnich latach badania na ten temat były kontynuowane między innymi w [29]. Podamy tutaj charakteryzację kiedy zbiór gęstości jest największy możliwy oraz odpowiemy na dotyczące tego zagadnienia pytania postawione przez Giuliano, Grekosa i Mišíka w piątej sekcji [25].

Definicja 4.2.1. Niech $A \subseteq \mathbb{N}$. *Zbiorem gęstości* zbioru A nazywamy

$$S(A) = \{(\overline{d}(B), \underline{d}(B)) \in [0,1]^2 : B \subseteq A)\}.$$

Dla ustalonego $A \subseteq \mathbb{N}$, oznaczmy przez Tz trapez o wierzchołkach $(0,0)$, $(\overline{d}(A), 0)$, $(\overline{d}(A), \underline{d}(A))$, $(\underline{d}(A), \underline{d}(A))$. Łatwo widać, że $S(A) \subseteq Tz$. Poniżej podajemy inne znane i przydatne własności zbiorów gęstości wykazane przez Grekosa, Mišíka i Tótha.

Twierdzenie 4.2.2 ([28])**.** *Niech $A \subseteq \mathbb{N}$. Wówczas $S(A)$ jest zbiorem domkniętym, wypukłym i zawierającym trójkąt o wierzchołkach* $(0,0)$, $(\overline{d}(A), 0)$, $(\overline{d}(A), \underline{d}(A))$*.*

Twierdzenie 4.2.3 ([29, Twierdzenie 2])**.** *Niech $A \subseteq \mathbb{N}$. Jeśli $(x,y) \in S(A)$, to $(x,z) \in S(A)$ dla każdego $z \in [0,y]$.*

Wykorzystując te rezultaty, natychmiastowo uzyskamy poniższą charakteryzację największych możliwych zbiorów gęstości.

Twierdzenie 4.2.4. *Niech $A \subseteq \mathbb{N}$. Wówczas $S(A) = Tz \iff \underline{\underline{d}}(A) = \underline{d}(A)$.*

Dowód. $\Rightarrow$: Niech $\underline{\underline{d}}(A) \neq \underline{d}(A)$. Przypomnijmy, że na mocy [54, Twierdzenie 8] mamy $\underline{\underline{d}}(A) = \sup\{d(B) : B \subseteq A\}$. Zatem nie istnieje $B \subseteq A$ spełniający $d(B) = \underline{\underline{d}}(A)$, więc $(\underline{d}(A), \underline{d}(A)) \notin S(A)$.

($\Leftarrow$): Ponieważ $S(A)$ jest domknięty, dzięki wspomnianemu wynikowi z [54] wiemy, że istnieje $B \subseteq A$, taki że $d(B) = \underline{d}(A)$, więc $(\underline{d}(A), \underline{d}(A)) \in S(A)$. Ponieważ $(0,0), (\overline{d}(A), \underline{d}(A)) \in S(A)$ dla wszystkich $A \subseteq \mathbb{N}$, z wypukłości $S(A)$ wynika, że odcinki łączące punkt $(\underline{d}(A), \underline{d}(A))$ z punktami $(0,0)$ i $(\overline{d}(A), \underline{d}(A))$ są zawarte w $S(A)$. Zatem na mocy twierdzenia 4.2.3 dostajemy $Tz \subseteq S(A)$, a więc $Tz = S(A)$. $\square$

Powyższy rezultat, dający nam charakteryzację zbiorów o największym możliwym zbiorze gęstości, można rozszerzyć do zbiorów gęstości zdefiniowanych przy użyciu gęstości ważonych. Tak zdefiniowane zbiory gęstości zostały wprowadzone przez Grekosa, Mišíka i Tótha w [29].

Definicja 4.2.5. *Ważonym zbiorem gęstości* zbioru $A \subseteq \mathbb{N}$ nazywamy

$$S_c(A) = \{(\overline{d}_c(B), \underline{d}_c(B)) \in [0,1]^2 : B \subseteq A)\}.$$

Dla ustalonego $A \subseteq \mathbb{N}$, oznaczmy przez Tz_c trapez o wierzchołkach $(0,0)$, $(\overline{d}_c(A), 0)$, $(\overline{d}_c(A), \underline{d}_c(A))$, $(\underline{d}_c(A), \underline{d}_c(A))$.

