UNIWERSYTET GDAŃSKI
WYDZIAŁ MATEMATYKI, FIZYKI I INFORMATYKI

Krzysztof Kowitz

WYKORZYSTANIE PORZĄDKU KATĚTOVA W BADANIACH PRZESTRZENI TOPOLOGICZNYCH ORAZ ULTRAFILTRÓW

Rozprawa doktorska napisana pod kierunkiem
dra hab. Rafała Filipowa i dra Adama Kweli

Gdańsk, 2023

OŚWIADCZENIE

Ja, niżej podpisany oświadczam, że przedłożona praca dyplomowa została wykonana przeze mnie samodzielnie, nie narusza praw autorskich, interesów prawnych i materialnych innych osób.

. . . .

data podpis

OŚWIADCZENIE

Wyrażam zgodę na udostępnienie osobom zainteresowanym mojej pracy dyplomowej dla celów naukowo-badawczych. Zgoda na udostępnienie pracy dyplomowej nie oznacza wyrażenia zgody na kopiowanie pracy dyplomowej w całości lub w części.

. . . .

data podpis

STRESZCZENIE

W rozprawie doktorskiej zajęliśmy się trzynastoma wybranymi ideałami i zbadaliśmy ich podstawowe własności. Uzyskaliśmy również ogólne twierdzenia charakteryzujące wszystkie ideały o pewnych własnościach. Szczególnie zainteresowały nas własności związane ze zbieżnością ideałową i strukturą porządkową ideałów. Motywem przewodnim tej pracy jest porządek Katětova nazwany na cześć czeskiego matematyka Miroslava Katětova, który wykorzystaliśmy w badaniu przestrzeni topologicznych i ultrafiltrów. Inspiracją naszych badań były prace Brendlego, Flaškovej i Kojmana.

Dla kilku ideałów związanych z twierdzeniami kombinatorycznymi (np. Hindmana, van der Waerdena, Browna, Folkmana) rozważyliśmy zbieżność ideałową, badając własności BW, hBW, FinBW, hFinBW wprowadzone w pracy [21] przez Filipowa, Mrożka, Recława i Szucę. Następnie zbadaliśmy czy przedstawione przez nas ideały są jednorodne. Pojęcie jednorodności ideałów wprowadzili Kwela z Trybą i podali charakteryzację ideałów jednorodnych w artykule [54]. Wykorzystaliśmy tę charakteryzację, by pokazać, że niektóre przedstawione przez nas ideały są jednorodne. Na koniec drugiego rozdziału zaprezentowaliśmy wykres przedstawiający zawierania między danymi ideałami (jedyną niewiadomą pozostaje hipoteza Erdősa-Turána).

W rozdziale trzecim zainteresowały nas znane dotąd rodzaje ultrafiltrów takie jak: selektywne ultrafiltry, P-punkty, czy Q-punkty. Zajmowali się nimi między innymi tacy znani matematycy jak: Baumgartner, Brendle, Hrušák. Wprowadziliśmy nowy porządek i dwa współczynniki kardynalne, które posłużyły do napisania najważniejszego twierdzenia w tym rozdziale dającego charakteryzację za pomocą porządku Katětova na istnienie $\mathcal{I}$-ultrafiltru, który nie jest $\mathcal{J}$-ultrafiltrem. Rozróżniliśmy także niektóre rodzaje $\mathcal{I}$-ultrafiltrów. Na przykład, pokazaliśmy, że niesprzecznie istnieje $\mathcal{D}_{fin}$-ultrafiltr, który nie jest Q-punktem [53]. Na końcu rozdziału wykorzystaliśmy uzyskane wyniki do pokazania, że niektóre ideały nie są jednorodne.

Rozdział czwarty dotyczy przestrzeni topologicznych takich jak: różnicowo zwarte, Hindmana, van der Waerdena, Folkmana. W pracach [50, 49, 51, 24, 63, 27, 46] tymi przestrzeniami zajmowali się następujący matematycy: Filipów, Flašková, Jones, Kojman, Shelah, Shi. Wzmocniliśmy wyniki Shi dotyczące przestrzeni różnicowo zwartych, zamieniając założenie hipotezy continuum na aksjomat Martina. Zbadaliśmy w jaki sposób za pomocą porządku Katětova możemy rozróżnić dane dwie klasy przestrzeni albo w jaki sposób pokazać zawieranie między nimi. Jako zastosowanie ogólnych wyników pokazaliśmy, że przy założeniu hipotezy continuum istnieje przestrzeń Hindmana, która nie jest $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$-przestrzenią.

W ostatnim rozdziale wzięliśmy pod uwagę ideały z rozdziału pierwszego i ich relacje w porządkach (dodaliśmy porządki: Rudin-Keislera i Rudin-Blassa). Sprawdziliśmy te relacje, których nie dało się osiągnąć przez poprzednie rozważania i które nie były dotąd znane. Pracę podsumowuje tabela, w której zebraliśmy znane dotąd wyniki i uzyskane w tej rozprawie. Przedstawiliśmy tam, jak mają się do siebie rozważane przez nas ideały w danych porządkach.

ABSTRACT

In the dissertation, we dealt with thirteen selected ideals and investigated their basic properties. We also obtained general theorems characterizing all ideals with certain properties. We were particularly interested in properties related to ideal convergence and the order structure of ideals. The main theme of this dissertation is the Katětov order named after the Czech mathematician Miroslav Katětov, which we used in the study of topological spaces and ultrafilters. Our research was inspired by the work of Brendle, Flaškova and Kojman.

For several ideals related to combinatorial theorems (e.g., Hindman, van der Waerden, Brown, Folkman), we considered ideal convergence by investigating the properties BW, hBW, FinBW, hFinBW introduced in the paper [21] by Filipów, Mrożek, Recław and Szuca. We then examined whether the ideals we presented are homogeneous. The concept of homogeneity of ideals was introduced by Kwela and Tryba and they gave a characterization of homogeneous ideals in the paper [54]. We used this characterization to show that some of the ideals we presented are homogeneous. At the end of the second chapter, we presented a graph showing the inclusions between the ideals in question (the only unknown remains the Erdős-Turán hypothesis).

In the third chapter, we were interested in the types of ultrafilters known so far, such as selective ultrafilters, P-points, or Q-points. They were dealt with by such well-known mathematicians as Baumgartner, Brendle, Hrušák, among others. We have introduced a new order and two cardinal coefficients, which were used to write the most important theorem in this chapter giving a characterization by means of the Katětov order for the existence of an $\mathcal{I}$-ultrafilter which is not a $\mathcal{J}$-ultrafilter. We have also distinguished between some types of $\mathcal{I}$-ultrafilters. For example, we have shown that consistently there is a $\mathcal{D}_{fin}$-ultrafilter, which is not a Q-point [53]. At the end of the chapter, we use the obtained results to show that some ideals are not homogeneous.

The fourth chapter deals with topological spaces such as differentially compact, Hindman, van der Waerden, Folkman. In the works [50, 49, 51, 24, 63, 27, 46] these spaces were dealt with by the following mathematicians: Filipów, Flašková, Jones, Kojman, Shelah, Shi. We strengthened Shi's results on differentially compact spaces by replacing the assumption of the continuum hypothesis by Martin's axiom. We have investigated how, using the Katětov order, we can distinguish given two classes of spaces or how to show inclusion between them. As an application of the general results, we showed that, under the assumption of the continuum hypothesis, there exists a Hindman space which is not an $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$-space.

In the last chapter, we considered the ideals from chapter one and their relations in orders (we added the Rudin-Keisler and Rudin-Blass orders). We checked those relations that could not be achieved by the previous considerations and that were not known before. The work is summarized in a table in which we have gathered the results known so far and obtained in this dissertation. There we presented how the ideals we considered relate to each other in the given orders.

SPIS TREŚCI

1. WPROWADZENIE

W tym rozdziale podajemy kilka pojęć i oznaczeń, które wielokrotnie będą się przewijać w dalszej części pracy.

Przez ω rozumiemy zbiór wszystkich liczb naturalnych łącznie z zerem. Dla zbioru A symbolem $[A]^\kappa$ ($[A]^{<\kappa}$) oznaczamy rodzinę wszystkich podzbiorów A mocy κ (mniejszej niż κ), gdzie κ jest liczbą kardynalną, a przez A^ω ($A^{<\omega}$) - rodzinę wszystkich ciągów nieskończonych (skończonych) o wyrazach ze zbioru A. Jeśli $s \in \omega^{<\omega}$ (czyli istnieje $k \in \omega$ takie, że $s = (s(0), \ldots, s(k))$ jest skończonym ciągiem liczb naturalnych), to przez $|s|$ oznaczamy jego długość (w tym przypadku $k+1$). Zakładamy, że $\emptyset$ jest ciągiem długości 0. Konkatenacją ciągów $s, t \in \omega^{<\omega}$ jest ciąg $s^\frown t = (s(0), \ldots, s(|s|-1), t(0), \ldots, t(|t|-1))$, gdzie $s = (s(0), \ldots, s(|s|-1))$ oraz $t = (t(0), \ldots, t(|t|-1))$. W przypadku, gdy $t = (i)$ jest ciągiem długości jeden, to zamiast $s^\frown t$ będziemy pisali $s^\frown i$.

Definicja 1.1. *Ideałem* na nieskończonym zbiorze X jest rodzina $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$, która spełnia następujące warunki:

1. $A, B \in \mathcal{I} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{I}$,
2. $(A \subseteq B \wedge B \in \mathcal{I}) \Longrightarrow A \in \mathcal{I}$,
3. $\mathcal{I}$ zawiera wszystkie skończone podzbiory X,
4. $X \notin \mathcal{I}$.

Będziemy zakładać, że zbiór X, na którym określamy ideał, jest przeliczalny.

Filtrem dualnym do ideału $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ nazywamy rodzinę $\mathcal{I}^* = \{A \subseteq X : X \setminus A \in \mathcal{I}\}$, podczas gdy *koideałem* $\mathcal{I}$ określamy rodzinę $\mathcal{I}^+ = \{A \subseteq X : A \notin \mathcal{I}\}$. Ideał jest *maksymalny*, kiedy $\mathcal{I} \cup \mathcal{I}^* = \mathcal{P}(X)$. Dla ideałów maksymalnych otrzymujemy $\mathcal{I}^+ = \mathcal{I}^*$.

Przez obcięcie ideału $\mathcal{I}$ do zbioru $A \subseteq X$ rozumiemy rodzinę $\mathcal{I}_{\restriction A} = \{B \cap A : B \in \mathcal{I}\}$. Zauważmy, że $\mathcal{I}_{\restriction A}$ jest ideałem wtedy i tylko wtedy, gdy $A \notin \mathcal{I}$.

Rodzina $\mathcal{T}$ generuje ideał $\mathcal{I}$, jeżeli

$$\mathcal{I} = \left\{ A \subseteq X : \underset{T_0, T_1, \ldots, T_n \in \mathcal{T}}{\exists} A \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} T_i \right\}.$$

Ideał $\mathcal{I}$ jest *gęsty*, gdy w każdym nieskończonym podzbiorze X możemy znaleźć nieskończony podzbiór, który należy do ideału.

Ideały $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ i $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ są izomorficzne ($\mathcal{I} \cong \mathcal{J}$), jeżeli istnieje bijekcja $f : X \to Y$ taka, że dla każdego $A \subseteq X$ zachodzi

$$A \in \mathcal{I} \Longleftrightarrow f[A] \in \mathcal{J}.$$

Mówimy, że $\mathcal{I}$ jest poniżej $\mathcal{J}$ w *porządku Katětova* ($\mathcal{I} \leqslant_K \mathcal{J}$), gdy istnieje funkcja $f : Y \to X$ taka, że dla każdego zbioru $A \subseteq X$ otrzymujemy: $A \in \mathcal{I} \Longrightarrow f^{-1}[A] \in \mathcal{J}$.

Ideał $\mathcal{I}$ na X jest *jednorodny*, gdy $\mathcal{I}_{\restriction A} \cong \mathcal{I}$ dla każdego $A \in \mathcal{I}^+$. Z jednorodnością związane jest następujące pojęcie rodziny jednorodności ideału: $H(\mathcal{I}) = \{A \subseteq X : \mathcal{I}_{\restriction A} \cong \mathcal{I}\}$. Jeśli ideał jest jednorodny, wtedy $H(\mathcal{I}) = \mathcal{I}^+$. Ideały jednorodne były zdefiniowane i badane w [54].

Ideał $\mathcal{I}$ na zbiorze X jest:

1. *P-ideałem (słabym P-ideałem)*, jeżeli dla każdej przeliczalnej rodziny $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ istnieje $B \in \mathcal{I}^*$ ($B \in \mathcal{I}^+$) taki, że $A \cap B$ jest skończony dla każdego $A \in \mathcal{A}$.
2. *P$^+$-ideałem (selektywnym ideałem)*, jeżeli dla każdego malejącego ciągu $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{I}^+$ istnieje $A \in \mathcal{I}^+$, $A \subseteq A_0$ taki, że $|A \cap (A_n \setminus A_{n+1})| < \omega$ ($|A \cap (A_n \setminus A_{n+1})| \leqslant 1$) dla każdego $n \in \omega$.
3. *P$^-$-ideałem*, jeżeli dla każdego malejącego ciągu $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{I}^+$ takiego, że dla każdego $n \in \omega$ mamy $A_n \setminus A_{n+1} \in \mathcal{I}$ istnieje $A \in \mathcal{I}^+$ taki, że $|A \setminus A_n| < \omega$ dla każdego $n \in \omega$.

Ideał na ω jest nazywany F_σ ($\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$, borelowskim, analitycznym, itd.), jeżeli jest F_σ ($\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$, borelowskim, analitycznym, itd.) podzbiorem $\mathcal{P}(\omega)$ z topologią indukowaną z przestrzeni Cantora $\{0,1\}^\omega$ przez utożsamienie podzbiorów ω z ich funkcjami charakterystycznymi.

Definicja 1.2. Odwzorowanie $\varphi : \mathcal{P}(\omega) \to [0, +\infty]$ jest *podmiarą* na ω, jeżeli dla każdych zbiorów $A, B \subseteq \omega$ mamy:

1. $\varphi(\emptyset) = 0$,
2. $A \subseteq B \Longrightarrow \varphi(A) \leqslant \varphi(B)$,
3. $\varphi(A \cup B) \leqslant \varphi(A) + \varphi(B)$.

Podmiara jest *półciągła z dołu* (w skrócie *lsc*), gdy:

$$\underset{A \subseteq \omega}{\forall}\ \varphi(A) = \lim_{n\to\infty} \varphi\left(A \cap \{0, 1, \ldots, n-1\}\right).$$

Dla każdej dolnie półciągłej podmiary φ, definiujemy następujące rodziny:

$$\mathrm{Fin}(\varphi) = \{A \subseteq \omega : \varphi(A) < \infty\},$$

$$\mathrm{Exh}(\varphi) = \left\{A \subseteq \omega : \lim_{n\to\infty} \varphi(A \setminus \{0, 1, \ldots, n-1\}) = 0\right\}.$$

Twierdzenie 1.3 ([59, 1.2. Lemma] i [64, Theorem 3.1])**.** Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem.

1. $\mathcal{I}$ jest F_σ ideałem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dolnie półciągła podmiara φ taka, że $\mathcal{I} = \mathrm{Fin}(\varphi)$.
2. $\mathcal{I}$ jest analitycznym P-ideałem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dolnie półciągła podmiara φ taka, że $\mathcal{I} = \mathrm{Exh}(\varphi)$.
3. $\mathcal{I}$ jest P-ideałem, który jest F_σ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dolnie półciągła podmiara φ taka, że $\mathcal{I} = \mathrm{Exh}(\varphi) = \mathrm{Fin}(\varphi)$.

W rozdziałach 3 i 4 będziemy wykorzystywać hipotezę continuum (w skrócie CH) lub bardzo pomocne narzędzie jakim jest aksjomat Martina. Oto krótkie wprowadzenie do tego zagadnienia.

Niech $(\mathbb{P}, \leqslant_P)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym.
Zbiór $D \subseteq \mathbb{P}$ jest:
a) *gęsty* w $\mathbb{P}$, gdy

$$\underset{p \in \mathbb{P}}{\forall}\ \underset{q \in D}{\exists}\ q \leqslant_P p.$$

b) *antyłańcuchem* w $\mathbb{P}$, kiedy

$$\underset{p,q \in D}{\forall} \left(p \neq q \Longrightarrow \left(\neg \underset{r \in \mathbb{P}}{\exists} (r \leqslant_P p \wedge r \leqslant_P q)\right)\right).$$

Zbiór częściowo uporządkowany $(\mathbb{P}, \leqslant_P)$ ma *ccc*, gdy każdy antyłańcuch w $\mathbb{P}$ jest przeliczalny. Zbiór $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{P}$ jest *filtrem* w $\mathbb{P}$, jeżeli

1.
$$\underset{p,q \in \mathcal{G}}{\forall} \underset{r \in \mathcal{G}}{\exists} (r \leqslant_P p \wedge r \leqslant_P q).$$

2.
$$\underset{p \in \mathcal{G}}{\forall} \underset{q \in \mathbb{P}}{\forall} (p \leqslant_P q \Longrightarrow q \in \mathcal{G}).$$

Zbiór $B \subseteq \mathbb{P}$ nazywamy *scentrowanym*, gdy

$$\underset{F \subseteq B}{\forall} \left(|F| < \omega \Longrightarrow \underset{q \in \mathbb{P}}{\exists} \underset{p \in F}{\forall} q \leqslant_P p \right).$$

Zbiór częściowo uporządkowany $(\mathbb{P}, \leqslant_P)$ jest σ-*scentrowany*, kiedy $\mathbb{P}$ może zostać przedstawiony jako przeliczalna suma zbiorów scentrowanych.

Zauważmy, że σ-scentrowany zbiór częściowo uporządkowany ma ccc.

Aksjomat Martina (dla zbioru σ-scentrowanego, dla zbioru przeliczalnego) w skrócie MA $(MA_{\sigma-scentrowany}, MA_{przeliczalny})$ jest stwierdzeniem:
Kiedy $(\mathbb{P}, \leqslant_P)$ jest niepustym częściowo uporządkowanym zbiorem mającym ccc (σ-scentrowanym, przeliczalnym) i $\mathbb{D}$ jest rodziną gęstych podzbiorów zbioru $\mathbb{P}$ taką, że $|\mathbb{D}| < \mathfrak{c}$, wtedy istnieje filtr $\mathcal{G}$ w $\mathbb{P}$ taki, że

$$\underset{D \in \mathbb{D}}{\forall} \mathcal{G} \cap D \neq \emptyset.$$

Aksjomat Martina jest niezależny od aksjomatów ZFC, to znaczy, nie można ani go udowodnić, ani udowodnić jego zaprzeczenia na gruncie tych aksjomatów (o ile aksjomaty ZFC są niesprzeczne).

2. PODSTAWOWE WŁASNOŚCI IDEAŁÓW

W tym rozdziale przedstawimy pojęcia, z których będziemy korzystać i zbadamy własności wybranych ideałów. Część wyników z tego rozdziału oraz następnego znajdują się w [53]. Następujące definicje pochodzą z pracy [21].

Definicja 2.1. Niech X będzie przestrzenią topologiczną Hausdorffa, a $\mathcal{I}$ ideałem na ω. Dla $A \notin \mathcal{I}$ ciąg $\langle x_n \rangle_{n \in A}$ jest *$\mathcal{I}$-zbieżny* do $x \in X$, gdy dla każdego otwartego otoczenia U punktu x otrzymujemy $\{n \in A : x_n \notin U\} \in \mathcal{I}$.

Jeśli $X = \mathbb{R}$, wtedy możemy używać równoważnej definicji, to znaczy ciąg $\langle x_n \rangle_{n \in A}$ liczb rzeczywistych jest $\mathcal{I}$-zbieżny do $x \in \mathbb{R}$, gdy

$$\underset{\epsilon > 0}{\forall} \{n \in A : |x_n - x| \geqslant \epsilon\} \in \mathcal{I}.$$

Definicja 2.2. Ideał $\mathcal{I}$ ma własność BW, jeżeli dla każdego ograniczonego ciągu $\langle x_n \rangle_{n \in \omega}$ liczb rzeczywistych istnieje $A \subseteq \omega$, $A \notin \mathcal{I}$ taki, że $\langle x_n \rangle_{n \in A}$ jest $\mathcal{I}$-zbieżny.

Definicja 2.3. Ideał $\mathcal{I}$ ma własność FinBW, jeżeli dla każdego ograniczonego ciągu $\langle x_n \rangle_{n \in \omega}$ liczb rzeczywistych istnieje $A \subseteq \omega$, $A \notin \mathcal{I}$ taki, że $\langle x_n \rangle_{n \in A}$ jest zbieżny.

Definicja 2.4. Ideał $\mathcal{I}$ ma własność hBW, jeżeli dla każdego $A \notin \mathcal{I}$ i każdego ograniczonego ciągu $\langle x_n \rangle_{n \in A}$ liczb rzeczywistych istnieje $B \subseteq A$, $B \notin \mathcal{I}$ taki, że $\langle x_n \rangle_{n \in B}$ jest $\mathcal{I}$-zbieżny.

Definicja 2.5. Ideał $\mathcal{I}$ ma własność hFinBW, jeżeli dla każdego $A \notin \mathcal{I}$ i każdego ograniczonego ciągu $\langle x_n \rangle_{n \in A}$ liczb rzeczywistych istnieje $B \subseteq A$, $B \notin \mathcal{I}$ taki, że $\langle x_n \rangle_{n \in B}$ jest zbieżny.

2.1. Wybrane ideały i ich własności

W tym podrozdziale zajmiemy się wybranymi ideałami na ω. Sprawdzimy takie własności ideałów jak: gęstość, klasa borelowska, jednorodność, hFinBW, hBW, FinBW i BW (w przypadku, kiedy te fakty są znane, przypomnimy je wraz z cytowaniami). Przy określaniu klas borelowskich ideałów będziemy wykorzystywać fakt, że jeśli ideał nie ma własność hFinBW, wtedy nie jest P^+-ideałem, a zatem nie jest typu F_σ (np. [1, Theorem 5.4, 8.1 i 8.2]). Zbadamy także czy ideały są P-ideałami.

Zaczniemy od dobrze znanych ideałów, których powyższe własności zostały już zbadane.

Definicja 2.6. Fin jest ideałem składającym się ze wszystkich skończonych podzbiorów ω.

Ideał Fin jest niegęstym P-ideałem typu F_σ (np. [55] na str. 13), który jest jednorodny ([54, Example 2.3]) i ma własności: hFinBW, hBW, FinBW, BW ([21, Prosposition 3.4]).

Definicja 2.7. $\mathcal{I}_d$ jest ideałem składającym się ze zbiorów o *gęstości asymptotycznej zero*, to znaczy

$$\mathcal{I}_d = \left\{ A \subseteq \omega : \limsup_{n \to \infty} \frac{|A \cap \{0, 1, \ldots, n\}|}{n+1} = 0 \right\}.$$

Ideał $\mathcal{I}_d$ jest gęstym P-ideałem typu $F_{\sigma\delta}$, nie jest typu F_σ (np. [55] na str. 13), nie jest jednorodny ([68, Wniosek 2.3.22 i Twierdzenie 2.3.28]), nie ma własności: BW, hBW, FinBW, hFinBW ([34, Example 3]).

Definicja 2.8. $\mathcal{I}_u$ jest ideałem składającym się ze zbiorów o *gęstości jednostajnej zero*, to znaczy

$$\mathcal{I}_u = \left\{ A \subseteq \omega : \lim_{h\to\infty} \max_{n\in\omega} \frac{|A \cap \{n, \ldots, n+h\}|}{h+1} = 0 \right\}.$$

Ideał $\mathcal{I}_u$ jest gęstym ideałem typu $F_{\sigma\delta}$, nie jest typu F_σ, nie jest P-ideałem i nie ma własności: BW, hBW, FinBW, hFinBW ([3]).

W tym miejscu zadamy następujące pytanie (wszystkie pytania pojawiające się w tej pracy są pytaniami otwartymi).

Problem 2.9. Czy ideał $\mathcal{I}_u$ jest jednorodny?

Definicja 2.10. Ideał składający się ze wszystkich zbiorów, których suma odwrotności elementów jest skończona oznaczamy przez

$$\mathcal{I}_{\frac{1}{n}} = \left\{ A \subseteq \omega : \sum_{n\in A} \frac{1}{n+1} < \infty \right\}.$$

Ideał $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$ jest gęstym P-ideałem typu F_σ (np. [55] na str. 13), ma własności: hFinBW, hBW, FinBW, BW ([21, Prosposition 3.4]).

Pokażemy, że $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$ nie jest jednorodny. Wykorzystamy do tego następujące twierdzenia i definicje.

Definicja 2.11 ([68, Definicja 2.3.24])**.** Ideał $\mathcal{I}$ nazywamy *rosnąco-niezmienniczym*, jeżeli dla każdego zbioru $A \in \mathcal{I}$ oraz dowolnego zbioru $B \subseteq \omega$ spełniającego $|A \cap \{0, 1, \ldots, n\}| \geqslant |B \cap \{0, 1, \ldots, n\}|$ dla wszystkich $n \in \omega$ otrzymujemy $B \in \mathcal{I}$.

Zauważmy, że ideał $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$ jest ideałem rosnąco-niezmienniczym - wystarczy wykorzystać kryterium porównawcze zbieżności szeregów liczbowych.

Twierdzenie 2.12 ([68, Twierdzenie 2.3.25])**.** Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem rosnąco-niezmienniczym. Wtedy dla dowolnego $A \in H(\mathcal{I})$, którego rosnącym ponumerowaniem elementów jest zbiór $\{a_n : n \in \omega\}$, funkcja $f : \omega \to A$ dana wzorem $f(n) = a_n$ jest izomorfizmem między $\mathcal{I}_{\restriction A}$ a $\mathcal{I}$.

Definicja 2.13 ([2, str. 423])**.** Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem na ω, a funkcja $f : \omega \to \omega$ będzie injekcją. Mówimy, że funkcja f jest *bi-$\mathcal{I}$-niezmiennicza*, jeżeli $f[A] \in \mathcal{I}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \in \mathcal{I}$ dla każdego zbioru $A \subseteq \omega$.

Twierdzenie 2.14 ([2, Corollary 20])**.** Niech $f : \omega \to \omega$ będzie rosnącą injekcją. Następujące warunki są równoważne:

1. f jest *bi-$\mathcal{I}_d$-niezmiennicza*,
2. $$\liminf_{n\to\infty} \frac{|f[\omega] \cap \{0, 1, \ldots, n\}|}{n+1} > 0,$$
3. $$\exists_{c\in\omega} \forall_{n\in\omega} f(n) \leqslant cn,$$

4. f jest *bi-$\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$-niezmiennicza.*

Twierdzenie 2.15. Ideał $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$ nie jest jednorodny.

Dowód. Przypuśćmy, że ideał $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$ jest jednorodny. Wtedy $H\left(\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}\right) = \mathcal{I}^{+}_{\frac{1}{n}}$. Wiedząc, że ideał $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$ jest ideałem rosnąco-niezmienniczym wykorzystujemy Twierdzenie 2.12 dla zbioru $A \in \mathcal{I}_d \setminus \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$ (taki zbiór istnieje - zobacz, np. [57, Przykład 6.2]), którego rosnącym ponumerowaniem elementów jest zbiór $\{a_n : n \in \omega\}$ i otrzymujemy funkcję $f : \omega \to A$ daną wzorem $f(n) = a_n$, która jest izomorfizmem między $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}\restriction A}$ a $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$. Następnie zauważamy, że warunek 2. z Twierdzenia 2.14 nie jest spełniony (ponieważ $A \in \mathcal{I}_d$), więc funkcja f nie jest bi-$\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$-niezmiennicza. Sprzeczność, bo funkcja f była izomorfizmem między $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}\restriction A}$ a $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$.

□

Następnie rozpatrzymy ideał van der Waerdena $\mathcal{W}$. Do zdefiniowania go wprowadzimy definicję AP-zbioru. Twierdzenie van der Waerdena z 1927 roku gwarantuje nam, że $\mathcal{W}$ jest ideałem.

Definicja 2.16 ([50, Definition 1])**.** Zbiór $A \subseteq \omega$ jest AP-zbiorem, gdy A zawiera ciągi arytmetyczne dowolnej skończonej długości.

Twierdzenie 2.17. (van der Waerden, [69]). Dla dowolnej partycji AP-zbioru na skończenie wiele części, co najmniej jedna część jest AP-zbiorem.

Definicja 2.18. Ideał van der Waerdena $\mathcal{W}$ jest rodziną zbiorów $A \subseteq \omega$ taką, że

$$\mathcal{W} = \{A \subseteq \omega : A \text{ nie jest AP-zbiorem}\}.$$

Ideał $\mathcal{W}$ jest gęstym ideałem typu F_σ, który nie jest P-ideałem [30], jest jednorodny [54, Example 2.6] i ma własności: hFinBW, hBW, FinBW, BW ([21, Prosposition 3.4]).

Poniżej przedstawimy ideał $\mathcal{D}_{fin}$, który pierwszy raz pojawił się w pracy [52] oraz ideał $\mathcal{D}$, którym zajmowali się między innymi Rafał Filipów i Lingsheng Shi w pracach [24], [63]. Pierwszy autor pokazał, że $\mathcal{D}$ jest ideałem, wykorzystując twierdzenie Ramsey'a. Zacznijmy od podania definicji zbiorów DP i DP-rich.

Definicja 2.19 ([63, Definition 4.2.2])**.** Zbiór $A \subseteq \omega$ jest DP-zbiorem, jeżeli istnieje nieskończony zbiór $S \subseteq \omega$ taki, że $D(S) \subseteq A$, gdzie $D(S) = \{m - n : m > n;\ m, n \in S\}$.

Definicja 2.20 ([52, Example 4.3])**.** Zbiór A jest zbiorem DP-rich, gdy dla każdego $n \in \omega$ istnieje zbiór $S \subseteq \omega$ taki, że $|S| = n$ i $D(S) \subseteq A$.

Definicja 2.21. Ideał $\mathcal{D}$ jest zdefiniowany następująco

$$\mathcal{D} = \left\{ A \subseteq \omega : \underset{S \in [\omega]^\omega}{\forall} D(S) \not\subseteq A \right\}.$$

Twierdzenie 2.22. $\mathcal{D}$ jest koanalitycznym ideałem.

Dowód. Zauważmy, że

$$\mathcal{D}^+ = \left\{ A \in \mathcal{P}(\omega) : \underset{S \in [\omega]^\omega}{\exists} D(S) \subseteq A \right\} = \left\{ A \in \mathcal{P}(\omega) : \underset{F \in \mathcal{P}(\omega) \setminus \mathrm{Fin}}{\exists} (A, F) \in C \right\} =$$

$$= pr_1[C \setminus (\mathcal{P}(\omega) \times \mathrm{Fin})],$$

gdzie $C = \{(A, F) \in \mathcal{P}(\omega) \times \mathcal{P}(\omega) : D(F) \subseteq A\}$. Zauważmy, że zbiór $\mathcal{P}(\omega) \times \mathrm{Fin}$ jest borelowski. Pokażemy, że C jest zbiorem domkniętym (uzasadniając, że dopełnienie zbioru C jest zbiorem otwartym). Wtedy $C \setminus (\mathcal{P}(\omega) \times \mathrm{Fin})$ będzie zbiorem borelowskim, więc $\mathcal{D}^+$ będzie analityczny jako rzut zbioru borelowskiego. Zauważmy, że

$$(A, F) \notin C \iff D(F) \nsubseteq A \iff \underset{x,y \in F}{\exists} (x > y \wedge x - y \notin A).$$

Wtedy $U = \{B \subseteq \omega : x - y \notin B\} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ i $V = \{H \subseteq \omega : x, y \in H\} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ są otwartymi otoczeniami $A \in \mathcal{P}(\omega)$ i $F \in \mathcal{P}(\omega) \setminus \mathrm{Fin}$ takimi, że $(A, F) \in U \times V \subseteq (\mathcal{P}(\omega) \times \mathcal{P}(\omega)) \setminus C$. Zatem zbiór $(\mathcal{P}(\omega) \times \mathcal{P}(\omega)) \setminus C$ jest zbiorem otwartym.

□

$\mathcal{D}$ jest gęstym ideałem ([24, Proposition 4.3]), który nie jest P-ideałem (wynika to z dowodu [52, Theorem 2.1]). Nie ma własności: FinBW i hFinBW ([63, Theorem 4.2.1]). Poniżej pokażemy, że ideał $\mathcal{D}$ ma własność hBW, a co za tym idzie także BW, poprawiając przy tym fragment z pracy ([24, Theorem 4.4]), w której jest błąd.

W dowodzie wykorzystamy definicję zbioru $\mathcal{D}$-rzadkiego oraz charakteryzację własności hBW. Jeśli $A, B \subseteq \omega$, to $A - B = \{a - b : a \in A, b \in B, a \geqslant b\}$, $A + n = \{a + n : a \in A\}$ i $A - n = \{a - n : a \in A\}$ dla dowolnego $n \in \omega$.

Definicja 2.23 ([24, str. 2009])**.** Zbiór $A \subseteq \omega$ jest $\mathcal{D}$-rzadki, jeżeli dla każdego $k \in D(A)$ istnieje jedynie jedna para $n, m \in A$ taka, że $k = m - n$.

Stwierdzenie 2.24 ([24, Proposition 4.3])**.**

1. Jeżeli $A \subseteq \omega$ jest $\mathcal{D}$-rzadki i $n \in \omega$, wtedy $A + n \in \mathcal{D}$.
2. Dla każdego nieskończonego $A \subseteq \omega$ istnieje nieskończony $\mathcal{D}$-rzadki $B \subseteq A$.
3. Ideał $\mathcal{D}$ jest gęsty.

Zauważmy, że w warunku 1. Stwierdzenia 2.24 otrzymamy również $(A - n) \cap \omega \in \mathcal{D}$, co wynika z dowodu tego podpunktu podanego w [24, Proposition 4.3].

Stwierdzenie 2.25 ([22, Proposition 2.8 i 2.9])**.** Ideał $\mathcal{I}$ ma własność BW (FinBW) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej rodziny $\{A_s : s \in \{0,1\}^{<\omega}\} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ spełniającej warunki:

1. $A_\emptyset = \omega$,
2. $A_s = A_{s^\frown 0} \cup A_{s^\frown 1}$,
3. $A_{s^\frown 0} \cap A_{s^\frown 1} = \emptyset$,

istnieją $x \in \{0,1\}^\omega$ i $B \subseteq \omega$, $B \notin \mathcal{I}$ takie, że $B \setminus A_{x\restriction n} \in \mathcal{I}$ ($B \setminus A_{x\restriction n} \in \mathrm{Fin}$) dla wszystkich $n \in \omega$.

Stwierdzenie 2.26 ([21, Proposition 3.3])**.** Ideał $\mathcal{I}$ ma własność hBW (hFinBW) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru $A \notin \mathcal{I}$ i każdej rodziny $\{A_s : s \in \{0,1\}^{<\omega}\} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ spełniającej warunki:

1. $A_\emptyset = A$,
2. $A_s = A_{s^\frown 0} \cup A_{s^\frown 1}$,
3. $A_{s^\frown 0} \cap A_{s^\frown 1} = \emptyset$,

istnieją $x \in \{0,1\}^\omega$ i $B \subseteq A$, $B \notin \mathcal{I}$ takie, że $B \setminus A_{x\restriction n} \in \mathcal{I}$ ($B \setminus A_{x\restriction n} \in \mathrm{Fin}$) dla wszystkich $n \in \omega$.

Twierdzenie 2.27. Ideał $\mathcal{D}$ ma własność hBW.

Dowód. Niech $A \subseteq \omega$ będzie taki, że $A \notin \mathcal{D}$. Niech rodzina $\{A_s : s \in \{0,1\}^{<\omega}\}$ spełnia warunki 1., 2., 3. ze Stwierdzenia 2.26. Skonstruujemy zbiory $E_n \subseteq \omega$ i $j_n \in \{0,1\}$ takie, że dla każdego $n \in \omega$ mamy:

1. E_n jest nieskończonym zbiorem,
2. $E_{n+1} \subseteq E_n$,
3. $D(E_n) \subseteq A_{(j_0,j_1,\ldots,j_{n-1})}$.

Ponieważ $A \notin \mathcal{D}$, to wiemy, że istnieje nieskończony zbiór $C \subseteq \omega$ taki, że $D(C) \subseteq A$. Niech $E_0 = C$. Załóżmy, że mamy skonstruowane E_k dla $k \leqslant n$ i j_k dla $k < n$. Definiujemy kolorowanie $c : [E_n]^2 \to \{0,1\}$ przez

$$c(\{a,b\}) = j \iff |a-b| \in A_{(j_0,j_1,\ldots,j_{n-1},j)}.$$

Z twierdzenia Ramsey'a istnieją nieskończony zbiór $E_{n+1} \subseteq E_n$ i $j_n \in \{0,1\}$ takie, że $c(\{a,b\}) = j_n$ dla każdych $a,b \in E_{n+1}$ takich, że $a \neq b$. To kończy konstrukcję.

Niech $E \subseteq C$ będzie nieskończonym zbiorem takim, że $F_n = E \setminus E_n$ jest skończony dla każdego $n \in \omega$. Korzystając ze Stwierdzenia 2.24 możemy założyć, że E jest $\mathcal{D}$-rzadki.

Niech $B = D(E) \subseteq D(C) \subseteq A$ i $x \in \{0,1\}^\omega$ będzie taki, że $x(n) = j_n$ dla każdego $n \in \omega$. Wtedy $B \notin \mathcal{D}$ i twierdzimy, że $B \setminus A_{x\restriction n} \in \mathcal{D}$ dla każdego $n \in \omega$ (to zakończy dowód przez Stwierdzenie 2.26).

Niech $n \in \omega$. Wtedy

$$B \setminus A_{x\restriction n} = D(F_n \cup (E \cap E_n)) \setminus A_{x\restriction n} =$$

$$= [D(F_n) \cup D(E \cap E_n) \cup ((F_n - (E \cap E_n)) \cap \omega) \cup (((E \cap E_n) - F_n) \cap \omega)] \setminus A_{x\restriction n} \subseteq$$

$$\subseteq D(F_n) \cup ((F_n - (E \cap E_n)) \cap \omega) \cup (((E \cap E_n) - F_n) \cap \omega).$$

Zbiór $D(F_n) \in \mathcal{D}$, gdyż jest zbiorem skończonym. Zbiór

$$(F_n - (E \cap E_n)) \cap \omega = \bigcup_{a \in E \cap E_n} (F_n - a) \cap \omega \in \mathcal{D},$$

gdyż jest zbiorem skończonym. Co więcej

$$((E \cap E_n) - F_n) \cap \omega = \bigcup_{b \in F_n} ((E \cap E_n) - b) \cap \omega$$

jest skończoną sumą przesunięć zbioru $\mathcal{D}$-rzadkiego, więc przez Stwierdzenie 2.24 otrzymujemy $((E \cap E_n) - F_n) \cap \omega \in \mathcal{D}$. Zatem $B \setminus A_{x\restriction n} \in \mathcal{D}$.

□

Problem 2.28. Czy ideał $\mathcal{D}$ jest jednorodny?

Definicja 2.29. Ideał $\mathcal{D}_{fin}$ definiujemy następująco:

$$\mathcal{D}_{fin} = \left\{ A \subseteq \omega : \underset{n \in \omega}{\exists} \underset{S \in [\omega]^n}{\forall} D(S) \not\subseteq A \right\}.$$

Stwierdzenie 2.30. $\mathcal{D}_{fin}$ jest ideałem.

Dowód. Zauważmy, że $\mathcal{D}_{fin}$ zawiera wszystkie skończone podzbiory ω i $\omega \notin \mathcal{D}_{fin}$. Jeżeli $A \subseteq B$ i $B \in \mathcal{D}_{fin}$, wtedy $A \in \mathcal{D}_{fin}$ wprost z definicji ideału $\mathcal{D}_{fin}$. Pozostaje do sprawdzenia następujący warunek: $A, B \in \mathcal{D}_{fin} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{D}_{fin}$.

Pokażemy, że: $A \cup B \notin \mathcal{D}_{fin} \Longrightarrow (A \notin \mathcal{D}_{fin} \vee B \notin \mathcal{D}_{fin})$. Jeżeli $A \cup B \notin \mathcal{D}_{fin}$, wtedy z definicji ideału D_{fin} otrzymujemy:

$$\underset{n\in\omega}{\forall}\ \underset{E_n\in[\omega]^n}{\exists} D(E_n) \subseteq A \cup B.$$

Niech $c_n : [E_n]^2 \to \{0,1\}$ będzie takim kolorowaniem, że dla każdego $n \in \omega$:

$$c_n(\{i,j\}) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } |j-i| \in A, \\ 1, & \text{gdy } |j-i| \in B. \end{cases}$$

Z twierdzenia Ramsey'a dostajemy:

$$\underset{k\in\omega}{\forall}\ \underset{n_k\in\omega}{\exists}\ \underset{H_k\in[E_{n_k}]^k}{\exists} c_{n_k}{\restriction}[H_k]^2 = const.$$

Mamy dwa przypadki:

1. dla nieskończenie wielu $k \in \omega$ otrzymujemy $c_{n_k}{\restriction}[H_k]^2 = 0$. Wtedy $D(H_k) \subseteq A$ dla nieskończenie wielu $k \in \omega$. Zatem $A \notin \mathcal{D}_{fin}$.
2. dla nieskończenie wielu $k \in \omega$ otrzymujemy $c_{n_k}{\restriction}[H_k]^2 = 1$. Wtedy $D(H_k) \subseteq B$ dla nieskończenie wielu $k \in \omega$. Zatem $B \notin \mathcal{D}_{fin}$.

□

Ideał $\mathcal{D}_{fin}$ jest gęsty (wynika to z [24, Proposition 4.3(2)]), nie jest P-ideałem (to wynika z dowodu [52, Theorem 2.1] po drobnej modyfikacji), ma własności: hFinBW, hBW, FinBW, BW ([21, Proposition 3.4]) oraz jest typu F_σ, ponieważ jego dopełnienie jest zbiorem G_δ:

$$\mathcal{D}_{fin}^{+} = \left\{ A \subseteq \omega : \underset{k\in\omega}{\forall}\ \underset{B\in[\omega]^k}{\exists} D(B) \subseteq A \right\} = \bigcap_{k\in\omega} \bigcup_{B\in[\omega]^k} \bigcap_{a,b\in B,\, b>a} \{A \subseteq \omega : b-a \in A\} \in G_\delta.$$

Pozostaje następujące pytanie.

Problem 2.31. Czy ideał $\mathcal{D}_{fin}$ jest jednorodny?

Następnie zaprezentujemy ideały $\mathcal{F}$ i $\mathcal{H}$. Ideał Folkmana $\mathcal{F}$ był rozpatrywany w [27], gdzie autorka udowodniła, że przy założeniu $MA_{\sigma-scentrowany}$ istnieje $\mathcal{F}$-przestrzeń, która nie jest $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$-przestrzenią. Był także rozważany w [54], gdzie autorzy postawili pytanie, czy jest on jednorodny. Ideał Hindmana $\mathcal{H}$ był badany między innymi w pracach [24] i [19]. To, że są to ideały, wynika z twierdzeń Folkmana i Hindmana.

Definicja 2.32 ([36, Definition 2.2])**.** Zbiór $A \subseteq \omega$ jest IP-zbiorem, jeżeli istnieje nieskończony zbiór $D \subseteq \omega$ taki, że $FS(D) \subseteq A$, gdzie $FS(D)$ oznacza zbiór wszystkich skończonych, niepustych sum różnych elementów ze zbioru D.

Definicja 2.33 ([27, str. 118])**.** Zbiór $A \subseteq \omega$ jest zbiorem IP-rich, gdy dla każdego $n \in \omega$ istnieje zbiór $D \subseteq A$ taki, że $|D| = n$ i $FS(D) \subseteq A$.

Twierdzenie 2.34 (Hindman, [39])**.** Dla dowolnej partycji IP-zbioru na skończenie wiele części, co najmniej jedna część jest IP-zbiorem.

Twierdzenie 2.35 ([7, uwaga przed Theorem 1.3 na str. 43])**.** Dla dowolnej partycji IP-rich-zbioru na skończenie wiele części, co najmniej jedna część jest IP-rich-zbiorem.

Definicja 2.36. Ideałem *Folkmana* $\mathcal{F}$ nazywamy rodzinę zbiorów $A \subseteq \omega$ taką, że

$$\mathcal{F} = \left\{ A \subseteq \omega : \underset{n \in \omega}{\exists} \underset{D \in [\omega]^n}{\forall} FS(D) \not\subseteq A \right\}.$$

Ideał $\mathcal{F}$ jest gęstym ideałem typu F_σ, który nie jest P-ideałem ([29]) i ma własności: hFinBW, hBW, FinBW, BW ([21, Proposition 3.4]).

Poniższe pytanie pochodzi z pracy [54, Problem 2.8].

Problem 2.37. Czy ideał $\mathcal{F}$ jest jednorodny?

Definicja 2.38. Ideałem Hindmana $\mathcal{H}$ nazywamy rodzinę zbiorów $A \subseteq \omega$ taką, że

$$\mathcal{H} = \left\{ A \subseteq \omega : \underset{D \in [\omega]^\omega}{\forall} FS(D) \not\subseteq A \right\}.$$

Ideał $\mathcal{H}$ jest gęstym ideałem, który nie jest P-ideałem ([29]), jest koanalityczny (wyjaśnienie jest analogiczne do dowodu Twierdzenia 2.22), jednorodny ([54, Example 2.6]), ma własność BW ([24, Theorem 3.3]) i hBW ([19, Theorem 4.5]), ale nie ma własności: FinBW i hFinBW ([63, Theorem 4.2.1]).

Teraz przejdziemy do ideałów $\mathcal{L}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{A}$. Wszystkimi tymi trzema ideałami zajmowała się Flašková w swoim doktoracie ([33]). Własność FinBW dla ideału $\mathcal{L}$ sprawdzali Nowik i Klinga w pracy [48, Lemma 3.2].

Definicja 2.39. Zbiór $A \subseteq \omega$ nazywamy zbiorem *lacunary* (w skrócie *Lac*), jeżeli

$$\lim_{n \to \infty} (a_{n+1} - a_n) = \infty,$$

gdzie $\{a_n : n \in \omega\}$ jest rosnącym ponumerowaniem elementów zbioru A.

Definicja 2.40. Ideałem lacunary nazywamy ideał generowany przez zbiory lacunary i oznaczamy symbolem $\mathcal{L}$.

Ideał $\mathcal{L}$ jest gęstym ideałem, który nie jest P-ideałem ([33, Lemma 1.2.8]), nie jest jednorodny (zostanie to pokazane w rozdziale 3., zobacz Twierdzenie 3.58), nie ma własności FinBW, hFinBW ([48, Lemma 3.2]), ale ma własności BW, hBW (Wniosek 3.57) oraz jest typu $F_{\sigma\delta\sigma}$, ponieważ

$$\mathcal{L} = \bigcup_{r \in \omega} \bigcap_{k \in \omega} \bigcup_{m \in \omega} \bigcap_{n > m} \{A \subseteq \omega : a_{n+r+1} - a_n \geqslant k\} \in F_{\sigma\delta\sigma}$$

i nie jest typu F_σ, bo nie ma własności FinBW.