Wprowadźmy także pojęcia *minimalnej* i *maksymalnej gęstości ważonej* zbioru $A \subseteq \mathbb{N}$. Zdefiniujmy je jako

$$\underline{\underline{d}}_c(A) = \sup\{d_c(B) : B \subseteq A\}, \qquad \overline{\overline{d}}_c(A) = \inf\{d_c(B) : B \supseteq A\}.$$

Twierdzenia 1 i 2 z [29] pokazują, że wyniki z twierdzeń 4.2.2 i 4.2.3 rozszerzają się do wszystkich gęstości ważonych. Możemy więc uogólnić twierdzenie 4.2.4 w następujący sposób.

Twierdzenie 4.2.6. *Niech $A \subseteq \mathbb{N}$. Wówczas $S_c(A) = Tz_c \iff \underline{\underline{d}}_c(A) = \underline{d}_c(A)$.*

Dowód. Taki sam jak dowód twierdzenia 4.2.4 . $\square$

W dalszej części pracy skupimy się na odpowiedzeniu na problem 4 z [25]. Autorzy tego problemu chcieli scharakteryzować kiedy $S(A) = Tz$ przy użyciu funkcji γ zdefiniowanej poniżej.

Definicja 4.2.7. Niech $A \subseteq \mathbb{N}$ oraz $\varepsilon > 0$. Zdefiniujmy

$$\gamma(A, \varepsilon) = \liminf_{n \to \infty} \frac{A(n, (1+\varepsilon)n)}{A((1-\varepsilon)n, n)}, \qquad \gamma(A) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \gamma(A, \varepsilon),$$

o ile ta granica istnieje.

Problem 4 z [25] dotyczy zbadania, czy dla każdego $A \subseteq \mathbb{N}$ mamy $\gamma(A) = 1 \iff S(A) = Tz$. Pokażemy, że odpowiedź na to pytanie jest negatywna. Co więcej, przedstawimy przykłady, że żadna z powyższych implikacji nie zachodzi.

Przykład 4.2.8. *Istnieje zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$, taki że $S(A) = Tz$ i $\gamma(A) \neq 1$*

Dowód. Niech $I_1, I_2, \ldots$ będą następującymi po sobie, rozłącznymi przedziałami, takimi że $|I_n| = n!$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Konstruujemy zbiór A w taki sposób, żeby $A \cap I_n = I_n \cap 2\mathbb{N}$ dla n nieparzystych i $A \cap I_n = I_n$ dla n parzystych. Łatwo widać, że $\underline{d}(A) = \underline{d}(A) = 1/2$, ponieważ $d_n(A) \leqslant 1/2 + 1/k$ jak $n = \max I_{2k+1}$ dla $k \in \mathbb{N}$, a jednocześnie A zawiera zbiór liczb parzystych. Z drugiej strony, dla $\varepsilon \in (0, 1/2)$ iloraz $A(n,(1+\varepsilon)n)/A((1-\varepsilon)n, n)$ jest około $1/2$ jak $n = \max I_{2k}$ dla prawie wszystkich $k \in \mathbb{N}$. Zatem $\gamma(A) = 1/2 \neq 1$. $\square$

Możemy zwrócić uwagę na to, że powyższy przykład jest także kontrprzykładem dla następującej hipotezy Giuliano, Grekosa i Mišíka.

Hipoteza ([25, Hipoteza 2])**.** *Niech $\underline{d}(A) > 0$. Wówczas*

$$S(A) = Tz \iff \forall g \in G(A_n)\ g \leqslant id_{[0,1]}.$$

Zauważmy, że w twierdzeniu 4.1.15 pokazaliśmy, że implikacja „$\Leftarrow$” z tej hipotezy zawsze zachodzi. Jednakże, powyższy przykład dowodzi, że przeciwna implikacja nie jest prawidziwa.

Przykład 4.2.9. *Istnieje zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$ spełniający $S(A) = Tz$, dla którego istnieje $g \in G(A_n)$, takie że $g \leqslant id_{[0,1]}$ nie zachodzi.*

Dowód. Niech A będzie jak w powyższym przykładzie. Weźmy $n = 2\max I_{2k}$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Wówczas $n = a_l$ dla pewnego $l \in \mathbb{N}$ oraz

$$F(A_l, 1/2) = \frac{|\bigcup_{i \leqslant 2k} A \cap I_i|}{l} \geqslant \frac{|I_{2k}|}{|I_{2k}| + |A \cap [1,n] \cap I_{2k+1}|} = \frac{2k!}{2k! + \frac{2k!}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Ponieważ to szacowanie zachodzi dla prawie wszystkich $k \in \mathbb{N}$, ze zwartości zbioru $\mathcal{D}$ wynika, że istnieje taki $g \in G(X_n)$, że $g(1/2) \geqslant 2/3$, zatem $g \leqslant id_{[0,1]}$ nie zachodzi. $\square$