Definicja 2.41. Nieskończony zbiór $A \subseteq \omega$ jest zbiorem *cienkim*, jeżeli

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 0,$$

gdzie $\{a_n : n \in \omega\}$ jest rosnącym ponumerowaniem elementów zbioru A.
Nieskończony zbiór $A \subseteq \omega$ jest zbiorem *prawie cienkim*, jeżeli

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1,$$

gdzie $\{a_n : n \in \omega\}$ jest rosnącym ponumerowaniem elementów zbioru A.

Definicja 2.42. Ideałem *cienkim* nazywamy ideał generowany przez zbiory cienkie i oznaczamy symbolem $\mathcal{T}$.

Ideał $\mathcal{T}$ jest gęstym ideałem typu $F_{\sigma\delta\sigma}$, nie jest typu F_σ, nie jest P-ideałem ([33, Lemma 1.1.5] i [25, str. 48]) i nie jest jednorodny, ma własności: FinBW, BW (wynika z [21, Proposition 4.1], bo ideał $\mathcal{T}$ rozszerza się do ideału $\mathcal{W}$ ([33, Lemma 1.5.3 i str. 9]), który ma własność FinBW), ale nie ma własności: hBW, hFinBW (dowody własności ideału $\mathcal{T}$ znajdziemy poniżej i w rozdziale 3).

Twierdzenie 2.43. Ideał $\mathcal{T}$ nie ma własności hFinBW.

Dowód. Przypuśćmy, że ideał $\mathcal{T}$ ma własność hFinBW. Niech $\{A_s : s \in \{0,1\}^{<\omega}\} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ będzie rodziną daną wzorem

$$A_s = \left\{ 2^{k \cdot 2^{|s|} + \sum\limits_{i=0}^{n-1} 2^i s_i} : k \in \omega \right\},$$

gdzie $s = \langle s_0, s_1, \ldots, s_{n-1} \rangle$ dla każdego $n \in \omega$ oraz $A = \{2^k : k \in \omega\}$. Zauważmy, że rodzina ta spełnia założenia Stwierdzenia 2.26, to znaczy spełnia warunki:

1. $A_\emptyset = A$,
2. $A_s = A_{s^\frown 0} \cup A_{s^\frown 1}$,
3. $A_{s^\frown 0} \cap A_{s^\frown 1} = \emptyset$.

Zatem korzystając z tego stwierdzenia, otrzymujemy

$$\underset{B \notin \mathcal{T},\, B \subseteq A}{\exists} \; \underset{x \in \{0,1\}^\omega}{\exists} \; \underset{n \in \omega}{\forall} \; B \setminus A_{x \restriction n} \in \text{Fin}.$$

Skoro $B = \{b_n : n \in \omega\} \notin \mathcal{T}$, gdzie zbiór $\{b_n : n \in \omega\}$ jest rosnącym ponumerowaniem zbioru B, to

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = q > 0.$$

Wtedy istnieje $k \in \omega$ takie, że $\frac{1}{2^{2^k}} < q$. Z tego, że $B \setminus A_{x \restriction k} \in \text{Fin}$, otrzymujemy:

$$q = \limsup_{n \to \infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} \leqslant \frac{1}{2^{2^k}} < q,$$

gdyż $B \setminus (B \setminus A_{x \restriction k}) = B \cap A_{x \restriction k} \subseteq A_{x \restriction k}$. Sprzeczność. Zatem $\mathcal{T}$ nie ma własności hFinBW.

□

Twierdzenie 2.44. Jeżeli ideał $\mathcal{I}$ jest jednorodny i ma własność FinBW, wtedy $\mathcal{I}$ ma własność hFinBW.

Dowód. Niech zbiór $A \notin \mathcal{I}$, funkcja $f : \omega \to A$ będzie izomorfizmem między $\mathcal{I}$ a $\mathcal{I}_{\restriction A}$ oraz ciąg $\langle x_n \rangle_{n \in A}$ będzie ograniczonym ciągiem liczb rzeczywistych. Mamy pokazać, że istnieje $C \subseteq A$, $C \notin \mathcal{I}$ taki, że $\langle x_k \rangle_{k \in C}$ jest zbieżny. Definiujemy ciąg $\langle y_n \rangle_{n \in \omega}$ wzorem $y_n = x_{f(n)}$. Skoro $\mathcal{I}$ ma własność FinBW, to istnieją $B \subseteq \omega$, $B \notin \mathcal{I}$ i $L \in \mathbb{R}$ takie, że:

$$\underset{\epsilon > 0}{\forall} \{n \in B : |y_n - L| \geqslant \epsilon\} \in \text{Fin}.$$

Niech $C = f[B] \notin \mathcal{I}_{\restriction A}$ i $C \subseteq A$. Twierdzimy, że $\langle x_k \rangle_{k \in C}$ jest zbieżny do L. Niech $\epsilon > 0$. Wtedy

$$\{k \in C : |x_k - L| \geqslant \epsilon\} = f[\{n \in B : |y_n - L| \geqslant \epsilon\}] \in \text{Fin}.$$

□

Wniosek 2.45. Ideał $\mathcal{T}$ nie jest jednorodny.

Dowód. Teza wynika z faktu, że ideał cienki ma własność FinBW oraz z Twierdzeń 2.43 i 2.44.

□

Definicja 2.46. Ideałem *prawie cienkim* nazywamy ideał generowany przez zbiory prawie cienkie i oznaczamy symbolem $\mathcal{A}$.

Ideał $\mathcal{A}$ jest gęstym ideałem, który nie jest P-ideałem ([33, Lemma 1.1.5]), ma własności: hFinBW, hBW, FinBW, BW ([21, Proposition 3.4]) oraz jest typu F_σ, ponieważ

$$\mathcal{A} = \bigcup_{r\in\omega} \bigcup_{k\in\omega} \bigcup_{m\in\omega} \bigcap_{n\geqslant m} \left\{A \subseteq \omega : \frac{a_n}{a_{n+r+1}} < 1 - \frac{1}{k}\right\} \in F_\sigma.$$

Zauważmy, że $\mathcal{T} \not\cong \mathcal{A}$, ponieważ $\mathcal{T}$ nie jest typu F_σ, $\mathcal{A}$ jest typu F_σ a izomorfizm zachowuje klasy borelowskie. Pozostaje poniższy problem związany z ideałem $\mathcal{A}$.

Problem 2.47. Czy ideał $\mathcal{A}$ jest jednorodny?

Ostatnim ideałem rozpatrywanym w tym podrozdziale będzie ideał piecewise syndetic $\mathcal{I}_{PS}$, który ma zastosowanie w teorii układów dynamicznych. W definicjach poniżej przyjmujemy, że $\{a_n : n \in \omega\}$ jest rosnącym ponumerowaniem elementów zbioru $A \subseteq \omega$.

Definicja 2.48. Zbiór $A \subseteq \omega$ jest zbiorem *piecewise syndetic*, gdy

$$\underset{b>0}{\exists} \ \underset{N>0}{\forall} \ \underset{i\in\omega}{\exists} \ \underset{k\in\{i,\ldots,i+N\}}{\forall} a_{k+1} - a_k \leqslant b.$$

W 1968 r. Brown udowodnił, że każde pokolorowanie ω na skończenie wiele części posiada jednokolorowy zbiór piecewise syndetic (zobacz [13]).

Twierdzenie 2.49 ([35, Theorem 1.4])**.** Dla dowolnej partycji zbioru piecewise syndetic na skończenie wiele części, co najmniej jedna część jest zbiorem piecewise syndetic.

Definicja 2.50. Definiujemy ideał $\mathcal{I}_{PS}$ następująco:

$$\mathcal{I}_{PS} = \left\{A \subseteq \omega : \underset{b>0}{\forall} \ \underset{N>0}{\exists} \ \underset{i\in\omega}{\forall} \ \underset{k\in\{i,\ldots,i+N\}}{\exists} a_{k+1} - a_k > b\right\} =$$
$$= \{A \subseteq \omega : A \text{ nie jest zbiorem piecewise syndetic}\}.$$

Ideał $\mathcal{I}_{PS}$ jest gęstym ideałem, który nie jest P-ideałem, jest jednorodny, nie ma własności: FinBW, hFinBW, hBW, BW (dowody poniżej) oraz jest typu $F_{\sigma\delta}$, ponieważ

$$\mathcal{P}(\omega) \setminus \mathcal{I}_{PS} = \left\{A \subseteq \omega : \underset{b>0}{\exists} \ \underset{N>0}{\forall} \ \underset{i\in\omega}{\exists} \ \underset{k\in\{i,\ldots,i+N\}}{\forall} a_{k+1} - a_k \leqslant b\right\} =$$
$$= \bigcup_{b>0} \bigcap_{N>0} \bigcup_{i\in\omega} \bigcap_{k\in\{i,\ldots,i+N\}} \{A \subseteq \omega : a_{k+1} - a_k \leqslant b\} \in G_{\delta\sigma}$$

i nie jest typu F_σ, bo nie ma własności FinBW.

Lemat 2.51. Ideał $\mathcal{I}_{PS}$ nie jest P-ideałem.

Dowód. Niech $A_k \subseteq \omega$ będą zbiorami postaci $A_k = \{2^n + k : n \in \omega\}$ dla każdego $k \in \omega$. Wtedy $A_k \in \mathcal{I}_{PS}$ dla każdego $k \in \omega$. Mamy pokazać, że dla każdego zbioru $B \in \mathcal{I}_{PS}$ istnieje zbiór A_k taki, że $|A_k \setminus B| = \omega$. Przypuśćmy, że istnieje zbiór $B \in \mathcal{I}_{PS}$ taki, że dla każdego zbioru A_k otrzymujemy $|A_k \setminus B| < \omega$. Pokażemy, że wtedy $B \notin \mathcal{I}_{PS}$. Niech $b = 1$ i ustalmy dowolne $N \in \omega$. Ponieważ $|A_k \setminus B| < \omega$, to istnieje $j \in \omega$ takie, że $j > \max(A_k \setminus B)$ dla każdego $k \leqslant N + 1$. Niech $n \in \omega$ będzie takie, że $2^n > j$. Wtedy zbiór B zawiera cały przedział $\{2^n, 2^n + 1, \ldots, 2^n + N + 1\}$, więc $B \notin \mathcal{I}_{PS}$. Sprzeczność.

□

Do udowodnienia następnego twierdzenia skorzystamy z lematu oraz stwierdzenia, które podajemy poniżej.

Lemat 2.52. Niech $A = \{a_n : n \in \omega\} \subseteq \omega$ będzie taki, że $a_n < a_{n+1}$ dla każdego $n \in \omega$. Następujące warunki są równoważne:

1. $A \notin \mathcal{I}_{PS}$,
2. $$\underset{b>0}{\exists} \ \underset{\langle i_n \rangle_{n\in\omega} \in \omega^\omega}{\exists} \ \underset{n\in\omega}{\forall} \ \underset{k<n}{\forall} \ (i_n + n < i_{n+1} \wedge a_{i_n+k+1} - a_{i_n+k} \leqslant b).$$

Dowód. $(2. \implies 1.)$ Niech $b > 0$ i $\langle i_n \rangle_{n\in\omega} \in \omega^\omega$ będą takie, że dla każdych $n \in \omega$, $k < n$ otrzymujemy $i_n + n < i_{n+1}$ i $a_{i_n+k+1} - a_{i_n+k} \leqslant b$. Definiujemy $I_n = \{a_{i_n}, a_{i_n} + 1, \ldots, a_{i_n+n}\}$ dla każdego $n \in \omega$. Wtedy dla każdych $n \in \omega$ i $l \in \{i_n, i_n + 1, \ldots, i_n + n\}$ mamy $a_{l+1} - a_l \leqslant b$. Zatem

$$\bigcup_{n\in\omega} I_n \cap A \notin \mathcal{I}_{PS},$$

więc $A \notin \mathcal{I}_{PS}$.

$(1. \implies 2.)$ Załóżmy, że $A = \{a_n : n \in \omega\} \notin \mathcal{I}_{PS}$. Istnieje $b > 0$ taki, że dla każdego $N > 0$ istnieje $i \in \omega$, że dla każdego $k \leqslant N$ otrzymujemy $a_{i+k+1} - a_{i+k} \leqslant b$. Konstruujemy ciąg $\langle i_n \rangle_{n\in\omega} \in \omega^\omega$. Załóżmy, że i_j zostały zdefiniowane dla $j < n$ i spełniają warunki: $i_j + j < i_{j+1}$ dla każdego $j < n - 1$ oraz $a_{i_j+k+1} - a_{i_j+k} \leqslant b$ dla każdych $j < n$ i $k < j$. Dla $N = 2n + i_{n-1}$ istnieje $i \in \omega$ taki, że $a_{i+l+1} - a_{i+l} \leqslant b$ dla każdego $l \leqslant N$. Niech $i_n = \max\{i, i_{n-1} + n - 1\} + 1$. Wtedy $i_{n-1} + n - 1 < i_n$. Niech $k < n$ i $l = i_n - i + k$. Z tego dostajemy $l \leqslant N$. Zatem $a_{i_n+k+1} - a_{i_n+k} \leqslant b$.

□

Stwierdzenie 2.53 ([54, Corollary 2.2])**.** Następujące warunki są równoważne dla każdego ideału $\mathcal{I}$ na ω:

1. $\mathcal{I}$ jest jednorodny,
2. dla każdego $B \notin \mathcal{I}$ istnieje $A \subseteq B$ taki, że $A \in H(\mathcal{I}) = \{C \subseteq \omega : \mathcal{I}\restriction_C \cong \mathcal{I}\}$.

Twierdzenie 2.54. Ideał $\mathcal{I}_{PS}$ jest jednorodny.

Dowód. Pokażemy, że zachodzi podpunkt 2. w Stwierdzeniu 2.53. Niech $A' = \{a'_n : n \in \omega\} \notin \mathcal{I}_{PS}$, gdzie elementy zbioru A' są ponumerowane rosnąco. Wtedy korzystając z Lematu 2.52 istnieją $M > 0$ oraz ciąg $\langle i_n \rangle_{n\in\omega} \in \omega^\omega$ takie, że dla każdych $n \in \omega$, $k < n$ otrzymujemy: $i_n + n < i_{n+1}$ i $a'_{i_n+k+1} - a'_{i_n+k} \leqslant M$. Definiujemy przedziały $I_n = \{a'_{i_n}, a'_{i_n} + 1, \ldots, a'_{i_n+n}\}$ dla każdego $n \in \omega$. Wtedy odległości między kolejnymi elementami zbioru A' są w nich ograniczone przez M.

Zdefiniujmy: $A_n = A' \cap I_n$ i
$$A = \bigcup_{n\in\omega} A_n.$$
Niech $f : \omega \to A$ będzie rosnącym ponumerowaniem elementów zbioru $A \subseteq \omega$. Twierdzimy, że bijekcja f jest świadkiem na izomorfizm $\mathcal{I}_{PS\restriction A} \cong \mathcal{I}_{PS}$. Najpierw pokażemy, że jeżeli $B' \notin \mathcal{I}_{PS}$, to $f[B'] \notin \mathcal{I}_{PS}$. Niech $B' = \{b'_n : n \in \omega\} \notin \mathcal{I}_{PS}$, gdzie elementy zbioru B' są ponumerowane rosnąco. Wtedy korzystając z Lematu 2.52 istnieją $N > 0$ oraz ciąg $\langle j_n\rangle_{n\in\omega} \in \omega^\omega$ takie, że dla każdych $n \in \omega$, $k < n$ otrzymujemy: $j_n + n < j_{n+1}$ i $b'_{j_n+k+1} - b'_{j_n+k} \leqslant N$. Definiujemy przedziały $J_n = \{b'_{j_n}, b'_{j_n} + 1, \ldots, b'_{j_n+n}\}$ dla każdego $n \in \omega$ tak, że odległości między kolejnymi elementami zbioru B' są w nich ograniczone przez N.

Zdefiniujmy: $B_n = B' \cap J_n$ i
$$B = \bigcup_{n\in\omega} B_n.$$
Bez straty ogólności załóżmy, że:
$$\underset{k\in\omega}{\forall}\ \underset{n\in\omega}{\exists}\ f[J_k] \subseteq I_n.$$
Możemy tak założyć, bo funkcja f jest rosnącym ponumerowaniem zbioru A i każdy A_n jest zawarty w przedziale I_n (jeżeli zachodzi taka konieczność, to bierzemy większą część przedziału, która jest zawarta w I_n). W zbiorze B_k wszystkie odległości między kolejnymi elementami w przedziałach J_k są mniejsze niż N, więc w zbiorze $f[B_k]$ wszystkie odległości między kolejnymi elementami są mniejsze niż $N \cdot M$. Dlatego, że moc zbioru $f[B_k]$ dąży do nieskończoności, gdy moc zbioru B_k dąży do nieskończoności, to
$$f[B] = \bigcup_{n\in\omega} f[B_n] \notin \mathcal{I}_{PS}.$$
Więc $f[B'] \notin \mathcal{I}_{PS}$.

Teraz udowodnimy, że jeżeli $B' \in \mathcal{I}_{PS}$, to $f[B'] \in \mathcal{I}_{PS}$. Wiedząc, że $B' \in \mathcal{I}_{PS}$ i korzystając z definicji ideału $\mathcal{I}_{PS}$ oraz z tego, że funkcja jest rosnącym ponumerowaniem elementów zbioru $f[B']$ otrzymujemy, że $f[B'] \in \mathcal{I}_{PS}$.

$\square$

Pokażemy, że ideał $\mathcal{I}_{PS}$ nie ma własności BW.

Twierdzenie 2.55. Ideał $\mathcal{I}_{PS}$ nie ma własności BW.

Dowód. Przypuśćmy, że ideał $\mathcal{I}_{PS}$ ma własność BW. Niech $\{A_s : s \in \{0,1\}^{<\omega}\} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ będzie rodziną daną wzorem
$$A_s = \left\{ 2^{|s|}k + \sum_{i=0}^{n-1} 2^i s_i : k \in \omega \right\},$$
gdzie $s = \langle s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}\rangle$ dla każdego $n \in \omega$. Zauważmy, że rodzina ta spełnia założenia Stwierdzenia 2.25, to znaczy spełnia warunki:

1. $A_\emptyset = \omega$,
2. $A_s = A_{s^\frown 0} \cup A_{s^\frown 1}$,
3. $A_{s^\frown 0} \cap A_{s^\frown 1} = \emptyset$.

Zatem korzystając z tego stwierdzenia, otrzymujemy
$$\underset{A\notin\mathcal{I}_{PS}}{\exists}\ \underset{x\in\{0,1\}^\omega}{\exists}\ \underset{n\in\omega}{\forall}\ A \setminus A_{x\restriction n} \in \mathcal{I}_{PS}.$$

Skoro $A = \{a_n : n \in \omega\} \notin \mathcal{I}_{PS}$, to z Lematu 2.52 istnieją $b \in \omega$ i ciąg $\langle i_n \rangle_{n \in \omega} \in \omega^\omega$ takie, że dla każdych $n \in \omega$, $k < n$ otrzymujemy: $i_n + n < i_{n+1}$ i $a_{i_n+k+1} - a_{i_n+k} \leqslant b$.

Definiujemy przedziały $I_t = \{a_{i_t}, a_{i_t} + 1, \ldots, a_{i_t+t}\}$ dla każdego $t \in \omega$. Niech $n_0 \in \omega$ będzie takie, że $2^{n_0} > 2b$. Zdefiniujmy

$$A' = \bigcup_{t \in \omega} (A \cap I_t) \notin \mathcal{I}_{PS}.$$

Odejmując od A' zbiór $A_{x\restriction n_0}$ zabraliśmy co najwyżej połowę elementów zbioru A', więc odległości między kolejnymi elementami zbioru $A' \setminus A_{x\restriction n_0}$ będą mniejsze lub równe $2b$. Czyli $A' \setminus A_{x\restriction n_0} \notin \mathcal{I}_{PS}$. Dlatego, że $A' \setminus A_{x\restriction n_0} \subseteq A \setminus A_{x\restriction n_0}$, to $A \setminus A_{x\restriction n_0} \notin \mathcal{I}_{PS}$. Sprzeczność.

□

2.2. *Zależności między ideałami*

Pod diagramem (gdzie $\mathcal{I} \to \mathcal{J}$ oznacza $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$) przedstawimy dowody na zawierania (lub ich brak) między ideałami rozważanymi w poprzednim podrozdziale. Zaprezentujemy tylko nietrywialne zawierania i takie, które nie zostały udowodnione w innych pracach (np. w [33] lub [24]). Na poniższym diagramie, jeżeli strzałki nie ma, to znaczy, że nie ma zawierania między ideałami (by nie komplikować rysunku, autor przypuszcza, że będzie strzałka między ideałem $\mathcal{W}$, a $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$ i nie dorysowuje strzałki od ideału $\mathcal{A}$ do $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$ (bo zawieranie między tymi ideałami wynika z [33, str. 13])).

$$\begin{tikzcd}
& & & & \mathrm{Fin} \arrow[d] & & & & \\
& & & & \mathcal{T} \arrow[d] & & & & \\
& \mathcal{D}_{fin} \arrow[dl] \arrow[dr] & & & \mathcal{A} \arrow[lll] \arrow[rrr] \arrow[d] & & & \mathcal{W} \arrow[dl] \arrow[dr, "?"] & \\
\mathcal{F} \arrow[dr] & & \mathcal{D} \arrow[dl] & & \mathcal{L} \arrow[ll] \arrow[rr] & & \mathcal{I}_u \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathcal{I}_{\frac{1}{n}} \arrow[dl] \\
& \mathcal{H} & & & & \mathcal{I}_{PS} & & \mathcal{I}_d &
\end{tikzcd}$$

Zawieranie $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{I}_u$ wynika z twierdzenia Szemerédiego (zobacz [14, Theorem 1.1] lub [65]). Ciągle otwartym pytaniem pozostaje, czy prawdziwe jest zawieranie $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$, co w literaturze nazywane jest hipotezą Erdősa-Turána. Fakt, że $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}} \nsubseteq \mathcal{H}$ wynika z dowodu Twierdzenia 4.19, które zostanie podane w dalszej części pracy.

Stwierdzenie 2.56. $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}} \nsubseteq \mathcal{I}_{PS}$.

Dowód. Niech $A = \{10^n + k : n \in \omega, k \leqslant n\}$. Zauważmy, że

$$\sum_{i \in A} \frac{1}{i+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{10^n + k + 1} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{10^n} < \infty,$$

czyli $A \in \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$. Zbiór $A \notin \mathcal{I}_{PS}$, gdyż spełnia definicję zbioru piecewise syndetic dla stałej $b = 1$. □

Stwierdzenie 2.57. $\mathcal{W} \nsubseteq \mathcal{H}$.

Dowód. Zauważmy, że $FS(\{10^n : n \in \omega\}) \in \mathcal{W}$ ([57, Przykład 6.19]) i $FS(\{10^n : n \in \omega\}) \notin \mathcal{H}$.

□

Stwierdzenie 2.58. $\mathcal{I}_{PS} \nsubseteq \mathcal{I}_d$.

Dowód. Pokażemy, że $\mathbb{SF} \in \mathcal{I}_{PS}$ i $\mathbb{SF} \notin \mathcal{I}_d$ (gdzie $\mathbb{SF}$ jest zbiorem liczb bezkwadratowych, to znaczy liczb, które nie są podzielne przez kwadrat liczb większych od 1).

Sprawdzimy, że $\mathbb{SF}$ nie jest zbiorem piecewise syndetic. Stosując chińskie twierdzenie o resztach (zobacz, np. [70, Twierdzenie na str. 31]) dla każdego $m \in \omega$ możemy znaleźć $x \in \omega$ taki, że $x \equiv -k \mod p_k^2$ dla wszystkich $k \in \{1, \dots, m\}$, gdzie p_k jest k-tą liczbą pierwszą. Wtedy $x + k$ jest podzielne przez p_k^2, więc nie jest w zbiorze $\mathbb{SF}$. Zatem przedział $\{x + 1, \dots, x + m\}$ jest rozłączny ze zbiorem $\mathbb{SF}$, więc $\mathbb{SF}$ nie jest zbiorem piecewise syndetic.

Fakt, że $\mathbb{SF} \notin \mathcal{I}_d$ możemy znaleźć w [62, Uwaga na str. 43].

□

Stwierdzenie 2.59. $\mathcal{F} \nsubseteq \mathcal{D}$.

Dowód. Niech

$$A = \left\{ 10^n \sum_{i=0}^{k} 10^i : k \in \omega, n \geqslant 2 \right\}.$$

Pokażemy, że $A \in \mathcal{F}$. Twierdzimy, że dla każdego zbioru $D \subseteq \omega$ takiego, że $|D| = 3$ otrzymujemy $FS(D) \nsubseteq A$. Przypuśćmy, że istnieje zbiór $D \subseteq \omega$ taki, że $|D| = 3$ i $FS(D) \subseteq A$. Weźmy różne elementy $a, b, c \in D$ takie, że

$$a = 10^n \sum_{i=0}^{k} 10^i,$$

$$b = 10^m \sum_{i=0}^{l} 10^i,$$

$$c = 10^u \sum_{i=0}^{r} 10^i,$$

gdzie $u \geqslant m \geqslant n \geqslant 2$ oraz $k, l, r \in \omega$. Wtedy

$$a + b = 10^n \sum_{i=0}^{k} 10^i + 10^m \sum_{i=0}^{l} 10^i = 10^n \left(\sum_{i=0}^{k} 10^i + \sum_{i=m-n}^{m-n+l} 10^i \right) \in A,$$

$$a + c = 10^n \sum_{i=0}^{k} 10^i + 10^u \sum_{i=0}^{r} 10^i = 10^n \left(\sum_{i=0}^{k} 10^i + \sum_{i=u-n}^{u-n+r} 10^i \right) \in A,$$

$$b + c = 10^m \sum_{i=0}^{l} 10^i + 10^u \sum_{i=0}^{r} 10^i = 10^m \left(\sum_{i=0}^{l} 10^i + \sum_{i=u-m}^{u-m+r} 10^i \right) \in A.$$

Zatem $m - n = k + 1$, $u - n = k + 1$ i $u - m = l + 1$. Zauważmy, że $u - n = (u - m) + (m - n) = l + 1 + k + 1 > k + 1$. Sprzeczność.

Zbiór $A \notin \mathcal{D}$, ponieważ $D(S) \subseteq A$, gdzie elementami zbioru $S \subseteq \omega$ są: $s_1 = 1$ i $s_n = 10^n + s_{n-1}$ dla $n \geqslant 2$.

□

Stwierdzenie 2.60. $\mathcal{L} \nsubseteq \mathcal{F}$.

Dowód. Przypuśćmy, że $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$. Wtedy z [21, Proposition 4.1] ideał $\mathcal{L}$ ma własność FinBW. Sprzeczność z [48, Lemma 3.2].

□

Stwierdzenie 2.61. $\mathcal{D}_{fin} \subseteq \mathcal{F}$.

Dowód. Niech $A \notin \mathcal{F}$, wtedy dla każdego $n \in \omega$ istnieją liczby $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ takie, że $FS(\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}) \subseteq A$. Niech $S_n = \{a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + a_2 + \ldots + a_n\}$. Wtedy $|S_n| = n$ oraz $D(S_n) \subseteq A$. Czyli $A \notin \mathcal{D}_{fin}$.

□

Stwierdzenie 2.62. $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{D}$.

Dowód. Pokażemy, że zbiory lacunary są zawarte w ideale $\mathcal{D}$, zatem $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{D}$. Niech $A = \{a_n : n \in \omega\}$, gdzie $\{a_n : n \in \omega\}$ jest rosnącym ponumerowaniem zbioru A. Załóżmy, że $A \notin \mathcal{D}$. Wtedy istnieje nieskończony zbiór $S \subseteq \omega$ taki, że $D(S) \subseteq A$. W zbiorze A znajdują się elementy $s_n - s_1$ i $s_n - s_2$ dla każdego $n \geqslant 3$. Wtedy $(s_n - s_1) - (s_n - s_2) = s_2 - s_1$ dla każdego $n \geqslant 3$. Zatem

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) \neq \infty,$$

czyli A nie jest zbiorem lacunary.

□

Stwierdzenie 2.63. $\mathcal{I}_u \subseteq \mathcal{I}_{PS}$.

Dowód. Niech $A \subseteq \omega$ będzie zbiorem piecewise syndetic. Wtedy istnieje stała $b > 0$ spełniająca definicję zbioru piecewise syndetic. Niech I_n będą przedziałami długości n, na których odległości pomiędzy kolejnymi elementami zbioru A są ograniczone z góry przez b. Zatem

$$\lim_{n\to\infty} \max_{k\in\omega} \frac{|A \cap \{k, k+1, \ldots, k+n\}|}{n+1} \geqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{|A \cap I_n|}{|I_n|} \geqslant \frac{1}{b+1} > 0.$$

Czyli $A \notin \mathcal{I}_u$.

□

Stwierdzenie 2.64. $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{I}_u$.

Dowód. Pokażemy, że zbiory lacunary są zawarte w ideale $\mathcal{I}_u$, zatem $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{I}_u$. Niech $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\} \in Lac$, gdzie elementy zbioru A występują w sposób rosnący. Wtedy otrzymujemy

$$\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{N\in\omega}{\exists}\ \underset{n>N}{\forall}\ a_{n+1} - a_n > \frac{1}{\epsilon}.$$

Ustalmy $\epsilon > 0$. Dla $\frac{\epsilon}{2} > 0$ istnieje $N \in \omega$ takie, że dla każdego $n > N$ otrzymujemy $a_{n+1} - a_n > \frac{2}{\epsilon}$. Niech $h_0 \in \omega$ będzie takie, że $\frac{N}{h_0+1} < \frac{\epsilon}{2}$. Wtedy dla dowolnego $h > h_0$ oraz przedziału I długości $h+1$ mamy:

$$\frac{|A \cap I|}{h+1} \leqslant \frac{(N + |I|\frac{\epsilon}{2})}{h+1} = \frac{N}{h+1} + \frac{\epsilon}{2} < \frac{N}{h_0+1} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Zatem $A \in \mathcal{I}_u$. □

Stwierdzenie 2.65. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}_{fin}$.

Dowód. Pokażemy, że każdy zbiór prawie cienki jest w ideale $\mathcal{D}_{fin}$. Niech A' będzie nieskończonym zbiorem prawie cienkim. Po wyrzuceniu z niego odpowiedniej ilości skończenie wielu elementów otrzymujemy zbiór $A = \{a_n : n \in \omega\}$, którego elementy są ponumerowane w sposób rosnący i dla którego istnieje $q \in (0, 1)$, że dla wszystkich $n \in \omega$ mamy:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leqslant q < 1.$$

Zauważmy, że zbiór A jest prawie cienki. Z tego otrzymujemy, że $a_{n+1} \geqslant \frac{1}{q} a_n$ dla każdego $n \in \omega$. Przypuśćmy, że $A \notin \mathcal{D}_{fin}$. Zatem dla każdego $n \in \omega$ istnieje zbiór S_n taki, że $|S_n| = n$, $D(S_n) \subseteq A$ i $\max S_n < \min S_{n+1}$ (możemy tak założyć skoro $D(S) = D(S + k)$ dla dowolnych $S \in \mathrm{Fin}$ i $k \in \omega$). Niech

$$S = \bigcup_{n \in \omega} S_n,$$

gdzie $S_0 = \emptyset$,

$$S_n = \left\{ s_{\frac{n(n+1)}{2} - (n-1)}, \ldots, s_{\frac{n(n+1)}{2} - 1}, s_{\frac{n(n+1)}{2}} \right\}$$

dla każdego $n \geqslant 1$ i elementy w każdym zbiorze S_n są ponumerowane w sposób rosnący. Skoro $D(S_n) \subseteq A$ dla każdego $n \in \omega$, więc istnieją $t_n < \ldots < l_n < k_n$ takie, że:

$$a_{k_n} = s_{\frac{n(n+1)}{2}} - s_{\frac{n(n+1)}{2} - (n-1)},$$

$$a_{l_n} = s_{\frac{n(n+1)}{2} - 1} - s_{\frac{n(n+1)}{2} - (n-1)},$$

$$\ldots,$$

$$a_{t_n} = s_{\frac{n(n+1)}{2} - (n-2)} - s_{\frac{n(n+1)}{2} - (n-1)}.$$

Otrzymujemy, że $a_{k_n} - a_{t_n} \leqslant a_{k_n - 1}$, bo $a_{k_n} - a_{t_n} = s_{\frac{n(n+1)}{2}} - s_{\frac{n(n+1)}{2} - (n-2)} \in D(S_n) \subseteq A$. Niech $r = \frac{1}{q} > 1$. Wtedy $a_{n+1} \geqslant r \cdot a_n$ dla każdego $n \in \omega$ i

$$a_{t_n} \geqslant (r - 1) a_{k_n - 1} \geqslant (r - 1) r^{k_n - 1 - t_n} a_{t_n}.$$

Dzieląc obustronnie przez a_{t_n} i przechodząc z n (a tym samym z k_n) do nieskończoności (zauważmy, że wtedy $k_n - t_n$ też dąży do nieskończoności), otrzymujemy:

$$1 \geqslant \lim_{n \to \infty} (r - 1) r^{k_n - 1 - t_n} = \infty.$$

Sprzeczność. Zatem $A \in \mathcal{D}_{fin}$, więc $A' \in \mathcal{D}_{fin}$.

□

3. $\mathcal{I}$-ULTRAFILTRY

W serii prac [28, 32, 25, 31] Flašková skonstruowała $\mathcal{I}$-ultrafiltry, które nie są $\mathcal{J}$-ultrafiltrami dla różnych par ideałów $\mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$ przy różnych założeniach teoriomnogościowych. Po głębszej analizie znaleźliśmy wspólną ideę w Jej dowodach. Zdefiniowaliśmy nowe współczynniki kardynalne i pokazaliśmy jak ich użyć do udowodnienia istnienia $\mathcal{I}$-ultrafiltrów, które nie są $\mathcal{J}$-ultrafiltrami. W pierwszych podrozdziałach wprowadzimy narzędzia, które wykorzystamy przy przedstawieniu najciekawszych wyników znajdujących się w dalszej części pracy.

Wyniki zaprezentowane w tym rozdziale w większości pochodzą z artykułu [18] napisanego wspólnie z Filipowem i Kwelą oraz z mojego samodzielnego artykułu [53].

3.1. Wstęp

Definicja 3.1. *Filtr* na nieskończonym zbiorze X jest rodziną $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$, która spełnia następujące warunki:

1. $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$,
2. $(A \subseteq B \wedge A \in \mathcal{F}) \Longrightarrow B \in \mathcal{F}$,
3. $\mathcal{F}$ zawiera wszystkie koskończone podzbiory X,
4. $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Ideałem dualnym do filtru $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ nazywamy rodzinę $\mathcal{F}^* = \{A \subseteq X : X \setminus A \in \mathcal{F}\}$. Maksymalny filtr (w sensie inkluzji) nazywamy *ultrafiltrem*. Równoważnie, filtr $\mathcal{U}$ jest maksymalny, jeżeli dla każdego zbioru $M \subseteq X$ albo $M \in \mathcal{U}$, albo $X \setminus M \in \mathcal{U}$ [45, Lemma 7.4].

Definicja 3.2. Niech X będzie nieskończonym zbiorem, a $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ niepustą rodziną. Powiemy, że $\mathcal{B}$ jest *bazą filtra*, gdy:

1. $\emptyset \notin \mathcal{B}$,
2. $\mathcal{B}$ zawiera wszystkie koskończone podzbiory X,
3. $$\underset{F_1, F_2 \in \mathcal{B}}{\forall} \; \underset{F \in \mathcal{B}}{\exists} \; F \subseteq F_1 \cap F_2.$$

Filtrem Frécheta nazywać będziemy rodzinę wszystkich koskończonych podzbiorów ustalonego zbioru.

W dalszej części tego rozdziału będziemy wykorzystywać następujące dwa współczynniki kardynalne $\mathrm{add}^*(\mathcal{I})$ i $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$.

Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem, wtedy

$$\mathrm{add}^*(\mathcal{I}) = \min\left(\left\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \wedge (\underset{B \in \mathcal{I}}{\forall} \; \underset{A \in \mathcal{A}}{\exists} |A \setminus B| = \omega)\right\} \cup \{\mathfrak{c}^+\}\right).$$

Zauważmy, że $\mathrm{add}^*(\mathcal{I}) = \omega$ dla ideałów, które nie są P-ideałami i $\mathrm{add}^*(\mathcal{I}) \geqslant \omega_1$ dla P-ideałów. Definiujemy

$$\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \min\left\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M} \wedge \bigcup \mathcal{A} = \mathbb{R}\right\},$$

gdzie $\mathcal{M}$ jest rodziną wszystkich zbiorów pierwszej kategorii na $\mathbb{R}$.

Dalej będziemy rozważać dodatkowe ideały, które przedstawiamy poniżej. Niech $A_{(n)} = \{k \in \omega : (n,k) \in A\}$ oznacza przekrój pionowy zbioru $A \subseteq \omega \times \omega$ w punkcie $n \in \omega$. Wtedy:

- $$\mathrm{Fin}^2 = \left\{ A \subseteq \omega \times \omega : \underset{k \in \omega}{\exists} \underset{n \geqslant k}{\forall} |A_{(n)}| < \omega \right\}.$$
- $$\mathcal{ED} = \left\{ A \subseteq \omega \times \omega : \underset{m \in \omega}{\exists} \underset{k \in \omega}{\exists} \underset{n \geqslant k}{\forall} |A_{(n)}| < m \right\}.$$
- $$\mathcal{ED}_{\mathrm{Fin}} = \left\{ A \subseteq \Delta : \underset{m \in \omega}{\exists} \underset{n \in \omega}{\forall} |A_{(n)}| < m \right\},$$
  gdzie $\Delta = \{(n,k) \in \omega^2 : n \geqslant k\}$. Przypomnijmy, że $\mathcal{ED}_{\mathrm{Fin}} = \mathcal{ED}_{\restriction \Delta}$ ([43, str. 834]).
- $\mathrm{conv} = \{A \subseteq \mathbb{Q} \cap [0,1] : A$ ma co najwyżej skończenie wiele punktów skupienia na $[0,1]\}$.

Myślimy o wszystkich powyższych ideałach jak o ideałach na zbiorze ω poprzez utożsamienie dziedzin ideałów (np. $\omega \times \omega$ lub $\mathbb{Q} \cap [0,1]$) z ω przez ustaloną bijekcję.

3.2. *Porządek Katětova*

Przez Y^X oznaczamy rodzinę wszystkich funkcji z X w Y. Funkcja $f \in Y^X$ jest *Fin-1*, jeżeli przeciwobraz $f^{-1}[\{y\}]$ jest skończony dla każdego $y \in Y$.

Niech $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ będą ideałami na X i Y odpowiednio. Dla $\mathcal{F} \subseteq Y^X$ napiszemy $\mathcal{J} \leqslant_{\mathcal{F}} \mathcal{I}$, jeżeli istnieje funkcja $f \in \mathcal{F}$ taka, że $f^{-1}[B] \in \mathcal{I}$ dla każdego $B \in \mathcal{J}$. W szczególności:

1. $\mathcal{J} \leqslant_K \mathcal{I}$, gdy $\mathcal{J} \leqslant_{\mathcal{F}} \mathcal{I}$ dla $\mathcal{F} = Y^X$ (*porządek Katětova*),
2. $\mathcal{J} \leqslant_{KB} \mathcal{I}$, gdy $\mathcal{J} \leqslant_{\mathcal{F}} \mathcal{I}$ dla $\mathcal{F}$ będącej rodziną wszystkich *Fin-1* funkcji z X do Y (*porządek Katětova-Blassa*),
3. $\mathcal{J} \leqslant_P \mathcal{I}$, gdy $\mathcal{J} \leqslant_{\mathcal{F}} \mathcal{I}$ dla $\mathcal{F}$ będącej rodziną wszystkich różnowartościowych funkcji z X do Y,
4. $\mathcal{J} \sqsubseteq \mathcal{I}$, gdy $\mathcal{J} \leqslant_{\mathcal{F}} \mathcal{I}$ dla $\mathcal{F}$ będącej rodziną wszystkich bijekcji z X do Y (w tym przypadku powiemy, że $\mathcal{I}$ zawiera izomorficzną kopię $\mathcal{J}$).

W dalszej części pracy będziemy szczególnie zainteresowani trzema rodzajami funkcji:

- ω^ω - rodzina wszystkich funkcji $f : \omega \to \omega$,
- $\mathrm{Fin} - 1$ - rodzina wszystkich *Fin-1* funkcji $f : \omega \to \omega$,
- $1 - 1$ - rodzina wszystkich różnowartościowych funkcji $f : \omega \to \omega$.

Co więcej, skoro możemy myśleć o ideałach na przeliczalnych zbiorach jak o ideałach na ω, czasami napiszemy $\mathcal{I} \leqslant_{\omega^\omega} \mathcal{J}$, $\mathcal{I} \leqslant_{\mathrm{Fin}-1} \mathcal{J}$ lub $\mathcal{I} \leqslant_{1-1} \mathcal{J}$ wtedy, gdy $\mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$ są zdefiniowane na innych przeliczalnych zbiorach.

Stwierdzenie 3.3.

1. $\mathcal{ED}_{\mathrm{Fin}} \not\leqslant_K \mathrm{Fin}^2$.
2. $\mathrm{Fin}^2 \not\leqslant_K \mathcal{I}$ dla każdego P-ideału $\mathcal{I}$.
3. $\mathrm{Fin}^2 \not\leqslant_K \mathcal{I}$ dla każdego P$^+$-ideału $\mathcal{I}$.
4. $\mathcal{ED} \not\leqslant_K \mathcal{I}$ dla każdego selektywnego ideału $\mathcal{I}$.
5. $\mathcal{I} \not\leqslant_K \mathrm{Fin}^2$ dla każdego gęstego P-ideału $\mathcal{I}$.

6. $\mathcal{I} \not\leqslant_K \mathcal{ED}_{\mathrm{Fin}}$ dla każdego gęstego P-ideału $\mathcal{I}$.

Dowód. 1. Zobacz [43, str. 837].

2. Zobacz [11, Observation 2.3].

3. Teza wynika z [12, Corollary 6.7] wykorzystując fakt, że $\mathrm{conv} \leqslant_K \mathrm{Fin}^2$ ([43, str. 836]).

4. Weźmy dowolną funkcję $f : \omega \to \omega \times \omega$ i zdefiniujmy $A_n = f^{-1}[(\omega \setminus \{0, 1, \ldots, n-1\}) \times \omega]$ dla każdego $n \in \omega$. Jeżeli $A_n \in \mathcal{I}$ dla jakiegoś $n \in \omega$, wtedy $f^{-1}[\{0, 1, \ldots, n-1\} \times \omega] \notin \mathcal{I}$ i dowód jest zakończony. Załóżmy, że $A_n \notin \mathcal{I}$ dla każdego $n \in \omega$. Skoro $\mathcal{I}$ jest selektywny, to istnieje $A \notin \mathcal{I}$ taki, że $|A \cap (A_n \setminus A_{n+1})| \leqslant 1$ dla każdego $n \in \omega$. Wtedy $B = f[A] \in \mathcal{ED}$ i $f^{-1}[B] \notin \mathcal{I}$, co kończy dowód.

5. Przypuśćmy, że $\mathcal{I} \leqslant_K \mathrm{Fin}^2$ dla jakiegoś gęstego P-ideału. Niech $f : \omega \times \omega \to \omega$ będzie taka, że $f^{-1}[B] \in \mathrm{Fin}^2$ dla każdego $B \in \mathcal{I}$. Mamy dwa przypadki:

- Zbiór $f[\{n\} \times \omega]$ jest skończony dla nieskończenie wielu $n \in \omega$. Niech $C = \{n \in \omega : f[\{n\} \times \omega]$ jest skończony$\}$. Wtedy dla każdego $n \in C$ istnieje $k_n \in f[\{n\} \times \omega]$ taki, że $(f^{-1}[\{k_n\}])_{(n)}$ jest nieskończony. Niech $A = \{k_0, k_1, \ldots\}$. Skoro $f^{-1}[A] \notin \mathrm{Fin}^2$, to otrzymujemy $A \notin \mathcal{I}$ (bo $\mathcal{I} \leqslant_K \mathrm{Fin}^2$). W szczególności A jest nieskończony. Dlatego, że $\mathcal{I}$ jest gęsty, to istnieje nieskończony zbiór $B \in \mathcal{I}$ taki, że $B \subseteq A$. Wtedy $f^{-1}[B] \notin \mathrm{Fin}^2$, zatem mamy sprzeczność.

- Zbiór $f[\{n\} \times \omega]$ jest nieskończony dla wszystkich $n \in \omega$ poza skończoną ilością. Niech $C = \{n \in \omega : f[\{n\} \times \omega]$ jest nieskończony$\}$. Skoro $\mathcal{I}$ jest gęsty, to dla każdego $n \in C$ istnieje nieskończony zbiór $B_n \in \mathcal{I}$ taki, że $B_n \subseteq f[\{n\} \times \omega]$. Zauważmy, że zbiór $(f^{-1}[B_n])_{(n)}$ jest nieskończony dla każdego $n \in C$.

  Z założenia, że $\mathcal{I}$ jest P-ideałem, istnieje $B \in \mathcal{I}$ taki, że $B_n \setminus B$ jest skończony dla każdego $n \in \omega$.

  Skoro $f^{-1}[B] \in \mathrm{Fin}^2$, to zbiór $(f^{-1}[B])_{(n)}$ jest skończony dla wszystkich $n \in \omega$ poza skończoną ilością (powiedzmy dla wszystkich $n \in D$).

  Zbiór $(f^{-1}[B_n \setminus B])_{(n)} = (f^{-1}[B_n])_{(n)} \setminus (f^{-1}[B])_{(n)}$ jest nieskończony dla wszystkich $n \in C \cap D$.

  Dlatego, że $B_n \setminus B$ jest skończony (i niepusty, co wynika z linijki wyżej) dla każdego $n \in C \cap D$, to istnieje $c_n \in B_n \setminus B$ taki, że $(f^{-1}[\{c_n\}])_{(n)}$ jest nieskończony.

  Niech $A = \{c_n : n \in C \cap D\}$. Zauważmy, że $C \cap D$ jest nieskończony. Zatem $f^{-1}[A] \notin \mathrm{Fin}^2$ i w konsekwencji $A \notin \mathcal{I}$ (bo $\mathcal{I} \leqslant_K \mathrm{Fin}^2$). W szczególności A jest nieskończony. Skoro $\mathcal{I}$ jest gęsty, to istnieje nieskończony zbiór $A' \in \mathcal{I}$ taki, że $A' \subseteq A$. Wtedy $f^{-1}[A'] \notin \mathrm{Fin}^2$. Zatem otrzymujemy sprzeczność.

6. Ustalmy $f : \Delta \to \omega$, gdzie $\Delta = \{(i,j) \in \omega^2 : j \leqslant i\}$ (to znaczy, $\mathcal{ED}_{\mathrm{Fin}} = \mathcal{ED}_{\restriction \Delta}$). Przypuśćmy, dążąc do sprzeczności, że funkcja f świadczy o tym, że $\mathcal{I} \leqslant_K \mathcal{ED}_{\mathrm{Fin}}$.