Przykład 4.2.10. *Istnieje zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$, taki że $\gamma(A) = 1$ i $S(A) \neq Tz$.*

Dowód. Zdefiniujmy $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ przy pomocy wzoru $(1+\varepsilon_i)^{10^i} = 10/9$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$. Skonstruujemy zbiór A w następujący sposób. Niech $[1, n_1] \subseteq A$ dla pewnego $n_1 > 4 \cdot 10/(1+\varepsilon_1)$. Załóżmy, że zdefiniowaliśmy $n_1, \ldots, n_k$, gdzie $(1+\varepsilon_k) \cdot n_k > 4 \cdot 10^k$, a także $A \cap [1, n_k]$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Oznaczmy przez I_m^k przedział $(n_k(1+\varepsilon_k)^{m-1}, n_k(1+\varepsilon_k)^m]$ dla $m \leqslant 10^k$. Konstruujemy zbiór A na każdym przedziale I_m^k poprzez regularne rozmieszczenie jego elementów w taki sposób, żeby $A(I_m^k)/|I_m^k|$ był około $1 - m/(4 \cdot 10^k)$ dla każdego $m \leqslant 10^k$. Następnie niech przedział $((10/9)n_k, n_{k+1}]$ będzie zawarty w zbiorze A, gdzie n_{k+1} jest taki, że $n_{k+1} > 3n_k$, $(1+\varepsilon_{k+1}) \cdot n_{k+1} > 4 \cdot 10^{k+1}$ oraz $d_{n_{k+1}}(A) > 1 - 1/(k+1)$.

Zauważmy, że $\underline{d}(A) \geqslant 9/10$, ponieważ $d_{(10/9)n_k}(A) \geqslant (9/10)(1-1/k)$. Możemy także spostrzec, że $A(I_m^k)/|I_m^k| \leqslant 7/8 + 2/(4 \cdot 10^k)$ dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$ i $m \in [10^k/2, 10^k]$. Jeśli oznaczymy przedziały $\bigcup_{m \in [10^k/2, 10^k]} I_m^k$ przez

J_k dla $k \in \mathbb{N}$, to $A(J_k)/|J_k| \leqslant 7/8 + 2/(4 \cdot 10^k)$. Zauważmy, że $\min J_k/\max J_k$ jest zawsze około $\sqrt{9/10}$, więc

$$\frac{A(n) - A(\theta n)}{(1-\theta)n} \leqslant \frac{7}{8} + \frac{2}{4 \cdot 10^k}$$

dla $\theta = \sqrt{9/10}$ oraz $n = (10/9)n_k$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$. Łatwo widać, że powyższy iloraz będzie się tylko zmniejszał jeśli zwiększymy θ i pozostawimy n bez zmian. Wobec tego, $\underline{\underline{d}}(A) \leqslant 7/8$, zatem $\underline{d}(A) \neq \underline{\underline{d}}(A)$.

Żeby pokazać, że $\gamma(A) = 1$, weźmy $0 < \varepsilon < 1/19$. Łatwo widać, że $A(n, (1+\varepsilon)n)/A((1-\varepsilon)n, n) = 1$ dla każdego $n = 2n_k$, więc $\gamma(A, \varepsilon) \leqslant 1$. Zauważmy, że $A(n, (1+\varepsilon)n)/A((1-\varepsilon)n, n)$ jest najmniejszy, kiedy $n = (10/9)n_k/(1+\varepsilon)$ dla pewnego k. Wtedy $n(1-\varepsilon) \in I^k_{m(k)}$ dla pewnego $m(k) \leqslant 10^k$, ponieważ $\varepsilon < 1/19$, więc $(1-\varepsilon)/(1+\varepsilon) > 9/10$. Wówczas

$$\frac{A(n, (1+\varepsilon)n)}{A((1-\varepsilon)n, n)} \geqslant \frac{A(I^k_{10^k})/|I^k_{10^k}|}{A(I^k_{m(k)})/|I^k_{m(k)}|} = \frac{3/4}{A(I^k_{m(k)})/|I^k_{m(k)}|}.$$

Zwróćmy teraz uwagę, że jak $(1-\varepsilon)/(1+\varepsilon)$ jest większy od $(9/10)^x$ dla pewnego $x = a/10^b \in (0,1)$, $a, b \in \mathbb{N}$, to $A(I^k_{m(k)})/|I^k_{m(k)}| \leqslant 3/4 + x/4 + 2/(4 \cdot 10^k)$ dla wszystkich $k > b$. Rzeczywiście, wynika to z tego samego argumentu, który daje nam $A(I^k_m)/|I^k_m| \leqslant 7/8 + 2/(4 \cdot 10^k)$ dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$ i $m \in [10^k/2, 10^k]$. Wobec tego $\gamma(A, \varepsilon) \geqslant \frac{3/4}{3/4 + x/4}$ dla każdego x spełniającego $(1 - \varepsilon)/(1+\varepsilon) > (9/10)^x$.

Pozostaje nam zauważyć, że dla dowolnego $x > 0$ istnieje takie $\varepsilon > 0$, że $(1-\varepsilon)/(1+\varepsilon) > (9/10)^x$. Zatem $\gamma(A) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \gamma(A, \varepsilon) = 1$. $\square$

4.3 Zbiory o ustalonych gęstościach

Na koniec tego rozdziału, przedstawione zostanie rozwiązanie pewnego problemu Giuliano, Grekosa i Mišíka postawionego w ich artykule [25].

Problem 13 z [25] dotyczy istnienia zbiorów o ustalonych gęstościach. Autorzy pytali się w nim o charakteryzację ośmiowyrazowych, niemalejących ciągów $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8)$, ograniczonych przez 0 i 1, dla których istnieje zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$ spełniający

$$\underline{u}(A) = \alpha_1,\ \underline{\underline{d}}(A) = \alpha_2\ \underline{d}(A) = \alpha_3,\ \underline{\delta}(A) = \alpha_4,$$

$$\overline{\delta}(A) = \alpha_5,\ \overline{d}(A) = \alpha_6,\ \overline{\overline{d}}(A) = \alpha_7,\ \overline{u}(A) = \alpha_8.$$

Rozwiążemy ten problem w kilku krokach. Po pierwsze, już autorzy [25] zauważyli, że powyższa własność nie jest spełniona dla wszystkich ósemek elementów spełniających $\alpha_1 \geqslant 0$, $\alpha_8 \leqslant 1$. Mianowicie, jeśli $\alpha_3 = \alpha_6$, to odpowiedni zbiór A musi spełniać $d(A) = \alpha_3$, zatem $\underline{\underline{d}}(A) = \overline{\overline{d}}(A) = \alpha_3$. Oznacza to, że jak $\alpha_3 = \alpha_6$, to $\alpha_i = \alpha_j$ dla $i, j \in [2, 7]$.

Powszechnie wiadomo, że dla każdego $\alpha \in [0, 1]$ istnieje zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$ spełniający $d(A) = \alpha$, np. $A = \{\lceil n/\alpha \rceil : n \in \mathbb{N}\}$. Nietrudno zauważyć też, że dla wszystkich $\alpha_1 \leqslant \alpha$, $\alpha_8 \geqslant \alpha$ możemy przekształcić zbiór A w zbiór B, dla którego $d(B) = \alpha$, $\underline{u}(B) = \alpha_1$ i $\overline{u}(B) = \alpha_8$. Rzeczywiście, wystarczy zmodyfikować zbiór A na pewnych przedziałach $I_n, J_n \subseteq [n!, (n+1)!]$ długości n dla prawie każdego $n \in \mathbb{N}$ (np. $I_n = [n!, n! + n)$,$J_n = [n! + n, n! + 2n)$ dla $n > 3$) w taki sposób, że rozmieszczając na tych przedziałach w regularny sposób elementy nowego zbioru B mamy $B(I_n)/|I_n|$ około α_1 i $B(J_n)/|J_n|$ około α_8 dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$, a B pozostaje taki sam jak A poza tymi przedziałami.

Pokazaliśmy więc, że wszystkie ósemki, dla których $\alpha_2 = \alpha_7$, spełniają opisaną własność, a ósemki, dla których $\alpha_3 = \alpha_6$ i $\alpha_2 \neq \alpha_7$, nie spełniają jej. Ciekawszy jest przypadek, gdy $\alpha_3 < \alpha_6$. Pokażemy, że dla wszystkich ósemek spełniających ten warunek znajdziemy zbiór o odpowiednich gęstościach. Zaczniemy od modyfikacji przykładu 4.2.8 z poprzedniego podrozdziału. Następnie, przekształcimy go jeszcze raz w celu uzyskania ostatecznej odpowiedzi.