Zauważmy, że dla każdego $n \in \omega$ i nieskończonego zbioru $A \subseteq \omega$ możemy znaleźć $k > n$ taki, że $f[(A \times \{k\}) \cap \Delta]$ jest nieskończony. W przeciwnym wypadku moglibyśmy wybrać indukcyjnie zbiory $D_i \in [\omega]^\omega$ i punkty $x_i \in \omega$, dla $i > n$, takie że:

- $D_{i+1} \subseteq D_i$;
- $D_i \times \{i\} \subseteq \Delta$;
- $f[D_i \times \{i\}] = \{x_i\}$ dla jakiegoś $x_i \in \omega$.

Wtedy albo $\{x_i :\ i > n\} \in \mathrm{Fin} \subseteq \mathcal{I}$ i

$$f^{-1}[\{x_i :\ i > n\}] \supseteq \bigcup_{i>n} D_i \times \{i\} \notin \mathcal{ED}_{\mathrm{Fin}}$$

albo używając gęstości $\mathcal{I}$ możemy znaleźć nieskończony zbiór $C \subseteq \{x_i :\ i > n\}$, $C \in \mathcal{I}$ taki, że

$$f^{-1}[C] \supseteq \bigcup \{D_i \times \{i\} :\ x_i \in C\} \notin \mathcal{ED}_{\mathrm{Fin}}.$$

Sprzeczność z założeniem, że $\mathcal{I} \leqslant_K \mathcal{ED}_{\mathrm{Fin}}$.

Indukcyjnie definiujemy ciągi $\{k_n : n \in \omega\} \subseteq \omega$ i $\{E_n : n \in \omega\} \subseteq [\omega]^\omega$ tak, że dla każdego $n \in \omega$:

- $E_{n+1} \subseteq E_n$;
- $k_{n+1} > k_n$;
- $E_n \times \{k_n\} \subseteq \Delta$;
- $f_{\restriction E_n \times \{k_n\}}$ jest różnowartościowa;
- $f[E_n \times \{k_n\}] \in \mathcal{I}$.

Zaczynamy od wyboru $k_0 \in \omega$ takiego, że $f[(\omega \times \{k_0\}) \cap \Delta]$ jest nieskończony (taki k_0 istnieje poprzez drugi akapit) i jakiegoś nieskończonego zbioru $E_0' \subseteq \omega$ takiego, że $E_0' \times \{k_0\} \subseteq \Delta$ i $f_{\restriction E_0' \times \{k_0\}}$ jest różnowartościowa. Skoro $\mathcal{I}$ jest gęsty, to istnieje $E_0 \subseteq E_0'$ taki, że $f[E_0 \times \{k_0\}] \in \mathcal{I}$. W kroku $n+1$ znajdziemy $k_{n+1} > k_n$ taki, że $f[(E_n \times \{k_{n+1}\}) \cap \Delta]$ jest nieskończony (taki k_{n+1} istnieje przez obserwację z drugiego akapitu dowodu) i wybieramy nieskończony $E_{n+1}' \subseteq E_n$ taki, że $E_{n+1}' \times \{k_{n+1}\} \subseteq \Delta$ i $f_{\restriction E_{n+1}' \times \{k_{n+1}\}}$ jest różnowartościowa. Ponownie używając gęstości $\mathcal{I}$ znajdziemy $E_{n+1} \subseteq E_{n+1}'$ taki, że $f[E_{n+1} \times \{k_{n+1}\}] \in \mathcal{I}$.

Indukcja została zakończona. Skoro $\mathcal{I}$ jest P-ideałem, to istnieje $B \in \mathcal{I}$ taki, że $f[E_n \times \{k_n\}] \setminus B$ jest skończony dla wszystkich $n \in \omega$. Wtedy $F_n = E_n \setminus \{i \in E_n :\ f(i, k_n) \in B\} \in \mathrm{Fin}$, bo $f_{\restriction E_n \times \{k_n\}}$ jest różnowartościowa. Zatem

$$f^{-1}[B] \supseteq \bigcup_{n\in\omega} ((E_n \setminus F_n) \times \{k_n\}) = \bigcup_{n\in\omega} (\{i \in E_n :\ f(i,k_n) \in B\} \times \{k_n\}) \notin \mathcal{ED}_{\mathrm{Fin}},$$

bo dla każdego $m \in \omega$ mamy

$$\left| (\{l\} \times \omega) \cap \bigcup_{n\in\omega} (\{i \in E_n :\ f(i,k_n) \in B\} \times \{k_n\}) \right| \geqslant m,$$

gdzie

$$l = \min \left(E_m \setminus \bigcup_{j \leqslant m} F_j \right).$$

□

3.3. *Ultrafiltry i $\mathcal{I}$-ultrafiltry*

Ultrafiltr $\mathcal{U}$ na ω jest:

1. *P-punktem*, jeżeli $\mathcal{U}^*$ jest P-ideałem (równoważnie, jeżeli $\mathcal{U}^*$ jest P$^+$-ideałem),
2. *selektywnym ultrafiltrem* (*ultrafiltrem Ramsey'a*), jeżeli $\mathcal{U}^*$ jest selektywnym ideałem,
3. *Q-punktem*, jeżeli dla każdej partycji $\{A_n : n \in \omega\}$ zbioru ω na skończone zbiory, istnieje $A \in \mathcal{U}$ taki, że $|A_n \cap A| = 1$ dla każdego $n \in \omega$.

Ultrafiltr jest selektywny wtedy i tylko wtedy, gdy jest P-punktem i Q-punktem (np. [9, 9.24 Remark]).

Baumgartner, Brendle i Flašková w pracach [6, 11] dla ideału $\mathcal{I}$ na ω napisali, że ultrafiltr $\mathcal{U}$ na ω jest

1. *$\mathcal{I}$-ultrafiltrem*, jeżeli $\mathcal{I} \not\leqslant_K \mathcal{U}^*$, to znaczy: nie istnieje funkcja $f : \omega \to \omega$ taka, że $f^{-1}[B] \in \mathcal{U}^*$ dla każdego $B \in \mathcal{I}$ (lub równoważnie: dla każdej funkcji $f : \omega \to \omega$ istnieje $C \in \mathcal{U}$ taki, że $f_\alpha[C] \in \mathcal{I}$),
2. *słabym $\mathcal{I}$-ultrafiltrem*, jeżeli $\mathcal{I} \not\leqslant_{KB} \mathcal{U}^*$, to znaczy: nie istnieje $\mathrm{Fin}-1$ funkcja $f : \omega \to \omega$ taka, że $f^{-1}[B] \in \mathcal{U}^*$ dla każdego $B \in \mathcal{I}$ (lub równoważnie: dla każdej $\mathrm{Fin}-1$ funkcji $f : \omega \to \omega$ istnieje $C \in \mathcal{U}$ taki, że $f_\alpha[C] \in \mathcal{I}$),
3. *$\mathcal{I}$-punktem*, jeżeli $\mathcal{I} \not\leqslant_P \mathcal{U}^*$, to znaczy: nie istnieje różnowartościowa funkcja $f : \omega \to \omega$ taka, że $f^{-1}[B] \in \mathcal{U}^*$ dla każdego $B \in \mathcal{I}$ (lub równoważnie: dla każdej różnowartościowej funkcji $f : \omega \to \omega$ istnieje $C \in \mathcal{U}$ taki, że $f_\alpha[C] \in \mathcal{I}$).

   Jeżeli $\mathcal{I}$ jest gęsty, wtedy używając [4, Lemma 3.3], zauważmy, że w definicji $\mathcal{I}$-punktu możemy rozważać jedynie bijekcje zamiast różnowartościowych funkcji, to znaczy: $\mathcal{I} \not\leqslant_P \mathcal{U}^* \iff \mathcal{I} \not\sqsubseteq \mathcal{U}^*$.

Jeżeli istnieje $\mathcal{I}$-ultrafiltr, który nie jest $\mathcal{J}$-ultrafiltrem, wtedy koniecznie $\mathcal{I} \not\leqslant_K \mathcal{J}$ (gdyby $\mathcal{I} \leqslant_K \mathcal{J}$ oraz $\mathcal{U}$ nie był $\mathcal{J}$-ultrafiltrem, to $\mathcal{I} \leqslant_K \mathcal{J} \leqslant_K \mathcal{U}^*$, więc $\mathcal{U}$ nie mógłby być też $\mathcal{I}$-ultrafiltrem). Podobnie, gdy istnieje $\mathcal{I}$-ultrafiltr (słaby $\mathcal{I}$-ultrafiltr lub $\mathcal{I}$-punkt), który nie jest $\mathcal{J}$-punktem, wtedy $\mathcal{I} \not\leqslant_K \mathcal{J}$ ($\mathcal{I} \not\leqslant_{KB} \mathcal{J}$ lub $\mathcal{I} \not\leqslant_P \mathcal{J}$).

Twierdzenie 3.4 (zobacz, np. [11, Observation 2.1] i [26, Theorem 3.4])**.** W poniższych punktach następujące warunki są równoważne:

1. a) $\mathcal{U}$ jest P-punktem,

   b) $\mathcal{U}$ jest Fin^2-ultrafiltrem,

   c) $\mathcal{U}$ jest słabym Fin^2-ultrafiltrem,

   d) $\mathcal{U}$ jest Fin^2-punktem,

   e) $\mathcal{U}$ jest conv-ultrafiltrem,

   f) $\mathcal{U}$ jest słabym conv-ultrafiltrem,

   g) $\mathcal{U}$ jest conv-punktem.
2. a) $\mathcal{U}$ jest Q-punktem,

   b) $\mathcal{U}$ jest słabym $\mathcal{ED}_{\mathrm{Fin}}$-ultrafiltrem,

   c) $\mathcal{U}$ jest $\mathcal{ED}_{\mathrm{Fin}}$-punktem,

   d) $\mathcal{U}$ jest słabym $\mathcal{T}$-ultrafiltrem,

   e) $\mathcal{U}$ jest $\mathcal{T}$-punktem,

   f) $\mathcal{U}$ jest słabym $\mathcal{A}$-ultrafiltrem,

   g) $\mathcal{U}$ jest $\mathcal{A}$-punktem.
3. a) $\mathcal{U}$ jest selektywnym ultrafiltrem,

b) $\mathcal{U}$ jest $\mathcal{ED}$-ultrafiltrem,

c) $\mathcal{U}$ jest słabym $\mathcal{ED}$-ultrafiltrem,

d) $\mathcal{U}$ jest $\mathcal{ED}$-punktem.

3.4. Ideały jednorodne i P$^+(\mathcal{I})$-ideały

Ideał $\mathcal{I}$ jest nazywany ideałem $\leqslant_{\mathcal{F}}$*-jednorodnym*, jeżeli $\mathcal{I}_{\restriction A} \cong_{\mathcal{F}} \mathcal{I}$ (to znaczy $\mathcal{I}_{\restriction A} \leqslant_{\mathcal{F}} \mathcal{I}$ i $\mathcal{I} \leqslant_{\mathcal{F}} \mathcal{I}_{\restriction A}$) dla każdego $A \in \mathcal{I}^+$. Ideały $\leqslant_K$-jednorodne były badane w [42, 60], gdzie autorzy nazywają te ideały K*-jednostajnymi*.

Jednorodność implikuje $\leqslant_P$-jednorodność, co implikuje $\leqslant_{KB}$-jednorodność, co z kolei implikuje $\leqslant_K$-jednorodność. Co więcej, jeżeli dla każdego zbioru nieskończonego A rodzina $\mathcal{F}$ zawiera identyczność na A, wtedy $\mathcal{I}$ jest $\leqslant_{\mathcal{F}}$-jednorodny wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{I}_{\restriction A} \leqslant_{\mathcal{F}} \mathcal{I}$ dla każdego $A \in \mathcal{I}^+$.

Stwierdzenie 3.5. Ideały $\mathcal{ED}_{\mathrm{Fin}}$, Fin^2 i $\mathcal{W}$ są jednorodne.

Dowód. Zobacz [54, Example 2.4, Remark na str. 145, Example 2.6].

□

Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem na X. Napiszemy $B \subseteq^{\mathcal{I}} A$, kiedy $B \setminus A \in \mathcal{I}$ (jeżeli $\mathcal{I} = \mathrm{Fin}$, wtedy zapiszemy $B \subseteq^* A$ zamiast $B \subseteq^{\mathrm{Fin}} A$). Zbiór $B \in \mathcal{I}^+$ jest $\mathcal{I}^+$*-pseudoprzekrojem* rodziny $\mathcal{A}$, jeżeli $B \subseteq^{\mathcal{I}} A$ dla każdego $A \in \mathcal{A}$ (gdy $\mathcal{I} = \mathrm{Fin}$, wtedy będziemy mówić o *pseudoprzekroju*). Ideał $\mathcal{I}$ jest *P*$^+(\mathcal{I})$*-ideałem*, gdy dla każdego malejącego ciągu zbiorów $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{I}^+$, istnieje $\mathcal{I}^+$-pseudoprzekrój rodziny $\{A_n : n \in \omega\}$. Jeżeli $\mathcal{I}$ jest P$^+$-ideałem, wtedy jest także P$^+(\mathcal{I})$-ideałem.

Stwierdzenie 3.6.

1. Każdy F_σ ideał jest P$^+$-ideałem.
2. Fin^2 jest P$^+\left(\mathrm{Fin}^2\right)$-ideałem, ale nie jest P$^+$-ideałem.

Dowód. 1. Zobacz [60, Lemma 3.2.4].

2. Fin^2 nie jest P$^+$-ideałem, ponieważ ciąg zbiorów $A_n = (\omega \setminus \{0, 1, \ldots, n\}) \times \omega$ nie ma Fin^+-pseudoprzekroju. Pokażemy, że Fin^2 jest P$^+\left(\mathrm{Fin}^2\right)$-ideałem.

Niech $A_n \in \left(\mathrm{Fin}^2\right)^+$ dla każdego $n \in \omega$ będzie malejącym ciągiem. Wybieramy $k_0 < k_1 < \ldots$ takie, że $B_n = (A_n)_{(k_n)} = \{t \in \omega : (k_n, t) \in A_n\}$ jest nieskończony dla każdego $n \in \omega$. Wtedy otrzymujemy

$$B = \bigcup_{n \in \omega} \{k_n\} \times B_n \in \left(\mathrm{Fin}^2\right)^+$$

i $B \setminus A_n \in \mathrm{Fin}^2$ dla każdego $n \in \omega$.

□

Niepusta rodzina $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ ma $\mathcal{I}^+$*-FIP*, jeżeli $\bigcap F \in \mathcal{I}^+$ dla każdego skończonego $F \subseteq \mathcal{A}$ (jeżeli $\mathcal{I} = \mathrm{Fin}$, wtedy powiemy o *SFIP-ie* zamiast o Fin^+-FIP-ie). *Liczba pseudoprzekroju* jest zdefiniowana następująco:

$$\mathfrak{p} = \min\{|\mathcal{A}| : \ \mathcal{A} \text{ ma SFIP, ale } \mathcal{A} \text{ nie ma pseudoprzekroju}\}.$$

Dla ideału $\mathcal{I}$ na ω *liczba pseudoprzekroju* jest zdefiniowana w następujący sposób:

$$\mathfrak{p}(\mathcal{I}) = \min(\{|\mathcal{A}| : \ \mathcal{A} \text{ ma } \mathcal{I}^+\text{-FIP, ale } \mathcal{A} \text{ nie ma } \mathcal{I}^+\text{-pseudoprzekroju}\} \cup \{\mathfrak{c}^+\}).$$

Poniższe stwierdzenie podsumowuje kilka podstawowych własności $\mathfrak{p}(\mathcal{I})$.

Stwierdzenie 3.7.

1. $\mathfrak{p}(\mathrm{Fin}) = \mathfrak{p}$.
2. $\mathfrak{p}(\mathcal{I}) = \mathfrak{c}^+$ dla każdego maksymalnego ideału $\mathcal{I}$.
3. $\mathfrak{p}(\mathcal{I}) \geqslant \omega_1 \iff \mathcal{I}$ jest $\mathsf{P}^+(\mathcal{I})$-ideałem.

Dowód. 1. Teza wynika z definicji liczb $\mathfrak{p}$ i $\mathfrak{p}(\mathcal{I})$ dla $\mathcal{I} = \mathrm{Fin}$.

2. Przypuśćmy, że istnieje ideał maksymalny $\mathcal{I}$ taki, że $\mathfrak{p}(\mathcal{I}) \leqslant \mathfrak{c}$. Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną mającą $\mathcal{I}^+$-FIP, ale nie mającą $\mathcal{I}^+$-pseudoprzekroju. Wtedy dla każdego $B \in \mathcal{I}^+$ istnieje $A \in \mathcal{A}$ taki, że $B \setminus A \notin \mathcal{I}$. Z maksymalności ideału $\mathcal{I}$ wiemy, że $\mathcal{I}^+ = \mathcal{I}^*$, zatem $\omega \setminus (B \setminus A) = (\omega \setminus B) \cup (\omega \cap A) = (\omega \setminus B) \cup A \in \mathcal{I}$. Sprzeczność, bo $\mathcal{A}$ jest rodziną mającą $\mathcal{I}^+$-FIP, więc $A \notin \mathcal{I}$.

3. ($\Longrightarrow$) Załóżmy, że $\mathcal{I}$ nie jest $\mathsf{P}^+(\mathcal{I})$-ideałem. Wtedy istnieje przeliczalna rodzina $\mathcal{A}$ zbiorów należących do $\mathcal{I}^+$ mająca $\mathcal{I}^+$-FIP, ale nie mająca $\mathcal{I}^+$-pseudoprzekroju. Czyli uzyskujemy $\mathfrak{p}(\mathcal{I}) \leqslant \omega$.

($\Longleftarrow$) Niech $\mathcal{I}$ będzie $\mathsf{P}^+(\mathcal{I})$-ideałem. Wtedy przeliczalna rodzina $\mathcal{A}$ składająca się z malejącego ciągu zbiorów z definicji $\mathsf{P}^+(\mathcal{I})$-ideału ma $\mathcal{I}^+$-pseudoprzekrój. Zatem $\mathfrak{p}(\mathcal{I}) \geqslant \omega_1$.

□

Twierdzenie 3.8 (wynika z [66] lub [42, Proposition 8.19] lub [10, str. 897])**.** $\mathfrak{p}(\mathrm{Fin}^2) = \omega_1$.

W dalszej części pracy będziemy wykorzystywać twierdzenie Bella pisząc zamiennie $MA_{\sigma-scentrowany}$ i $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$.

Twierdzenie 3.9 ([8], zobacz także [9, Theorem 7.12] lub [5, Theorem 1.4.22])**.** $MA_{\sigma-scentrowany}$ jest równoważny $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$.

Twierdzenie 3.10. $\mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{p}(\mathcal{I})$ dla każdego F_σ ideału $\mathcal{I}$.

Dowód. Niech φ będzie dolnie półciągłą podmiarą taką, że $\mathcal{I} = \mathrm{Fin}(\varphi)$ (Twierdzenie 1.3). Ustalmy $\kappa < \mathfrak{p}$ i $\mathcal{A} \in [\mathcal{I}^+]^\kappa$ mającą $\mathcal{I}^+$-FIP. Korzystając z Twierdzenia 3.9 znajdziemy zbiór $B \in \mathcal{I}^+$ taki, że $B \setminus A \in \mathcal{I}$ dla każdego $A \in \mathcal{A}$.

Definiujemy zbiór częściowo uporządkowany $(\mathbb{P}, \leqslant)$ następująco: $\mathbb{P} = [\omega]^{<\omega} \times [\mathcal{A}]^{<\omega}$ i

$$(s, F) \leqslant (t, G) \iff s \supseteq t \wedge F \supseteq G \wedge s \setminus t \subseteq \bigcap G.$$

Pokażemy, że jest to częściowy porządek. Sprawdzamy przechodniość (można zauważyć, że zwrotność i antysymetryczność zachodzą). Niech $(s, F), (t, G), (u, H) \in \mathbb{P}$ będą takie, że $(s, F) \leqslant (t, G)$ i $(t, G) \leqslant (u, H)$. Chcemy, by $(s, F) \leqslant (u, H)$. Zauważmy, że: $s \supseteq t \supseteq u$, $F \supseteq G \supseteq H$ i $s \setminus u = (s \setminus t) \cup (t \setminus u) \subseteq \bigcap G \cup \bigcap H \subseteq \bigcap H$.

Pokażemy, że $\mathbb{P}$ jest σ-scentrowany. Niech $s \in [\omega]^{<\omega}$. Jeżeli $F_0, \ldots, F_k \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$, wtedy dla każdego $i \leqslant k$ mamy:

$$(s, \bigcup_{i=0}^{k} F_i) \leqslant (s, F_i).$$

Zatem zbiór $\mathbb{P}_s = \{(s,F) \in [\omega]^{<\omega} \times [\mathcal{A}]^{<\omega} : F \in [\mathcal{A}]^{<\omega}\}$ jest scentrowany. Z tego

$$\mathbb{P} = \bigcup_{s \in [\omega]^{<\omega}} \mathbb{P}_s$$

jest σ-scentrowany.

Definiujemy podzbiory zbioru $\mathbb{P}$:

1. $D_A = \{(s,F) \in \mathbb{P} : A \in F\}$ dla każdego $A \in \mathcal{A}$,
2. $E_n = \{(s,F) \in \mathbb{P} : \varphi(s) > n\}$ dla każdego $n \in \omega$.

Pokażemy, że te zbiory są gęste.

Zacznijmy od gęstości zbioru D_A. Niech $(s,F) \in \mathbb{P}$. Wtedy istnieje $(s, F \cup \{A\}) \in D_A$ taki, że $(s, F \cup \{A\}) \leqslant (s,F)$.

Następnie pokażemy gęstość zbioru E_n. Niech $(s,F) \in \mathbb{P}$. Z dolnej półciągłości podmiary i z tego, że $\mathcal{A}$ ma $\mathcal{I}^+$-FIP znajdziemy skończony zbiór $t \subseteq \bigcap F$ taki, że: $\varphi(t) > n$. Zatem $(s \cup t, F) \in E_n$ i $(s \cup t, F) \leqslant (s,F)$.

Niech $\mathbb{D} = \{D_A : A \in \mathcal{A}\} \cup \{E_n : n \in \omega\}$. Skoro $\mathbb{P}$ jest σ-scentrowany i $|\mathbb{D}| < \mathfrak{p}$, wtedy używając Twierdzenia 3.9, znajdziemy filtr $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{P}$ taki, że $\mathcal{G} \cap D \neq \emptyset$ dla każdego $D \in \mathbb{D}$.

Definiujemy $B = \bigcup \{s \in [\omega]^{<\omega} : (s,F) \in \mathcal{G}$ dla jakiegoś skończonego $F \subseteq \mathcal{A}\}$. Wtedy $B \in \mathcal{I}^+$, ponieważ dla każdego $n \in \omega$ istnieje $(s,F) \in \mathcal{G} \cap E_n$, więc $\varphi(B) \geqslant \varphi(s) > n$.

Zobaczmy, że $B \setminus A$ jest skończony dla każdego $A \in \mathcal{A}$. Jeżeli $A \in \mathcal{A}$, wtedy istnieje $(s,F) \in \mathcal{G} \cap D_A$. Pokażemy, że $B \setminus A \subseteq s$.

Dla $k \in B \setminus A$ znajdziemy $(s', F') \in \mathcal{G}$ taki, że $k \in s'$. Skoro $\mathcal{G}$ jest filtrem, to istnieje $(s'', F'') \in \mathcal{G}$ taka, że $(s'', F'') \leqslant (s,F)$ i $(s'', F'') \leqslant (s', F')$. Wtedy $s'' \setminus s \subseteq \bigcap F \subseteq A$ i $k \notin A$, więc $k \notin s'' \setminus s$. Biorąc pod uwagę, że $k \in s' \subseteq s''$, uzyskujemy $k \in s$.

□

3.5. Charakterystyka kardynalna i porządek związany z $\mathcal{I}$-ultrafiltrami

W tej części opracujemy narzędzia, które posłużą nam w dalszych rozważaniach - wprowadzimy dwa niezmienniki kardynalne związane z parami ideałów i rodzinami funkcji oraz pokażemy, jak można je wykorzystać w naszych badaniach.

Definicja 3.11. Dla ideałów $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ i rodziny $\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$ definiujemy

$$\mathfrak{fip}(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{F}) = \min\left(\left\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \text{ ma } \mathcal{J}^+\text{-FIP i } \neg\left(\underset{f\in\mathcal{F}}{\forall}\ \underset{B\in\mathcal{I}}{\exists}\ \mathcal{A} \cup \{f^{-1}[B]\} \text{ ma } \mathcal{J}^+\text{-FIP}\right)\right\} \cup \{\mathfrak{c}^+\}\right).$$

Następujące twierdzenie dostarcza nam podstawowego narzędzia do konstruowania $\mathcal{I}$-ultrafiltrów, które nie są $\mathcal{J}$-ultrafiltrami.

Twierdzenie 3.12. Jeżeli $\mathfrak{fip}(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{F}) \geqslant |\mathcal{F}|$, wtedy istnieje ultrafiltr $\mathcal{U}$ taki, że $\mathcal{I} \not\leqslant_{\mathcal{F}} \mathcal{U}^*$ i $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{U}^*$. W szczególności, jeżeli $\mathcal{F} = \omega^\omega$ ($\mathcal{F}$ jest rodziną funkcji $\mathrm{Fin}-1$ lub $\mathcal{F}$ jest rodziną funkcji różnowartościowych), to uzyskujemy $\mathcal{I}$-ultrafiltr (słaby $\mathcal{I}$-ultrafiltr lub $\mathcal{I}$-punkt), który nie jest $\mathcal{J}$-punktem.

Dowód. Niech $\mathcal{F} = \{f_\alpha : \alpha < |\mathcal{F}|\}$. Konstruujemy $\{A_\alpha : \alpha < |\mathcal{F}|\} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ taki, że dla każdego α otrzymujemy:

1. $\{A_\beta : \beta < \alpha\}$ ma $\mathcal{J}^+$-FIP,

2. $f_\alpha[A_\alpha] \in \mathcal{I}$.

Załóżmy, że A_β zostały skonstruowane dla $\beta < \alpha$. Mamy dwa przypadki.

Przypadek 1. Jeżeli istnieje $F \in [\alpha]^{<\omega}$ taki, że $f_\alpha[\bigcap\{A_\beta : \beta \in F\}] \in \mathcal{I}$, wtedy bierzemy $A_\alpha = \bigcap\{A_\beta : \beta \in F\}$.

Przypadek 2. Załóżmy, że $f_\alpha[\bigcap\{A_\beta : \beta \in F\}] \notin \mathcal{I}$ dla każdego $F \in [\alpha]^{<\omega}$. Skoro $|\alpha| < |\mathcal{F}| \leqslant \mathfrak{fip}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{F})$ i $\mathcal{A} = \{A_\beta : \beta < \alpha\}$ ma $\mathcal{J}^+$-FIP, wtedy istnieje $B \in \mathcal{I}$ taki, że $\mathcal{A} \cup \{f_\alpha^{-1}[B]\}$ ma $\mathcal{J}^+$-FIP. Bierzemy $A_\alpha = f_\alpha^{-1}[B]$, bo $f_\alpha[A_\alpha] = f_\alpha[f_\alpha^{-1}[B]] \subseteq B \in \mathcal{I}$.

Konstrukcja $\{A_\alpha : \alpha < |\mathcal{F}|\}$ została zakończona.

Skoro $\{A_\alpha : \alpha < |\mathcal{F}|\}$ ma $\mathcal{J}^+$-FIP, to $\mathcal{J}^* \cup \{A_\alpha : \alpha < |\mathcal{F}|\}$ ma $\mathcal{J}^+$-FIP (w szczególności ma SFIP). Zatem istnieje ultrafiltr $\mathcal{U}$ taki, że $\mathcal{J}^* \cup \{A_\alpha : \alpha < |\mathcal{F}|\} \subseteq \mathcal{U}$ (ponieważ rodzina $\mathcal{J}^* \cup \{A_\alpha : \alpha < |\mathcal{F}|\}$ ma SFIP). Czyli $\mathcal{U}$ jest żądanym ultrafiltrem.

□

Dla ideału $\mathcal{I}$ na ω i $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ definiujemy

$$\mathcal{I}(\mathcal{A}) = \left\{ B \subseteq \omega : \underset{F \in [\mathcal{A}]^{<\omega}}{\exists} B \setminus \bigcup F \in \mathcal{I} \right\}.$$

Zauważmy, że albo $\mathcal{I}(\mathcal{A}) = \mathcal{P}(\omega)$ albo $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ jest ideałem generowanym przez $\mathcal{I} \cup \mathcal{A}$. Drugi przypadek zachodzi dokładnie, gdy $\omega \notin \mathcal{I}(\mathcal{A})$. Poniższy lemat pokaże, że $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ jest ideałem generowanym przez $\mathcal{I} \cup \mathcal{A}$ też wtedy, kiedy rodzina $\{\omega \setminus A : A \in \mathcal{A}\}$ ma $\mathcal{I}^+$-FIP.

Lemat 3.13. Niech $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$. Rodzina $\{\omega \setminus A : A \in \mathcal{A}\}$ ma $\mathcal{I}^+$-FIP wtedy i tylko wtedy, gdy $\omega \notin \mathcal{I}(\mathcal{A})$.

Dowód. ($\Longrightarrow$) Załóżmy, że rodzina $\{\omega \setminus A : A \in \mathcal{A}\}$ ma $\mathcal{I}^+$-FIP. Wtedy dla każdego $n \in \omega$ i dowolnych $A_0, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ dostajemy

$$\bigcap_{i \leqslant n} (\omega \setminus A_i) = \omega \setminus \bigcup_{i \leqslant n} A_i \notin \mathcal{I}.$$

Zatem $\omega \notin \mathcal{I}(\mathcal{A})$.

($\Longleftarrow$) Załóżmy, że $\omega \notin \mathcal{I}(\mathcal{A})$. Wtedy dla każdego $F \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$ otrzymujemy $\omega \setminus \bigcup F \notin \mathcal{I}$. Więc rodzina $\{\omega \setminus A : A \in \mathcal{A}\}$ ma $\mathcal{I}^+$-FIP.

□

Definicja 3.14. Niech $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subseteq \omega^\omega$, $\lambda \leqslant \mathfrak{c}$ oraz $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ będą ideałami na ω. Poniżej przez $\mathcal{J}'$ oznaczać będziemy ideał.

1. Wprowadzamy

$$\mathcal{I} \preceq^\lambda_{\mathcal{F},\mathcal{G}} \mathcal{J} \iff \left(\underset{\mathcal{J}' \subseteq \mathcal{P}(\omega)}{\forall} \left(\mathcal{J} \leqslant_{\mathcal{G}} \mathcal{J}' \Longrightarrow \left(\underset{\mathcal{A} \in [\mathcal{P}(\omega)]^{<\lambda}}{\exists} (\omega \notin \mathcal{J}'(\mathcal{A}) \wedge \mathcal{I} \leqslant_{\mathcal{F}} \mathcal{J}'(\mathcal{A})) \right) \right) \right).$$

2. Definiujemy

$$\mathfrak{u}(\mathcal{I}, \mathcal{F}, \mathcal{J}, \mathcal{G}) = \min \left(\left\{ \lambda \leqslant \mathfrak{c} : \mathcal{I} \preceq^\lambda_{\mathcal{F},\mathcal{G}} \mathcal{J} \right\} \cup \{\mathfrak{c}^+\} \right).$$

Następujące twierdzenie dostarcza nam podstawowego narzędzia do udowodnienia (przy założeniu CH), kiedy istnienie $\mathcal{I}$-ultrafiltrów, które nie są $\mathcal{J}$-ultrafiltrami jest równoważne $\mathcal{I} \not\leqslant_K \mathcal{J}$.

Twierdzenie 3.15. Poniżej przez $\mathcal{U}$ oznaczamy ultrafiltr. Jeżeli $\mathcal{G}$ zawiera identyczność, wtedy

$$\mathfrak{u}(\mathcal{I},\mathcal{F},\mathcal{J},\mathcal{G}) > |\mathcal{F}| \iff \underset{\mathcal{U}\subseteq\mathcal{P}(\omega)}{\exists} \mathcal{I} \not\leqslant_{\mathcal{F}} \mathcal{U}^* \wedge \mathcal{J} \leqslant_{\mathcal{G}} \mathcal{U}^*.$$

Dowód. ($\Longleftarrow$) Jeżeli $\mathcal{U}$ jest ultrafiltrem takim, że $\mathcal{I} \not\leqslant_{\mathcal{F}} \mathcal{U}^*$ i $\mathcal{J} \leqslant_{\mathcal{G}} \mathcal{U}^*$, wtedy $\mathcal{J}' = \mathcal{U}^*$ jest maksymalnym ideałem $\leqslant_{\mathcal{G}}$-powyżej $\mathcal{J}$, który jest świadkiem na $\mathcal{I} \not\preceq^{\lambda}_{\mathcal{F},\mathcal{G}} \mathcal{J}$ dla każdego $\lambda \leqslant \mathfrak{c}$ (skoro $\mathcal{J}'$ jest maksymalny i jeżeli $\omega \notin \mathcal{J}'(\mathcal{A})$, to otrzymujemy $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{J}'$, więc $\mathcal{J}' = \mathcal{J}'(\mathcal{A})$). Zatem $\mathfrak{u}(\mathcal{I},\mathcal{F},\mathcal{J},\mathcal{G}) = \mathfrak{c}^+ > |\mathcal{F}|$.

($\Longrightarrow$) Jeżeli $\mathfrak{u}(\mathcal{I},\mathcal{F},\mathcal{J},\mathcal{G}) > |\mathcal{F}|$, to $\mathcal{I} \not\preceq^{|\mathcal{F}|}_{\mathcal{F},\mathcal{G}} \mathcal{J}$. Więc istnieje ideał $\mathcal{J}'$ taki, że $\mathcal{J} \leqslant_{\mathcal{G}} \mathcal{J}'$ i $\mathcal{I} \not\leqslant_{\mathcal{F}} \mathcal{J}'(\mathcal{A})$ dla każdego $\mathcal{A} \in [\mathcal{P}(\omega)]^{<|\mathcal{F}|}$ takiego, że $\omega \notin \mathcal{J}'(\mathcal{A})$.

Niech $\mathcal{F} = \{f_\alpha : \alpha < |\mathcal{F}|\}$. Konstruujemy ciąg $\langle A_\alpha : \alpha < |\mathcal{F}|\rangle$ podzbiorów ω taki, że dla każdego α mamy:

1. $\{\omega \setminus A_\beta : \beta < \alpha\}$ ma $(\mathcal{J}')^+$-FIP,
2. $f_\alpha[\omega \setminus A_\alpha] \in \mathcal{I}$.

Załóżmy, że A_β zostały skonstruowane dla $\beta < \alpha$. Niech $\mathcal{A} = \{A_\beta : \beta < \alpha\}$. Skoro $\{\omega \setminus A_\beta : \beta < \alpha\}$ ma $(\mathcal{J}')^+$-FIP, więc $\omega \notin \mathcal{J}'(\mathcal{A})$. Z tego, że $|\mathcal{A}| \leqslant |\alpha| < |\mathcal{F}|$, otrzymujemy $\mathcal{I} \not\leqslant_{\mathcal{F}} \mathcal{J}'(\mathcal{A})$. Zatem istnieje $B \in (\mathcal{J}'(\mathcal{A}))^+$ taki, że $f_\alpha[B] \in \mathcal{I}$. Wtedy bierzemy $A_\alpha = \omega \setminus B$ i konstrukcja $\langle A_\alpha : \alpha < |\mathcal{F}|\rangle$ została ukończona.

Skoro $\{\omega \setminus A_\alpha : \alpha < |\mathcal{F}|\}$ ma $(\mathcal{J}')^+$-FIP, to rodzina $(\mathcal{J}')^* \cup \{\omega \setminus A_\alpha : \alpha < |\mathcal{F}|\}$ ma $(\mathcal{J}')^+$-FIP (w szczególności ma SFIP). Zatem istnieje ultrafiltr $\mathcal{U}$ taki, że $(\mathcal{J}')^* \cup \{\omega \setminus A_\alpha : \alpha < |\mathcal{F}|\} \subseteq \mathcal{U}$ (ponieważ rodzina $(\mathcal{J}')^* \cup \{\omega \setminus A_\alpha : \alpha < |\mathcal{F}|\}$ ma SFIP). Wtedy $\mathcal{U}$ jest żądanym ultrafiltrem.

□

Wniosek 3.16. Niech $\mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$ będą ideałami na ω.

1. $\mathcal{I} \not\preceq^{\mathfrak{c}}_{\omega^\omega,\omega^\omega} \mathcal{J}$ ($\mathcal{I} \not\preceq^{\mathfrak{c}}_{\omega^\omega,\mathrm{Fin}-1} \mathcal{J}$ lub $\mathcal{I} \not\preceq^{\mathfrak{c}}_{\omega^\omega,1-1} \mathcal{J}$) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\mathcal{I}$-ultrafiltr, który nie jest $\mathcal{J}$-ultrafiltrem (słabym $\mathcal{J}$-ultrafiltrem lub $\mathcal{J}$-punktem).
2. $\mathcal{I} \not\preceq^{\mathfrak{c}}_{\mathrm{Fin}-1,\mathrm{Fin}-1} \mathcal{J}$ ($\mathcal{I} \not\preceq^{\mathfrak{c}}_{\mathrm{Fin}-1,1-1} \mathcal{J}$) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje słaby $\mathcal{I}$-ultrafiltr, który nie jest słabym $\mathcal{J}$-ultrafiltrem ($\mathcal{J}$-punktem).
3. $\mathcal{I} \not\preceq^{\mathfrak{c}}_{1-1,1-1} \mathcal{J}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\mathcal{I}$-punkt, który nie jest $\mathcal{J}$-punktem.

Dowód. Niech $\mathcal{F},\mathcal{G} \subseteq \omega^\omega$. Na początku zauważmy, że moc zbioru wszystkich funkcji (dowolnych, $\mathrm{Fin}-1$, różnowartościowych) wynosi $\mathfrak{c}$ i jeżeli $\mathcal{I} \preceq^{\lambda}_{\mathcal{F},\mathcal{G}} \mathcal{J}$ dla liczby kardynalnej λ, wtedy dla każdej κ takiej, że $\lambda < \kappa \leqslant \mathfrak{c}$ mamy $\mathcal{I} \preceq^{\kappa}_{\mathcal{F},\mathcal{G}} \mathcal{J}$. Udowodnimy podpunkt 1. - dowody podpunktów 2. i 3. są analogiczne.

($\Longrightarrow$) Zakładamy, że $\mathcal{I} \not\preceq^{\mathfrak{c}}_{\omega^\omega,\omega^\omega} \mathcal{J}$ ($\mathcal{I} \not\preceq^{\mathfrak{c}}_{\omega^\omega,\mathrm{Fin}-1} \mathcal{J}$ lub $\mathcal{I} \not\preceq^{\mathfrak{c}}_{\omega^\omega,1-1} \mathcal{J}$). Wtedy z akapitu powyżej wiemy, że $\mathcal{I} \not\preceq^{\lambda}_{\omega^\omega,\omega^\omega} \mathcal{J}$ ($\mathcal{I} \not\preceq^{\lambda}_{\omega^\omega,\mathrm{Fin}-1} \mathcal{J}$ lub $\mathcal{I} \not\preceq^{\lambda}_{\omega^\omega,1-1} \mathcal{J}$) dla $\lambda < \mathfrak{c}$. Zatem $\mathfrak{u}(\mathcal{I},\mathcal{F},\mathcal{J},\mathcal{G}) = \mathfrak{c}^+ > \mathfrak{c}$ dla odpowiednich rodzin $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$. Stosując Twierdzenie 3.15, otrzymujemy $\mathcal{I}$-ultrafiltr, który nie jest $\mathcal{J}$-ultrafiltrem (słabym $\mathcal{J}$-ultrafiltrem lub $\mathcal{J}$-punktem).

($\Longleftarrow$) Załóżmy, że istnieje $\mathcal{I}$-ultrafiltr, który nie jest $\mathcal{J}$-ultrafiltrem (słabym $\mathcal{J}$-ultrafiltrem lub $\mathcal{J}$-punktem). Stosując Twierdzenie 3.15 dostajemy, że $\mathfrak{u}(\mathcal{I},\mathcal{F},\mathcal{J},\mathcal{G}) > \mathfrak{c}$ dla odpowiednich rodzin $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$. Zatem $\mathfrak{u}(\mathcal{I},\mathcal{F},\mathcal{J},\mathcal{G}) = \mathfrak{c}^+$, więc z definicji liczby $\mathfrak{u}(\mathcal{I},\mathcal{F},\mathcal{J},\mathcal{G})$ dla odpowiednich rodzin $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$, uzyskujemy $\mathcal{I} \not\preceq^{\mathfrak{c}}_{\omega^\omega,\omega^\omega} \mathcal{J}$ ($\mathcal{I} \not\preceq^{\mathfrak{c}}_{\omega^\omega,\mathrm{Fin}-1} \mathcal{J}$ lub $\mathcal{I} \not\preceq^{\mathfrak{c}}_{\omega^\omega,1-1} \mathcal{J}$).

□

Uwaga 3.17. Zauważmy, że $\mathcal{I} \leqslant_K \mathcal{J}$ implikuje $\mathcal{I} \preceq^{\mathfrak{c}}_{\omega^\omega,\omega^\omega} \mathcal{J}$. Jakkolwiek, odwrotna implikacja nie zachodzi w ogólności. Wiemy, że $\mathrm{Fin}^2 \not\leqslant_K \mathrm{conv}$ [43, str. 837], ale $\mathrm{Fin}^2 \preceq^{\mathfrak{c}}_{\omega^\omega,\omega^\omega} \mathrm{conv}$ zachodzi, bo Fin^2-ultrafiltry, conv-ultrafiltry i P-punkty są tym samym pojęciem (Twierdzenie 3.4(1.)).

Twierdzenie, które teraz podamy będzie łączyło dwa niezmienniki kardynalne wprowadzone powyżej.

Twierdzenie 3.18. Jeżeli $\mathcal{G}$ zawiera identyczność, wtedy albo $\mathfrak{fip}(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{F}) = \mathfrak{u}(\mathcal{I},\mathcal{F},\mathcal{J},\mathcal{G}) = \mathfrak{c}^+$ albo

$$\mathfrak{fip}(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{F}) < \mathfrak{u}(\mathcal{I},\mathcal{F},\mathcal{J},\mathcal{G}).$$

Dowód. Załóżmy, że $\mathfrak{fip}(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{F}) < \mathfrak{c}^+$. Pokażemy, że $\mathcal{I} \not\preceq^{\mathfrak{fip}(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{F})}_{\mathcal{F},\mathcal{G}} \mathcal{J}$. Niech $\mathcal{J}' = \mathcal{J}$. Bierzemy dowolną rodzinę $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ taką, że $|\mathcal{A}| < \mathfrak{fip}(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{F})$ i $\omega \notin \mathcal{J}'(\mathcal{A})$. Definiujemy $\mathcal{B} = \{\omega \setminus A : A \in \mathcal{A}\}$. Wtedy $\mathcal{B}$ ma $\mathcal{J}^+$-FIP i $|\mathcal{B}| < \mathfrak{fip}(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{F})$, więc dla każdego $f \in \mathcal{F}$ istnieje $C \in \mathcal{I}$ taki, że $\mathcal{B} \cup \{f^{-1}[C]\}$ ma $\mathcal{J}^+$-FIP. W szczególności $f^{-1}[C] \notin \mathcal{J}'(\mathcal{A})$. Zatem $\mathcal{I} \not\leqslant_{\mathcal{F}} \mathcal{J}'(\mathcal{A})$.

Jeżeli $\mathfrak{fip}(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{F}) = \mathfrak{c}^+$, to $\mathcal{I} \not\preceq^{\lambda}_{\mathcal{F},\mathcal{G}} \mathcal{J}$ dla każdego $\lambda \leqslant \mathfrak{c}$, więc $\mathfrak{u}(\mathcal{I},\mathcal{F},\mathcal{J},\mathcal{G}) = \mathfrak{c}^+$.

□

Twierdzenie 3.19. Niech $\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$ i $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ będą ideałami na ω takimi, że $\mathcal{I}$ jest gęsty oraz $\mathcal{I} \not\leqslant_{\mathcal{F}} \mathcal{J}_{\restriction A}$ dla wszystkich $A \notin \mathcal{J}$. Wtedy:

1. $\mathfrak{p}(\mathcal{J}) \leqslant \mathfrak{fip}(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{F})$.
2. $\mathrm{add}^*(\mathcal{I}) \leqslant \mathfrak{fip}(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{F})$.

Dowód. 1. Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną mającą $\mathcal{J}^+$-FIP i taką, że $|\mathcal{A}| < \mathfrak{p}(\mathcal{J})$. Wtedy istnieje $C \notin \mathcal{J}$ taki, że $C \subseteq^{\mathcal{J}} A$ dla każdego $A \in \mathcal{A}$. W szczególności $C \subseteq^{\mathcal{J}} \bigcap F$ dla każdego $F \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$. Niech $f \in \mathcal{F}$. Skoro $\mathcal{I} \not\leqslant_{\mathcal{F}} \mathcal{J}_{\restriction C}$, to istnieje $D \subseteq C$, $D \notin \mathcal{J}$ taki, że $f[D] \in \mathcal{I}$. Weźmy $B = f[D]$ i zauważmy, że dla każdego $F \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$ otrzymujemy $\bigcap F \cap f^{-1}[B] \supseteq \bigcap F \cap D \notin \mathcal{J}$ (ponieważ $D \setminus \bigcap F \subseteq C \setminus \bigcap F \in \mathcal{J}$ i $D = (D \setminus \bigcap F) \cup (D \cap \bigcap F) \notin \mathcal{J}$). To znaczy, że $\mathcal{A} \cup \{f^{-1}[B]\}$ ma $\mathcal{J}^+$-FIP, więc $|\mathcal{A}| < \mathfrak{fip}(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{F})$.

2. Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną mającą $\mathcal{J}^+$-FIP i taką, że $|\mathcal{A}| < \mathrm{add}^*(\mathcal{I})$. Ustalmy $f \in \mathcal{F}$.