Twierdzenie 4.3.1. *Niech $\beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \beta_3 < \beta_4 \leqslant \beta_5 \leqslant \beta_6$. Wówczas istnieje taki zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$, że $\beta_1 = \underline{u}(A)$, $\beta_2 = \underline{\underline{d}}(A)$, $\beta_3 = \underline{d}(A)$, $\beta_4 = \overline{d}(A)$, $\beta_5 = \overline{\overline{d}}(A)$, $\beta_6 = \overline{u}(A)$.*

Dowód. Niech $I_1, I_2, \ldots$ będą następującymi po sobie, rozłącznymi przedziałami spełniającymi $|I_n| = n!$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Na początek skonstruujemy zbiór B w sposób regularny, taki że $B(I_n)/n!$ będzie około β_3 jak n jest nieparzysty, zaś $B(I_n)/n!$ będzie około β_4 jak n jest parzysty. Łatwo widać, że $\underline{d}(B) = \beta_3$ i $\overline{d}(B) = \beta_4$, ponieważ $d_i(B) \leqslant \beta_3 + 1/k$ kiedy $i = \max I_{2k+1}$ dla $k \in \mathbb{N}$ oraz $d_i(B) \geqslant \beta_4 \cdot (k/(k + 1))$ kiedy $i = \max I_{2k}$ dla $k \in \mathbb{N}$.

Niech x będzie taki, że $x \cdot \beta_5 + \beta_3 < \beta_4$ i $(x \cdot \beta_2 + \beta_4)/(1 + x) > \beta_3$ oraz niech $\theta = 1/(1 + x)$. Tworzymy teraz przedziały $J_1, J_2, \ldots$ w taki sposób, że $\min J_n = \max I_n + 1$ i $\lceil \max J_n \cdot \theta \rceil = \min J_n$. Konstruujemy zbiór C poprzez modyfikację zbioru B jedynie na przedziałach J_n. Rozmieszczamy na nich regularnie elementy zbioru C w taki sposób, żeby $C(J_n)/|J_n|$ był około β_2 kiedy n jest parzysty oraz $C(J_n)/|J_n|$ był około β_5 kiedy n jest nieparzysty.

Zauważmy, że z definicji x i θ, mamy $d_{\max J_n}(C) \in (\beta_3, \beta_4)$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$, a przedział J_n jest zbyt mały, aby zmienić $d_{\max I_{n+1}}(C)$ w znaczący sposób, więc $\underline{d}(C)$ i $\overline{d}(C)$ wciąż są równe, odpowiednio, β_3 i β_4. Jednocześnie, $(C(i) - C(\theta i)/((1 - \theta)i))$ jest około $C(J_n)/|J_n|$ jak $i = \max J_n$, więc $\underline{\underline{d}}(C) = \beta_2$ oraz $\overline{\overline{d}}(C) = \beta_5$.

W celu zakończenia konstrukcji zbioru A, ustalmy przedziały H_n długości n pośrodku każdego I_n i przekształćmy C na tych przedziałach poprzez regularne rozmieszczenie elementów A na nich w taki sposób, żeby $A(H_n)/n$ był około β_1 jak n jest parzysty i $A(H_n)/n$ był około β_6 kiedy n jest nieparzysty. Nietrudno spostrzec, że te przedziały są zbyt małe, żeby zmienić gęstości asymptotyczne, minimalne i maksymalne, podczas gdy $\underline{u}(A) = \beta_1$ oraz $\overline{u}(A) = \beta_6$. $\square$

Twierdzenie 4.3.2. *Niech $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \alpha_3 \leqslant \alpha_4 \leqslant \alpha_5 \leqslant \alpha_6 \leqslant \alpha_7 \leqslant \alpha_8$ będą takie, że $\alpha_3 < \alpha_6$. Wówczas istnieje zbiór D, taki że $\underline{u}(D) = \alpha_1$, $\underline{\underline{d}}(D) = \alpha_2$, $\underline{d}(D) = \alpha_3$, $\underline{\delta}(D) = \alpha_4$, $\overline{\delta}(D) = \alpha_5$, $\overline{d}(D) = \alpha_6$, $\overline{\overline{d}}(D) = \alpha_7$, $\overline{u}(D) = \alpha_8$.*

Dowód. Dowód opiera się na konstrukcji zbioru A z dowodu poprzedniego twierdzenia dla $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_2$, $\beta_3 = \alpha_3$, $\beta_4 = \alpha_6$, $\beta_5 = \alpha_7$, $\beta_6 = \alpha_8$. Jedyną rzeczą zmienioną w stosunku do tamtej konstrukcji jest długość przedziałów I_n.