Jeżeli istnieje $n \in \omega$ taki, że $\{f^{-1}[\{n\}]\} \cup \mathcal{A}$ ma $\mathcal{J}^+$-FIP, wtedy $|\mathcal{A}| < \mathfrak{fip}(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{F})$ i dowód jest zakończony. W przeciwnym przypadku $\{f^{-1}[\{n\}]\} \cup \mathcal{A}$ nie ma $\mathcal{J}^+$-FIP dla każdego $n \in \omega$. Dla każdego $F \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$ definiujemy

$$Y_1^F = \left\{n \in \omega : f^{-1}[\{n\}] \cap \bigcap F \in \mathcal{J}\right\} \quad \text{i} \quad Y_2^F = \omega \setminus Y_1^F.$$

Wybieramy zbiór $B_F \in \mathcal{I}$ w następujący sposób:

- Jeżeli $\{f^{-1}\left[Y_1^F\right]\} \cup \mathcal{A}$ ma $\mathcal{J}^+$-FIP, wtedy $A = f^{-1}\left[Y_1^F\right] \cap \bigcap F \notin \mathcal{J}$. Skoro $\mathcal{I} \not\leqslant_{\mathcal{F}} \mathcal{J}_{\restriction A}$, to istnieje $B_F \in \mathcal{I}$ taki, że
$$B_F \subseteq f\left[f^{-1}\left[Y_1^F\right] \cap \bigcap F\right] \subseteq Y_1^F \cap f\left[\bigcap F\right]$$
i
$$f^{-1}[B_F] \cap \left(f^{-1}\left[Y_1^F\right] \cap \bigcap F\right) \notin \mathcal{J}.$$
- Jeżeli $\{f^{-1}\left[Y_2^F\right]\} \cup \mathcal{A}$ ma $\mathcal{J}^+$-FIP, wtedy Y_2^F jest nieskończony (ponieważ $\{f^{-1}[\{n\}]\} \cup \mathcal{A}$ nie ma $\mathcal{J}^+$-FIP dla każdego $n \in \omega$), więc istnieje nieskończony zbiór $B_F \subseteq Y_2^F$ taki, że $B_F \in \mathcal{I}$ (gdyż $\mathcal{I}$ jest gęsty).

Te dwa przypadki wyczerpują wszystkie możliwości. Jeżeli nie zachodzi pierwszy przypadek, to istnieje skończony zbiór $G \subseteq \mathcal{A}$ taki, że $\bigcap G \cap f^{-1}\left[Y_1^F\right] \in \mathcal{J}$. Wtedy dla każdego skończonego zbioru $H \subseteq \mathcal{A}$ otrzymujemy

$$\bigcap H \cap f^{-1}\left[Y_2^F\right] \supseteq \bigcap H \cap \bigcap G \cap f^{-1}\left[Y_2^F\right] \notin \mathcal{J},$$

ponieważ

$$\left(\bigcap H \cap \bigcap G\right) \setminus f^{-1}\left[Y_2^F\right] \subseteq \bigcap G \setminus f^{-1}\left[Y_2^F\right] = \bigcap G \cap f^{-1}\left[\omega \setminus Y_2^F\right] = \bigcap G \cap f^{-1}\left[Y_1^F\right] \in \mathcal{J},$$

więc

$$\left(\bigcap H \cap \bigcap G\right) \setminus f^{-1}\left[Y_2^F\right] \in \mathcal{J}$$

oraz

$$\bigcap H \cap \bigcap G = \left(\left(\bigcap H \cap \bigcap G\right) \setminus f^{-1}\left[Y_2^F\right]\right) \cup \left(\left(\bigcap H \cap \bigcap G\right) \cap f^{-1}\left[Y_2^F\right]\right) \notin \mathcal{J}.$$

Czyli $\bigcap H \cap f^{-1}\left[Y_2^F\right] \notin \mathcal{J}$, zatem $\{f^{-1}\left[Y_2^F\right]\} \cup \mathcal{A}$ ma $\mathcal{J}^+$-FIP.

Skoro $|[\mathcal{A}]^{<\omega}| < \mathrm{add}^*(\mathcal{I})$, to istnieje $B \in \mathcal{I}$ taki, że $B_F \setminus B$ jest skończony dla każdego $F \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$. Twierdzimy, że $\{f^{-1}[B]\} \cup \mathcal{A}$ ma $\mathcal{J}^+$-FIP (jeżeli tak jest, to $|\mathcal{A}| < \mathfrak{fip}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{F}')$ i dowód będzie zakończony).

Bierzemy $F \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$. Mamy dwa przypadki.

Przypadek 1. Rodzina $\{f^{-1}\left[Y_1^F\right]\} \cup \mathcal{A}$ ma $\mathcal{J}^+$-FIP.

Wtedy $f^{-1}[B_F] \cap \bigcap F \notin \mathcal{J}$. Co więcej, $B_F \setminus B$ jest skończony i $f^{-1}[\{n\}] \cap \bigcap F \in \mathcal{J}$ dla każdego $n \in B_F \setminus B$ (gdyż $B_F \subseteq f\left[f^{-1}\left[Y_1^F\right]\right] \subseteq Y_1^F$), więc $f^{-1}[B_F \setminus B] \cap \bigcap F \in \mathcal{J}$. Zatem

$$f^{-1}[B] \cap \bigcap F \supseteq f^{-1}[B_F \cap B] \cap \bigcap F \notin \mathcal{J},$$

bo

$$\begin{aligned} f^{-1}[B_F] \cap \bigcap F &= f^{-1}[(B_F \setminus B) \cup (B_F \cap B)] \cap \bigcap F = \\ &= \left(f^{-1}[B_F \setminus B] \cap \bigcap F\right) \cup \left(f^{-1}[B_F \cap B] \cap \bigcap F\right) \notin \mathcal{J} \end{aligned}$$

i

$$f^{-1}[B_F \setminus B] \cap \bigcap F \in \mathcal{J}.$$

Przypadek 2. Rodzina $\{f^{-1}\left[Y_2^F\right]\} \cup \mathcal{A}$ ma $\mathcal{J}^+$-FIP.

Wtedy B_F jest nieskończony, więc $B_F \cap B \neq \emptyset$, ponieważ $B_F \setminus B$ jest skończony. Bierzemy $n \in B_F \cap B$. Dostajemy $f^{-1}[\{n\}] \cap \bigcap F \notin \mathcal{J}$ (bo $n \in B_F \subseteq Y_2^F$) i $f^{-1}[B] \supseteq f^{-1}[\{n\}]$ (gdyż $n \in B$). Zatem $f^{-1}[B] \cap \bigcap F \notin \mathcal{J}$, ponieważ $f^{-1}[B] \cap \bigcap F \supseteq f^{-1}[\{n\}] \cap \bigcap F \notin \mathcal{J}$.

□

Jako prosty wniosek uzyskujemy wynik z pracy [25].

Wniosek 3.20 ([25, Proposition 2.3])**.** Załóżmy, że $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$. Istnieje $\mathcal{I}$-ultrafiltr dla każdego gęstego ideału $\mathcal{I}$.

Dowód. Skoro $\mathfrak{p}(\mathrm{Fin}) = \mathfrak{p}$ (ze Stwierdzenia 3.7(1.)) i $\mathcal{I} \not\leq_K \mathrm{Fin} \cong \mathrm{Fin}_{\restriction A}$ dla każdego $A \notin \mathrm{Fin}$ (bo ideał $\mathcal{I}$ jest gęsty), to wystarczy zastosować Twierdzenia 3.12 i 3.19(1.).

□

3.6. Związek porządku z poprzedniego podrozdziału z porządkiem Katětova

W tym podrozdziale sprawdzimy, co wspólnego mają: porządek Katětova, porządek zdefiniowany w poprzednim podrozdziale i $\mathcal{I}$-ultrafiltry. Następujący wynik przy założeniu CH dostarcza warunków wystarczających dla niektórych ideałów do uzyskania równoważności: $\mathcal{I} \not\leqslant_K \mathcal{J}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\mathcal{I}$-ultrafiltr, który nie jest $\mathcal{J}$-ultrafiltrem.

Twierdzenie 3.21. Załóżmy, że zachodzi CH. Niech $\mathcal{I}$ będzie gęstym ideałem i $\mathcal{J}$ będzie $P^+(\mathcal{J})$-ideałem.

1. Jeżeli $\mathcal{J}$ jest $\leqslant_K$-jednorodny, wtedy następujące warunki są równoważne:
   a) $\mathcal{I} \not\leqslant_K \mathcal{J}$.
   b) $\mathcal{I} \not\preceq^{\mathfrak{c}}_{\omega^\omega,\omega^\omega} \mathcal{J}$.
   c) $\mathcal{I} \not\preceq^{\mathfrak{c}}_{\omega^\omega,\mathrm{Fin}-1} \mathcal{J}$.
   d) $\mathcal{I} \not\preceq^{\mathfrak{c}}_{\omega^\omega,1-1} \mathcal{J}$.
   e) Istnieje $\mathcal{I}$-ultrafiltr, który nie jest $\mathcal{J}$-punktem.
   f) Istnieje $\mathcal{I}$-ultrafiltr, który nie jest słabym $\mathcal{J}$-ultrafiltrem.
   g) Istnieje $\mathcal{I}$-ultrafiltr, który nie jest $\mathcal{J}$-ultrafiltrem.
2. Jeżeli $\mathcal{J}$ jest $\leqslant_{KB}$-jednorodny, wtedy następujące warunki są równoważne:
   a) $\mathcal{I} \not\leqslant_{KB} \mathcal{J}$.
   b) $\mathcal{I} \not\preceq^{\mathfrak{c}}_{\mathrm{Fin}-1,\mathrm{Fin}-1} \mathcal{J}$.
   c) $\mathcal{I} \not\preceq^{\mathfrak{c}}_{\mathrm{Fin}-1,1-1} \mathcal{J}$.
   d) Istnieje słaby $\mathcal{I}$-ultrafiltr, który nie jest $\mathcal{J}$-punktem.
   e) Istnieje słaby $\mathcal{I}$-ultrafiltr, który nie jest słabym $\mathcal{J}$-ultrafiltrem.
3. Jeżeli $\mathcal{J}$ jest $\leqslant_P$-jednorodny, wtedy następujące warunki są równoważne:
   a) $\mathcal{I} \not\leqslant_P \mathcal{J}$.
   b) $\mathcal{I} \not\preceq^{\mathfrak{c}}_{1-1,1-1} \mathcal{J}$.
   c) Istnieje $\mathcal{I}$-punkt, który nie jest $\mathcal{J}$-punktem.

Jeżeli $\mathcal{J}$ jest F_σ ideałem, to CH może zostać zastąpione założeniem $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$ w 1., 2. i 3..

Dowód. 1. Zauważmy, że równoważności: $e) \iff d)$, $f) \iff c)$, $g) \iff b)$ i implikacje: $d) \implies c)$, $c) \implies b)$, $b) \implies a)$ otrzymujemy, używając Wniosku 3.16 i Uwagi 3.17. Dowód zostanie zakończony poprzez pokazanie, że $\mathcal{I} \not\leqslant_K \mathcal{J}$ implikuje istnienie $\mathcal{I}$-ultrafiltru, który nie jest $\mathcal{J}$-punktem.

Załóżmy, że $\mathcal{I} \not\leqslant_K \mathcal{J}$. Skoro $\mathcal{J}$ jest $\leqslant_K$-jednorodny, to uzyskujemy $\mathcal{I} \not\leqslant_K \mathcal{J}_{\restriction A}$ dla wszystkich $A \notin \mathcal{J}$. Twierdzenie 3.19 daje nam $\mathfrak{fip}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \omega^\omega) \geqslant \mathfrak{p}(\mathcal{J})$. Dlatego, że $\mathcal{J}$ jest $\mathrm{P}^+(\mathcal{J})$-ideałem, to $\mathfrak{p}(\mathcal{J}) \geqslant \omega_1$ (przez Stwierdzenie 3.7(3.)). Zatem używając CH i stosując Twierdzenie 3.12, uzyskujemy $\mathcal{I}$-ultrafiltr, który nie jest $\mathcal{J}$-punktem.

Dowody punktów 2. i 3. są bardzo podobne do dowodu poprzedniego punktu, gdyż możemy sprawdzić, że $\mathcal{I} \not\preceq^{\mathfrak{c}}_{\text{Fin}-1,\text{Fin}-1} \mathcal{J}$ ($\mathcal{I} \not\preceq^{\mathfrak{c}}_{1-1,1-1} \mathcal{J}$) implikuje $\mathcal{I} \not\leqslant_{KB} \mathcal{J}$ ($\mathcal{I} \not\leqslant_{P} \mathcal{J}$).

Dla $\mathcal{J}$ będącego F_σ ideałem teza wynika z dowodów 1., 2., 3. i faktu, że $\mathfrak{p}(\mathcal{J}) \geqslant \mathfrak{p}$ dla F_σ ideałów (Twierdzenie 3.10).

□

3.7. Maksymalne ideały

W tej części przedstawimy następujący wynik dla ideałów maksymalnych.

Twierdzenie 3.22. Niech $\mathcal{I}$ będzie maksymalnym ideałem na ω. Jeżeli $\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$ zawiera identyczność, wtedy

$$\mathfrak{fip}(\mathcal{I}, \text{Fin}, \mathcal{F}) = \chi(\mathcal{I}^*),$$

gdzie

$$\chi(\mathcal{I}^*) = \min\left\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \subseteq \mathcal{I}^* \wedge \underset{A\in\mathcal{I}^*}{\forall}\ \underset{B\in\mathcal{B}}{\exists}\ B \subseteq^* A\right\}.$$

Dowód. Na początku pokażemy, że $\mathfrak{fip}(\mathcal{I}, \text{Fin}, \mathcal{F}) \geqslant \chi(\mathcal{I}^*)$. Weźmy rodzinę $\mathcal{A}$ mającą SFIP i taką, że $|\mathcal{A}| < \chi(\mathcal{I}^*)$. Niech $f \in \mathcal{F}$. Mamy dwa przypadki.

Przypadek 1. Istnieje $F \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$ taki, że $f[\bigcap F] \in \mathcal{I}$. Wtedy weźmy $B = f[\bigcap F]$ i zauważmy, że $\bigcap G \cap f^{-1}[B] \supseteq \bigcap G \cap \bigcap F \notin \text{Fin}$ dla każdego $G \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$. Zatem $\mathfrak{fip}(\mathcal{I}, \text{Fin}, \mathcal{F}) > |\mathcal{A}|$.

Przypadek 2. Dla każdego $F \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$ mamy $f[\bigcap F] \notin \mathcal{I}$. Z tego, że $\mathcal{I}$ jest maksymalny, dostajemy $f[\bigcap F] \in \mathcal{I}^*$ dla każdego $F \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$. Zauważmy, że $\chi(\mathcal{I}^*)$ jest nieskończona. Skoro $|\mathcal{A}| < \chi(\mathcal{I}^*)$, to $|[\mathcal{A}]^{<\omega}| < \chi(\mathcal{I}^*)$. Zatem istnieje $C \in \mathcal{I}^*$ taki, że $f[\bigcap F] \not\subseteq^* C$ dla każdego $F \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$. Wtedy bierzemy $B = \omega \setminus C$. Dlatego, że $\bigcap F \cap f^{-1}[B] = \bigcap F \setminus f^{-1}[C]$ dla każdego $F \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$, to $|\bigcap F \cap f^{-1}[B]| \geqslant |f[\bigcap F \setminus f^{-1}[C]]| \geqslant |f[\bigcap F] \setminus C| = \omega$. Więc $\mathfrak{fip}(\mathcal{I}, \text{Fin}, \mathcal{F}) > |\mathcal{A}|$.

Zatem $\mathfrak{fip}(\mathcal{I}, \text{Fin}, \mathcal{F}) \geqslant \chi(\mathcal{I}^*)$.

Teraz pokażemy, że $\mathfrak{fip}(\mathcal{I}, \text{Fin}, \mathcal{F}) \leqslant \chi(\mathcal{I}^*)$. Ustalmy $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{I}^*$ taki, że $|\mathcal{G}| < \mathfrak{fip}(\mathcal{I}, \text{Fin}, \mathcal{F})$. Skoro $\mathcal{G}$ ma SFIP i $|\mathcal{G}| < \mathfrak{fip}(\mathcal{I}, \text{Fin}, \mathcal{F})$, to dla identyczności $f \in \mathcal{F}$ możemy znaleźć $B \in \mathcal{I}$ taki, że $\mathcal{G} \cup \{B\} = \mathcal{G} \cup \{f^{-1}[B]\}$ ma SFIP. Niech $C = \omega \setminus B$. Wtedy $C \in \mathcal{I}^*$ i dla każdego $G \in \mathcal{G}$ mamy $|G \setminus C| = |G \cap B| = \omega$, więc $G \not\subseteq^* C$. Zatem $\chi(\mathcal{I}^*) > |\mathcal{G}|$. Z tego $\mathfrak{fip}(\mathcal{I}, \text{Fin}, \mathcal{F}) \leqslant \chi(\mathcal{I}^*)$.

□

Ponownie jako prosty wniosek otrzymujemy inny wynik z pracy [25].

Wniosek 3.23 ([25, Proposition 2.1])**.** Istnieje $\mathcal{I}$-ultrafiltr dla każdego maksymalnego ideału $\mathcal{I}$ takiego, że $\chi(\mathcal{I}^*) = \mathfrak{c}$.

Dowód. Teza wynika z Twierdzeń 3.12 i 3.22.

□

3.8. P-punkty, które nie są $\mathcal{J}$-ultrafiltrami

Zwrócimy teraz uwagę na takie ideały $\mathcal{J}$, dla których istnieją P-punkty, które nie są $\mathcal{J}$-ultrafiltrami. Zaczynamy od natychmiastowych konsekwencji naszych poprzednich wyników.

Stwierdzenie 3.24. Załóżmy, że zachodzi CH. Niech $\mathcal{J}$ będzie $\mathrm{P}^+(\mathcal{J})$-ideałem, który jest $\leqslant_K$-jednorodny. Wtedy następujące warunki są równoważne.

1. $\mathrm{Fin}^2 \not\leqslant_K \mathcal{J}$.
2. Istnieje P-punkt, który nie jest $\mathcal{J}$-punktem.
3. Istnieje P-punkt, który nie jest słabym $\mathcal{J}$-ultrafiltrem.
4. Istnieje P-punkt, który nie jest $\mathcal{J}$-ultrafiltrem.

Jeżeli $\mathcal{J}$ jest F_σ, wtedy warunek CH może być zastąpiony przez założenie $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$.

Dowód. Teza wynika z Twierdzeń 3.21 i 3.4(1.).

□

Chociaż założenia o ideale $\mathcal{J}$ w powyższym wniosku wydają się mocne, to wniosek ma zastosowanie, na przykład dla ideałów $\mathcal{J} = \mathcal{ED}_{\mathrm{Fin}}$ i $\mathcal{J} = \mathcal{W}$ (przez Stwierdzenia 3.6(1.), 3.5 i 3.3(3.)). Jakkolwiek, nie możemy usunąć założeń o ideale $\mathcal{J}$ w ogólności. Wiadomo, że $\mathrm{Fin}^2 \not\leqslant_K \mathrm{conv}$ ([43, str. 837]), ale wszystkie P-punkty (to znaczy Fin^2-ultrafiltry) są conv-ultrafiltrami przez Twierdzenie 3.4(1.). Niemniej jednak w Twierdzeniu 3.26 pokażemy, że założenia o ideale $\mathcal{J}$ mogą zostać usunięte, jeżeli zamienimy porządek Katětova $\leqslant_K$ na własność, że $\mathcal{J}$ może być rozszerzony do P^+-ideału. Aby to pokazać, będziemy potrzebować następującego wyniku o P^+-ideałach.

Lemat 3.25. Niech $\mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$ będą ideałami na ω.

1. Jeżeli $\mathcal{I} \leqslant_K \mathcal{J}$ i $\mathcal{J}$ jest P^+-ideałem, wtedy $\mathcal{I}$ może być rozszerzony do P^+-ideału.
2. Jeżeli $\mathcal{J}$ jest P^+-ideałem i $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ jest przeliczalną rodziną taką, że $\omega \notin \mathcal{J}(\mathcal{A})$, wtedy $\mathcal{J}(\mathcal{A})$ jest P^+-ideałem.
3. Jeżeli $\mathcal{J}$ nie jest P^+-ideałem, wtedy istnieje przeliczalna rodzina $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ taka, że $\omega \notin \mathcal{J}(\mathcal{A})$ i $\mathrm{Fin}^2 \leqslant_K \mathcal{J}(\mathcal{A})$.

Dowód. 1. Niech $f : \omega \to \omega$ będzie taka, że $f^{-1}[B] \in \mathcal{J}$ dla każdego $B \in \mathcal{I}$. Niech $\mathcal{K} = \{B \subseteq \omega : f^{-1}[B] \in \mathcal{J}\}$. Zauważmy, że $\mathcal{K}$ jest ideałem i $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{K}$. Pokażemy, że $\mathcal{K}$ jest P^+-ideałem. Niech $\{B_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{K}^+$ i $B_n \supseteq B_{n+1}$ dla każdego $n \in \omega$. Wtedy $f^{-1}[B_n] \in \mathcal{J}^+$ i $f^{-1}[B_n] \supseteq f^{-1}[B_{n+1}]$ dla każdego $n \in \omega$. Skoro $\mathcal{J}$ jest P^+-ideałem, to istnieje $A \notin \mathcal{J}$ taki, że zbiór $A \setminus f^{-1}[B_n]$ jest skończony dla każdego $n \in \omega$. Dostajemy $B = f[A] \notin \mathcal{K}$ (bo $\mathcal{J}^+ \ni A \subseteq f^{-1}[f[A]] = f^{-1}[B]$) i $B \setminus B_n$ jest skończony dla każdego $n \in \omega$ (albowiem $B \setminus B_n = f[A] \setminus B_n \subseteq f[A \setminus f^{-1}[B_n]] \in \mathrm{Fin}$, gdyż $A \setminus f^{-1}[B_n] \in \mathrm{Fin}$).

2. Niech $\mathcal{A} = \{A_n : n \in \omega\}$ będzie taka, że $\omega \notin \mathcal{J}(\mathcal{A})$. Weźmy $\{B_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{J}(\mathcal{A})^+$, $B_n \supseteq B_{n+1}$ dla każdego $n \in \omega$ i definiujemy $C_0 = \omega$ i

$$C_{n+1} = B_n \setminus \bigcup_{i<n} A_i$$

dla $n \in \omega$. Wtedy $C_n \notin \mathcal{J}(\mathcal{A})$ (więc również $C_n \notin \mathcal{J}$) i $C_n \supseteq C_{n+1}$ dla każdego $n \in \omega$. Skoro $\mathcal{J}$ jest P^+-ideałem, to istnieje $C' \notin \mathcal{J}$ taki, że $C' \setminus C_n$ jest skończony dla każdego $n \in \omega$. Zdefiniujmy

$C = C' \cap C_1$ i zauważmy, że $C \notin \mathcal{J}$, gdyż $C' \setminus C = C' \setminus C_1$ jest skończony (bo $C' = (C' \setminus C) \cup C$ i $C' \notin \mathcal{J}$). Pokazując, że $C \notin \mathcal{J}(\mathcal{A})$, zakończymy dowód (gdyż $C \setminus B_n \subseteq C \setminus C_n \in \mathrm{Fin}$ dla każdego $n \in \omega$). Przypuśćmy, że $C \in \mathcal{J}(\mathcal{A})$. Wtedy istnieje $n \in \omega$ taki, że

$$C \setminus \bigcup_{i<n} A_i \in \mathcal{J}.$$

Co więcej

$$C \cap \bigcup_{i<n} A_i \in \mathrm{Fin},$$

bo

$$C \cap \bigcup_{i<n} A_i \subseteq C \setminus C_{n+1} \subseteq C' \setminus C_{n+1} \in \mathrm{Fin}.$$

Zatem $C \in \mathcal{J}$, więc otrzymujemy sprzeczność.

3. Skoro $\mathcal{J}$ nie jest P$^+$-ideałem, to istnieje malejący ciąg $\langle B_n \rangle_{n\in\omega}$ zbiorów nienależących do $\mathcal{J}$ taki, że jeżeli $X \setminus B_n \in \mathrm{Fin}$ dla każdego $n \in \omega$, wtedy $X \in \mathcal{J}$. Niech $A_0 = \omega \setminus B_0$ i $A_{n+1} = B_n \setminus B_{n+1}$ dla wszystkich $n \in \omega$. Zauważmy, że

$$\bigcup_{i\leqslant n} A_i = \omega \setminus B_n \notin \mathcal{J}^*,$$

więc $\omega \notin \mathcal{J}(\{A_n : n \in \omega\})$. Co więcej, różnowartościowa funkcja $f : \omega \to \omega^2$ taka, że $f[A_n] \subseteq \{n\} \times \omega$ świadczy o $\mathrm{Fin}^2 \leqslant_K \mathcal{J}(\{A_n : n \in \omega\})$ - wykorzystując fakt, że ciąg $\langle B_n \rangle_{n\in\omega}$ jest świadkiem na to, że $\mathcal{J}$ nie jest P$^+$-ideałem.