Załóżmy, że skonstruowaliśmy przedziały $I_1, \ldots, I_{n-1}$ i zbiór D na nich. Konstruujemy zbiór D na przedziale I_n w taki sam sposób jak zbiór A, tylko tym razem wydłużamy przedział I_n, żeby $\delta_{\max I_n}(D) \in (\alpha_4 - 1/n, \alpha_4 + 1/2n)$ jeśli n jest nieparzyste, zaś $\delta_{\max I_n}(D) \in (\alpha_5 - 1/2n, \alpha_5 + 1/n)$ jeśli n jest parzyste.

Zauważmy, że jeśli $\max I_{n-1} \geqslant (n-1)!$, a $\max I_n = n \max I_{n-1}$, to dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\frac{\sum_{k \in I_n} \frac{1}{k}}{\sum_{k \in \bigcup_{i<n} I_i} \frac{1}{k}} \leqslant \frac{\log n}{\log((n-1)!)},$$

co zbiega do zera 0 jak n dąży do nieskończoności. Wobec tego, możemy założyć, że $|I_n| \geqslant n|I_{n-1}|$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$, gdyż przedziały I_n muszą być co najmniej tak długie, żeby $\delta_{\max I_n}$ mogło się różnić od $\delta_{\max I_{n-1}}$. Oznacza to, że długość tych przedziałów faktycznie jest wydłużana lub pozostaje bez zmian w stosunku do poprzedniego dowodu. Wobec tego, gęstości asymptotyczna, maksymalna, minimalna i jednorodna pozostają bez zmian, a zatem zbiór D ma wszystkie pożądane gęstości, gdyż $\underline{\delta}(D) = \alpha_4$ i $\overline{\delta}(D) = \alpha_5$. $\square$

Bibliografia

[1] Ralph Alexander, *Density and multiplicative structure of sets of integers*, Acta Arith. **12** (1966/1967), 321–332.

[2] Vladimír Baláž, Ladislav Mišík, Oto Strauch, János T. Tóth, *Distribution functions of ratio sequences, III*, Publ. Math. Debrecen **82** (2013), no. 3-4, 511–529.

[3] ______, *Distribution functions of ratio sequences, IV*, Period. Math. Hungar. **66** (2013), no. 1, 1–22.

[4] Marek Balcerzak, Pratulananda Das, Małgorzata Filipczak, Jarosław Swaczyna, *Generalized kinds of density and the associated ideals*, Acta Math. Hungar. **147** (2015), no. 1, 97–115.

[5] Marek Balcerzak, Katarzyna Dems, Andrzej Komisarski, *Statistical convergence and ideal convergence for sequences of functions*, J. Math. Anal. Appl. **328** (2007), no. 1, 715–729.

[6] Marek Balcerzak, Szymon Głąb, Jarosław Swaczyna, *Ideal invariant injections*, J. Math. Anal. Appl. **445** (2017), no. 1, 423–442.

[7] Paweł Barbarski, Rafał Filipów, Nikodem Mrożek, Piotr Szuca, *When does the Katětov order imply that one ideal extends the other?*, Colloq. Math. **130** (2013), no. 1, 91–102.

[8] Vitaly Bergelson, Paul Erdős, Neil Hindman, Tomasz Łuczak, *Dense difference sets and their combinatorial structure*, The mathematics of Paul Erdős, I, Algorithms Combin., vol. 13, Springer, Berlin, 1997, pp. 165–175.

[9] Piotr Borodulin-Nadzieja, Barnabás Farkas, *Cardinal coefficients associated to certain orders on ideals*, Arch. Math. Logic **51** (2012), no. 1-2, 187–202.

[10] Robert Creighton Buck, *The measure theoretic approach to density*, Amer. J. Math. **68** (1946), 560–580.

[11] ______, *Generalized asymptotic density*, Amer. J. Math. **75** (1953), 335–346.

[12] Henri Cartan, *Filtres et ultrafiltres*, C. R. Acad. Sci. Paris **205** (1937), 777–779.

[13] Pratulananda Das, Pavel Kostyrko, Władysław Wilczyński, Prasanta Malik, *I and I^*-convergence of double sequences*, Math. Slovaca **58** (2008), no. 5, 605–620.

[14] Pratulananda Das, Ekrem Savas, *On generalized statistical and ideal convergence of metric-valued sequences*, Ukraïn. Mat. Zh. **68** (2016), no. 12, 1598–1606.

[15] Lech Drewnowski, Pedro J. Paúl, *The Nikodým property for ideals of sets defined by matrix*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. (Esp.) **94** (2000), no. 4, 485–503, Perspectives in mathematical analysis (Spanish).

[16] Ilijas Farah, *Analytic quotients: theory of liftings for quotients over analytic ideals on the integers*, Mem. Amer. Math. Soc. **148** (2000), no. 702, xvi+177.

[17] ______, *How many Boolean algebras $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\mathcal{I}$ are there?*, Illinois J. Math. **46** (2002), no. 4, 999–1033.

[18] Henryk Fast, *Sur la convergence statistique*, Colloquium Math. **2** (1951), 241–244 (1952).

[19] Rafał Filipów, *On Hindman spaces and the Bolzano–Weierstrass property*, Topology Appl. **160** (2013), no. 15, 2003–2011.

[20] Rafał Filipów, Nikodem Mrożek, Ireneusz Recław, Piotr Szuca, *Ideal convergence of bounded sequences*, J. Symbolic Logic **72** (2007), no. 2, 501–512.

[21] Rafał Filipów, Jacek Tryba, *Convergence in van der Waerden and Hindman spaces*, Topology Appl. **178** (2014), 438–452.

[22] David Fremlin, *Filters of countable type*, (2007), dostępne pod adresem http://www.essex.ac.uk/maths/people/fremlin/preprints.htm, ostatnia wizyta na stronie w listopadzie 2017.

[23] Hillel Furstenberg, Benjamin Weiss, *Topological dynamics and combinatorial number theory*, J. Analyse Math. **34** (1978), 61–85 (1979).

[24] Zuzana Gáliková, Béla László, Tibor Šalát, *Remarks on uniform density of sets of integers*, Acta Acad. Paedagog. Agriensis Sect. Mat. (N.S.) **29** (2002), 3–13.

[25] Rita Giuliano, Georges Grekos, Ladislav Mišík, *Open problems on densities II*, Diophantine analysis and related fields 2010, AIP Conf. Proc., vol. 1264, Amer. Inst. Phys., Melville, NY, 2010, pp. 114–128.

[26] Rita Giuliano Antonini, Georges Grekos, *Weighted uniform densities*, J. Théor. Nombres Bordeaux **19** (2007), no. 1, 191–204.

[27] Georges Grekos, *Sur la répartition des densités des sous-suites d'une suite donnée*, Ph.D. thesis, Université Pierre et Marie Curie, 1976.

[28] ———, *Répartition des densités des sous-suites d'une suite d'entiers*, J. Number Theory **10** (1978), no. 2, 177–191.

[29] Georges Grekos, Ladislav Mišík, János T. Tóth, *Density sets of sets of positive integers*, J. Number Theory **130** (2010), no. 6, 1399–1407.

[30] Georges Grekos, Oto Strauch, *Distribution functions of ratio sequences. II*, Unif. Distrib. Theory **2** (2007), no. 1, 53–77.

[31] Neil Hindman, *Finite sums from sequences within cells of a partition of N*, J. Combinatorial Theory Ser. A **17** (1974), 1–11.

[32] Michael Hrušák, *Combinatorics of filters and ideals*, Set theory and its applications, Contemp. Math., vol. 533, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, pp. 29–69.

[33] ———, *Katětov order on Borel ideals*, Archive for Math. Logic **56** (2017), no. 7, 831–847.

[34] Winfried Just, Adam Krawczyk, *On certain Boolean algebras $\mathcal{P}(\omega)/I$*, Trans. Amer. Math. Soc. **285** (1984), no. 1, 411–429.

[35] Mohammad Kazim Khan, Cihan Orhan, *Matrix characterization of A-statistical convergence*, J. Math. Anal. Appl. **335** (2007), no. 1, 406–417.

[36] Konrad Knopp, *Infinite sequences and series*, Dover Publications, Inc., New York, 1956, Translated by Frederick Bagemihl.

[37] Menachem Kojman, *Hindman spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), no. 6, 1597–1602 (electronic).

[38] ———, *van der Waerden spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), no. 3, 631–635 (electronic).

[39] Menachem Kojman, Saharon Shelah, *van der Waerden spaces and Hindman spaces are not the same*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), no. 5, 1619–1622 (electronic).

[40] Pavel Kostyrko, Tibor Šalát, Władysław Wilczyński, *$\mathcal{I}$-convergence*, Real Anal. Exchange **26** (2000/01), no. 2, 669–685.

[41] David Krčmarský, Ladislav Mišík, Zuzana Václavíková, *On small sets of distribution functions of ratio block sequences*, Unif. Distrib. Theory **11** (2016), no. 1, 165–174.

[42] Adam Kwela, Michał Popławski, Jarosław Swaczyna, Jacek Tryba, *Properties of simple density ideals*, Wysłana do czasopisma, 2017.

[43] Adam Kwela, Jacek Tryba, *Homogeneous ideals on countable sets*, Acta Math. Hungar. **151** (2017), no. 1, 139–161.

[44] Miklós Laczkovich, Ireneusz Recław, *Ideal limits of sequences of continuous functions*, Fund. Math. **203** (2009), no. 1, 39–46.

[45] Paolo Leonetti, Salvatore Tringali, *Upper and lower densities have the strong Darboux property*, J. Number Theory **174** (2017), 445–455.

[46] Stanisław Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, wydanie drugie, Biblioteka matematyczna, Tom 46, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1976.

[47] Martin Mačaj, Ladislav Mišík, Tibor Šalát, Jana Tomanová, *On a class of densities of sets of positive integers*, Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.) **72** (2003), no. 2, 213–221.

[48] Adrian Richard Davis Mathias, *Solution of problems of Choquet and Puritz*, **255** (1972), 204–210. Lecture Notes in Math., Vol. 255.

[49] Martin Mačaj, Martin Sleziak, Vladimír Toma, *On weighted uniform density*, Unif. Distrib. Theory **3** (2008), no. 2, 101–127.

[50] Krzysztof Mazur, *F_σ-ideals and $\omega_1\omega_1^*$-gaps in the Boolean algebras* $P(\omega)/I$, Fund. Math. **138** (1991), no. 2, 103–111.

[51] David Meza-Alcántara, *Ideals and filters on countable sets*, Ph.D. thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2009.

[52] Michael Ray Oliver, *Continuum-many Boolean algebras of the form $\mathcal{P}(\omega)/\mathcal{I}$, $\mathcal{I}$ Borel*, J. Symbolic Logic **69** (2004), no. 3, 799–816.

[53] Hans-Heinrich Ostmann, *Additive Zahlentheorie. Teil I: Allgemeine Untersuchungen. Teil II: Spezielle Zahlenmengen*, Unveränderter Nachdruck der 1. Auflage von 1956. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bände 7, vol. 11, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1968.

[54] George Pólya, *Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen*, Math. Z. **29** (1929), no. 1, 549–640.

[55] Isac Jacob Schoenberg, *Über die asymptotische Verteilung reeller Zahlen mod 1*, Math. Z. **28** (1928), no. 1, 171–199.

[56] ______, *The integrability of certain functions and related summability methods.*, Amer. Math. Monthly **66** (1959), 361–375.

[57] Wacław Sierpiński, *Sur la valeur asymptotique d'une certaine somme*, Bull Intl. Acad. Polonmaise des Sci. et des Lettres **series A** (1910), 9–11.

[58] Sławomir Solecki, *Analytic ideals and their applications*, Ann. Pure Appl. Logic **99** (1999), no. 1-3, 51–72.

[59] Hugo Steinhaus, *Comptes rendus: Société Polonaise de Mathématique. Section de Wrocław. Septembre 1948-Mars 1949*, Colloquium Math. **2** (1951), 63–78.

[60] Oto Strauch, János T. Tóth, *Distribution functions of ratio sequences*, Publ. Math. Debrecen **58** (2001), no. 4, 751–778.

[61] Endre Szemerédi, *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression*, Acta Arith. **27** (1975), 199–245, Collection of articles in memory of Juriĭ Vladimirovič Linnik.

[62] Jacek Tryba, *Characterization of uniformly distributed sets and maximal density sets*, J. Number Theory (2017), przyjęta do druku.

[63] ______, *Weighted uniform density ideals*, Math. Slovaca (2017), przyjęta do druku.

[64] Bartel Leendert van der Waerden, *Beweis einer Baudetschen Vermutung*, Nieuw. Arch. Wisk. **15** (1927), 212–216.

[65] Tibor Šalát, *On ratio sets of sets of natural numbers*, Acta Arith. **15** (1968/1969), 273–278.

[66] Hermann Weyl, *Über die Gibbs'sche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene*, Rend. Circ. Mat. Palermo **330** (1910), 377–407.