□

Twierdzenie 3.26. Niech $\mathcal{J}$ będzie ideałem na ω.

1. Następujące warunki są równoważne:

   a) $\mathcal{J}$ jest rozszerzalny do P$^+$-ideału.

   b) $\mathrm{Fin}^2 \not\preceq^{\omega_1}_{\omega^\omega,1-1} \mathcal{J}$.

   c) $\mathrm{Fin}^2 \not\preceq^{\omega_1}_{\omega^\omega,\mathrm{Fin}-1} \mathcal{J}$.

   d) $\mathrm{Fin}^2 \not\preceq^{\omega_1}_{\omega^\omega,\omega^\omega} \mathcal{J}$.

2. Zakładając, że zachodzi CH, powyższe warunki są równoważne następującym warunkom:

   e) Istnieje P-punkt, który nie jest $\mathcal{J}$-punktem.

   f) Istnieje P-punkt, który nie jest słabym $\mathcal{J}$-ultrafiltrem.

   g) Istnieje P-punkt, który nie jest $\mathcal{J}$-ultrafiltrem.

3. Jeżeli $\mathcal{J}$ jest borelowskim ideałem, wtedy założenie, że zachodzi CH w 2., może zostać zastąpione założeniem $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$.

Dowód. 1. (a) $\Longrightarrow$ b)) Niech $\mathcal{J}' \supseteq \mathcal{J}$ i $\mathcal{J}'$ będzie P$^+$-ideałem. Z Lematu 3.25(2.), $\mathcal{J}'(\mathcal{A})$ jest P$^+$-ideałem dla każdej przeliczalnej rodziny $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ takiej, że $\omega \notin \mathcal{J}'(\mathcal{A})$. Przez Stwierdzenie 3.3(3.) otrzymujemy $\mathrm{Fin}^2 \not\leqslant_K \mathcal{J}'(\mathcal{A})$. Zatem $\mathrm{Fin}^2 \not\preceq^{\omega_1}_{\omega^\omega,1-1} \mathcal{J}$.

Można zauważyć, że implikacje (b) $\Longrightarrow$ c)) i (c) $\Longrightarrow$ d)) zachodzą.

(d) $\Longrightarrow$ a)) Skoro $\mathrm{Fin}^2 \not\leq^{\omega_1}_{\omega^\omega,\omega^\omega} \mathcal{J}$, to istnieje $\mathcal{J}'$ taki, że $\mathcal{J} \leqslant_K \mathcal{J}'$ i $\mathrm{Fin}^2 \not\leqslant_K \mathcal{J}'(\mathcal{A})$ dla każdej przeliczalnej rodziny $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ takiej, że $\omega \notin \mathcal{J}'(\mathcal{A})$. $\mathcal{J}'$ jest P$^+$-ideałem przez Lemat 3.25(3.), zatem $\mathcal{J}$ może być rozszerzony do P$^+$-ideału, co wynika z Lematu 3.25(1.).

2. (b) $\Longrightarrow$ e)) Zakładając CH, teza wynika z Wniosku 3.16(1.) i Twierdzenia 3.4.

Można zauważyć, że implikacje (e) $\Longrightarrow$ f)) i (f) $\Longrightarrow$ g)) zachodzą w ZFC.

(g) $\Longrightarrow$ a)) Bierzemy P-punkt $\mathcal{U}$, który nie jest $\mathcal{J}$-ultrafiltrem (to znaczy $\mathcal{J} \leqslant_K \mathcal{U}^*$). Wtedy $\mathcal{U}^*$ jest P$^+$-ideałem (bo $\mathcal{U}$ jest P-punktem), więc $\mathcal{J}$ może być rozszerzony do P$^+$-ideału przez Lemat 3.25(1.). (Zauważmy, że ten argument działa w ZFC).

3. Biorąc pod uwagę, że jedynie dowód implikacji (b) $\Longrightarrow$ e)) nie został przedstawiony w ZFC i (a) $\Longleftrightarrow$ b)) zachodzi w ZFC, potrzebujemy pokazać (a) $\Longrightarrow$ e)) zakładając $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$ z $\mathcal{J}$ będącym ideałem borelowskim.

Załóżmy, że $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$ i $\mathcal{J}$ jest borelowskim ideałem, który może być rozszerzony do P$^+$-ideału. Wiemy, że jeżeli borelowski ideał może być rozszerzony do P$^+$-ideału, wtedy może być rozszerzony do F_σ ideału (zobacz [60, Theorem 3.2.7] lub [44, Corollary 3.7]). Niech $\widehat{\mathcal{J}}$ będzie F_σ ideałem takim, że $\mathcal{J} \subseteq \widehat{\mathcal{J}}$. Ideał $\widehat{\mathcal{J}}_{\restriction A}$ jest F_σ ideałem dla każdego $A \notin \widehat{\mathcal{J}}$. Zatem $\mathrm{Fin}^2 \not\leqslant_K \widehat{\mathcal{J}}_{\restriction A}$ dla każdego $A \notin \widehat{\mathcal{J}}$ przez Stwierdzenie 3.3(3.). Z Twierdzeń 3.19, 3.18 i 3.10, otrzymujemy $\mathfrak{u}(\mathrm{Fin}^2, \omega^\omega, \widehat{\mathcal{J}}, 1-1) > \mathfrak{c} = |\omega^\omega|$. Z Twierdzenia 3.15, uzyskujemy Fin^2-ultrafiltr (zatem P-punkt przez Twierdzenie 3.4(1.)), który nie jest $\widehat{\mathcal{J}}$-punktem (więc nie jest $\mathcal{J}$-punktem).

□

Stwierdzenie 3.27. Jeżeli $\mathcal{J} \notin \mathrm{FinBW}$, wtedy każdy P-punkt jest $\mathcal{J}$-ultrafiltrem. W szczególności, każdy P-punkt jest $\mathcal{I}_d$-ultrafiltrem, $\mathcal{I}_u$-ultrafiltrem i $\mathcal{L}$-ultrafiltrem (zauważmy, że przypadki $\mathcal{I}_d$ i $\mathcal{L}$ były wcześniej udowodnione w inny sposób w [33, Proposition 2.3.3 i str. 25]).

Dowód. Niech $\mathcal{U}$ będzie P-punktem i załóżmy, że $\mathcal{U}$ nie jest $\mathcal{J}$-ultrafiltrem, to znaczy $\mathcal{J} \leqslant_K \mathcal{U}^*$. Skoro $\mathcal{J} \notin \mathrm{FinBW}$, wtedy $\mathrm{conv} \leqslant_K \mathcal{J}$ ([60, Section 2.7], zobacz także [4, Proposition 6.4]). Zatem $\mathrm{conv} \leqslant_K \mathcal{U}^*$, więc $\mathcal{U}$ nie jest P-punktem z Twierdzenia 3.4(1.). Sprzeczność.

□

Wiadomo z [21, Proposition 3.4 i 4.1], że dla każdego ideału $\mathcal{J}$, który może być rozszerzony do F_σ ideału mamy $\mathcal{J} \in \mathrm{FinBW}$. Dla analitycznych P-ideałów $\mathcal{J} \in \mathrm{FinBW}$ jest równoważne rozszerzalności $\mathcal{J}$ do F_σ ideału ([4, Proposition 6.5]). Hrušak zapytał w [42, Question 5.16] czy to samo zachodzi dla wszystkich borelowskich ideałów, ale odpowiedź na jego pytanie jest negatywna, jak pokazał Kwela ([56, Theorem 3.4]).

W dalszej części pracy będziemy wykorzystywać poniższe twierdzenie pisząc zamiennie $MA_{przeliczalny}$ i $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$.

Twierdzenie 3.28 ([9, Theorem 7.13]). $MA_{przeliczalny}$ jest równoważny $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$.

Twierdzenie 3.29. Jeżeli $\mathcal{J}$ jest F_σ ideałem i $\mathcal{I}$ nie jest słabym P-ideałem, wtedy

$$\mathrm{cov}(\mathcal{M}) \leqslant \mathfrak{fip}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{F})$$

dla każdego $\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$.

Dowód. Niech φ będzie dolnie półciągłą podmiarą taką, że $\mathcal{J} = \mathrm{Fin}(\varphi)$, a $\mathcal{A}$ będzie rodziną mającą $\mathcal{J}^+$-FIP i taką, że $|\mathcal{A}| < \mathrm{cov}(\mathcal{M})$. Ustalmy $f \in \mathcal{F}$.

Skoro $\mathcal{I}$ nie jest słabym P-ideałem, to istnieje rodzina $\{B'_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{I}$ taka, że dla każdego $B \notin \mathcal{I}$ istnieje $n \in \omega$ takie, że $|B'_n \cap B| = \omega$. Definiujemy zbiory B_n dla każdego $n \in \omega$ w następujący sposób: $B_0 = B'_0 \cup \{0\}$,

$$B_{n+1} = \left(B'_{n+1} \cup \{n+1\}\right) \setminus \bigcup_{k \leqslant n} B_k.$$

Zbiory B_n dla każdego $n \in \omega$ należą do ideału $\mathcal{I}$ oraz tworzą partycję zbioru ω (kiedy $B_n = \emptyset$, to nie bierzemy go pod uwagę i przenumerowujemy wszystkie niepuste B_n). Jeżeli $B \notin \mathcal{I}$, to $|B \cap B'_n| = \omega$ dla pewnego $n \in \omega$, więc $\omega = |B \cap B'_n| \leqslant |B \cap B_0| + |B \cap B_1| + \ldots + |B \cap B_n|$ (bo $B'_n \subseteq B_0 \cup \ldots \cup B_n$), czyli istnieje $k \leqslant n$ takie, że $|B \cap B_k| = \omega$.

Dla każdego $n \in \omega$ definiujemy $C_n = f^{-1}[B_n]$. Mamy dwa przypadki.

Przypadek 1. Istnieje $n \in \omega$ takie, że $\bigcap F \cap C_n \notin \mathcal{J}$ dla każdego skończonego zbioru $F \subseteq \mathcal{A}$. Bierzemy $C = B_n$. Skoro $C \in \mathcal{I}$ i $\mathcal{A} \cup \{f^{-1}[C]\}$ ma $\mathcal{J}^+$-FIP, to $|\mathcal{A}| < \mathfrak{fip}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{F})$, więc dowód jest zakończony w tym przypadku.

Przypadek 2. Dla każdego $n \in \omega$ istnieje skończony zbiór $F \subseteq \mathcal{A}$ taki, że $\bigcap F \cap C_n \in \mathcal{J}$.

Definiujemy zbiór częściowo uporządkowany $(\mathbb{P}, \leqslant)$ w następujący sposób:

$$\mathbb{P} = \left\{(H, n) \in [\omega]^{<\omega} \times \omega : H \subseteq \bigcup_{i<n} C_i\right\}$$

i $(H_1, n_1) \leqslant (H_2, n_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą warunki:

1. $H_1 \supseteq H_2$,
2. $n_1 \geqslant n_2$,
3. $\max H_2 < \min(H_1 \setminus H_2)$ [przyjmujemy, że $\max \emptyset = -1$ i $\min \emptyset = \omega$],
4. $$(H_1 \setminus H_2) \cap \bigcup_{i<n_2} C_i = \emptyset.$$

Pokażemy, że zbiór $\mathbb{P}$ jest częściowo uporządkowany. Sprawdzamy przechodniość (można zauważyć, że zwrotność i antysymetryczność zachodzą). Niech $(H_1, n_1), (H_2, n_2), (H_3, n_3) \in \mathbb{P}$ będą takie, że $(H_1, n_1) \leqslant (H_2, n_2)$, $(H_2, n_2) \leqslant (H_3, n_3)$. Mamy pokazać, że $(H_1, n_1) \leqslant (H_3, n_3)$. Otrzymujemy:

- $H_1 \supseteq H_2 \supseteq H_3$,
- $n_1 \geqslant n_2 \geqslant n_3$,
- $\max H_3 < \min(H_1 \setminus H_3)$, bo $\max H_3 \leqslant \max H_2 < \min(H_1 \setminus H_2)$, $\max H_3 < \min(H_2 \setminus H_3)$ i $H_1 \setminus H_3 = (H_1 \setminus H_2) \cup (H_2 \setminus H_3)$, więc $\min(H_1 \setminus H_3) = \min\{\min(H_1 \setminus H_2), \min(H_2 \setminus H_3)\}$,
- $$(H_1 \setminus H_3) \cap \bigcup_{i<n_3} C_i = ((H_1 \setminus H_2) \cup (H_2 \setminus H_3)) \cap \bigcup_{i<n_3} C_i =$$ $$= ((H_1 \setminus H_2) \cap \bigcup_{i<n_3} C_i) \cup ((H_2 \setminus H_3) \cap \bigcup_{i<n_3} C_i) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.$$

Definiujemy zbiory

1. $D_{F,N} = \{(H, n) \in \mathbb{P} : \varphi(\bigcap F \cap H) > N\}$ dla każdego skończonego zbioru $F \subseteq \mathcal{A}$ i $N \in \omega$,
2. $E_k = \{(H, n) \in \mathbb{P} : n > k\}$ dla każdego $k \in \omega$.

Sprawdzimy, że te zbiory są gęste w $(\mathbb{P}, \leqslant)$.

Na początku pokażemy, że zbiory $D_{F,N}$ są gęste. Bierzemy $(H,n) \in \mathbb{P}$. Wiemy, że dla każdego $i < n$ istnieje skończony zbiór $F_i \subseteq \mathcal{A}$ taki, że $\bigcap F_i \cap C_i \in \mathcal{J}$. Skoro $\mathcal{A}$ ma $\mathcal{J}^+$-FIP, to

$$X = \bigcap_{i<n} \bigcap F_i \cap \bigcap F \notin \mathcal{J}.$$

Zauważmy, że

$$X \setminus \left(\bigcup_{i<n} C_i \cup \{0, 1, \ldots, \max H\} \right) \notin \mathcal{J},$$

ponieważ od $X \notin \mathcal{J}$ odejmujemy zbiór skończony i skończoną sumę zbiorów C_i, dla których mamy

$$C_i \cap X \subseteq C_i \cap \bigcap F_i \in \mathcal{J}.$$

Zatem istnieje skończony zbiór

$$H' \subseteq X \setminus \left(\bigcup_{i<n} C_i \cup \{0, 1, \ldots, \max H\} \right)$$

taki, że $\varphi(H') > N$. Bierzemy $G = H \cup H'$ i $m = \max(\{i \in \omega : G \cap C_i \neq \emptyset\} \cup \{n\})$ (m jest dobrze zdefiniowane, bo zbiory C_i tworzą partycję). Zauważmy, że $(G,m) \in \mathbb{P}$. Także $(G,m) \in D_{F,N}$, gdyż $\varphi\left(\bigcap F \cap G\right) \geqslant \varphi\left(\bigcap F \cap H'\right) = \varphi(H') > N$, ponieważ

$$H' \subseteq X \setminus \left(\bigcup_{i<n} C_i \cup \{0, 1, \ldots, \max H\} \right).$$

Skoro $(G,m) \in D_{F,N}$ i $(G,m) \leqslant (H,n)$, więc zbiory $D_{F,N}$ są gęste.

Teraz pokażemy, że zbiory E_k są gęste. Bierzemy $(H,n) \in \mathbb{P}$. Niech $G = H$ i $m = \max\{n, k+1\}$. Skoro $(G,m) \in \mathbb{P}$, $(G,m) \in E_k$ i $(G,m) \leqslant (H,n)$, to zbiory E_k są gęste.

Niech $\mathbb{D} = \{D_{F,N} : |F| < \infty, F \subseteq \mathcal{A}, N \in \omega\} \cup \{E_k : k \in \omega\}$.

Z tego, że $\mathbb{P}$ jest przeliczalny i $|\mathbb{D}| < \mathrm{cov}(\mathcal{M})$, dostajemy filtr $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{P}$ taki, że $\mathcal{G} \cap D \neq \emptyset$ dla każdego $D \in \mathbb{D}$ (wykorzystując Twierdzenie 3.28).

Definiujemy $B = f[A]$, gdzie

$$A = \bigcup \left\{ H \in [\omega]^{<\omega} : \exists_{n \in \omega} (H,n) \in \mathcal{G} \right\}.$$

Jeżeli pokażemy, że $B \in \mathcal{I}$ i $\mathcal{A} \cup \{f^{-1}[B]\}$ ma $\mathcal{J}^+$-FIP, wtedy $|\mathcal{A}| < \mathfrak{fip}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{F})$, czyli dowód będzie zakończony.

Na początku pokażemy, że $\mathcal{A} \cup \{f^{-1}[B]\}$ ma $\mathcal{J}^+$-FIP. Weźmy skończony zbiór $F \subseteq \mathcal{A}$. Niech $N \in \omega$. Skoro $\mathcal{G}$ przecina każdy zbiór gęsty z $\mathbb{D}$ niepusto, to istnieje $(H,n) \in \mathcal{G} \cap D_{F,N}$. W szczególności $H \subseteq A$ i $\varphi\left(\bigcap F \cap H\right) > N$. Z tego, że $A \subseteq f^{-1}[B]$, mamy $\varphi\left(\bigcap F \cap f^{-1}[B]\right) > N$. Ponieważ N było dowolne, otrzymujemy $\varphi\left(\bigcap F \cap f^{-1}[B]\right) = \infty$, więc $\bigcap F \cap f^{-1}[B] \notin \mathcal{J}$.

Na koniec pokażemy, że $B \in \mathcal{I}$. Jeżeli udowodnimy, że $A \cap C_k$ jest skończony dla każdego $k \in \omega$, wtedy $B \cap B_k$ będzie skończony dla każdego $k \in \omega$. Zatem $B \in \mathcal{I}$ (bo $\langle B_n \rangle_{n \in \omega}$ był świadkiem na to, że $\mathcal{I}$ nie jest słabym P-ideałem).

Bierzemy $k \in \omega$. Skoro $\mathcal{G}$ przecina każdy zbiór gęsty z $\mathbb{D}$ niepusto, to istnieje $(H,n) \in \mathcal{G} \cap E_k$. Twierdzimy, że $A \cap C_k \subseteq H$ (w szczególności $A \cap C_k$ jest skończony).

Bierzemy $a \in A \cap C_k$. Wtedy istnieje $(G,m) \in \mathcal{G}$ taki, że $a \in G$. Skoro $\mathcal{G}$ jest filtrem, to istnieje $(K,l) \in \mathcal{G}$ taki, że $(K,l) \leqslant (H,n)$ i $(K,l) \leqslant (G,m)$. Mamy dwa przypadki.

Przypadek 1. Załóżmy, że $m \leqslant k$. Z tego, że $(G, m) \in \mathbb{P}$ dostajemy

$$G \subseteq \bigcup_{i<m} C_i,$$

zatem $a \notin C_k$ (bo zbiory C_k tworzą partycję). Sprzeczność, więc ten przypadek jest niemożliwy.

Przypadek 2. Załóżmy, że $m > k$. Skoro $(K, l) \leqslant (H, n)$, to

$$(K \setminus H) \cap \bigcup_{i<n} C_i = \emptyset.$$

Wiedząc, że $(H, n) \in E_k$, otrzymujemy $n > k$. Zatem $(K \setminus H) \cap C_k = \emptyset$. Przypuśćmy, że $a \notin H$. Skoro $a \in G \subseteq K$, to $a \in K \setminus H$. Z tego, że $a \in C_k$, otrzymujemy $a \in (K \setminus H) \cap C_k$. Sprzeczność.

□

Następujący wniosek stanowi rozszerzenie [25, Theorem 3.1], gdzie autorka udowodniła, że zakładając $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$ istnieje P-punkt, który nie jest $\mathcal{J}$-ultrafiltrem dla każdego F_σ ideału $\mathcal{J}$.

Wniosek 3.30. Załóżmy, że $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$. Jeżeli ideał $\mathcal{J}$ może być rozszerzony do F_σ ideału (w szczególności, jeżeli $\mathcal{J}$ jest analitycznym P-ideałem z własnością FinBW) i $\mathcal{I}$ nie jest słabym P-ideałem, wtedy istnieje $\mathcal{I}$-ultrafiltr, który nie jest $\mathcal{J}$-punktem. W szczególności istnieje P-punkt, który nie jest $\mathcal{J}$-punktem.

Dowód. Niech $\mathcal{K}$ będzie F_σ ideałem takim, że $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{K}$. Z Twierdzeń 3.12 i 3.29, wiemy, że istnieje ultrafiltr $\mathcal{U}$ taki, że $\mathcal{I} \not\leqslant_K \mathcal{U}^*$ i $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{U}^*$. Wtedy $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{U}^*$, więc $\mathcal{U}$ nie jest $\mathcal{J}$-punktem. Pierwsza część „w szczególności” wynika z faktu, że każdy analityczny P-ideał z własnością FinBW może być rozszerzony do F_σ ideału (zobacz [21, Theorem 4.2]). Druga część „w szczególności” wynika z tego, że ideał Fin^2 nie jest słabym P-ideałem i Fin^2-ultrafiltry są tym samym co P-punkty (zobacz Twierdzenie 3.4(1.)).

□

Używając powyższego wniosku, widzimy, że istnieją P-punkty, które nie są $\mathcal{T}$-punktami (zauważmy, że ten konkretny przykład powyższego wniosku dla $\mathcal{T}$-ultrafiltru był wcześniej udowodniony w [25, Theorem 3.4]).

3.9. $\mathcal{I}$-ultrafiltry, które nie są P-punktami

W tym podrozdziale interesują nas takie ideały $\mathcal{I}$, dla których istnieje $\mathcal{I}$-ultrafiltr, który nie jest P-punktem. Okaże się, że takie ideały można scharakteryzować za pomocą porządku Katětova. Jednak zaczniemy ten rozdział od kilku warunków wystarczających na istnienie $\mathcal{I}$-ultrafiltru, który nie jest P-punktem. Wyniki z tego podrozdziału w połączeniu z wynikami z poprzedniego podrozdziału dadzą nam charakteryzację ideałów borelowskich $\mathcal{I}$, dla których pojęcia P-punktu i $\mathcal{I}$-ultrafiltru są tym samym.

Twierdzenie 3.31. Niech $\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$ i $\mathcal{I}$ będzie ideałem na ω. Jeżeli $\mathcal{I} \not\leqslant_{\mathcal{F}} \mathrm{Fin}^2$ i $\mathcal{I}$ jest gęstym ideałem (w szczególności, jeżeli $\mathcal{I}$ jest gęstym P-ideałem), wtedy

$$\max\{\mathrm{add}^*(\mathcal{I}), \omega_1\} \leqslant \mathfrak{fip}(\mathcal{I}, \mathrm{Fin}^2, \mathcal{F}).$$

Dowód. Teza wynika z Twierdzeń 3.8, 3.19 i Stwierdzenia 3.5. Część „w szczególności” dodatkowo wykorzystuje Stwierdzenie 3.3(5.).

□

Wniosek 3.32. Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem na ω. Załóżmy, że $\max\{\mathrm{add}^*(\mathcal{I}), \omega_1\} = \mathfrak{c}$.

1. Jeżeli $\mathcal{I} \not\leqslant_K \mathrm{Fin}^2$ ($\mathcal{I} \not\leqslant_{KB} \mathrm{Fin}^2$ lub $\mathcal{I} \not\leqslant_P \mathrm{Fin}^2$), wtedy istnieje $\mathcal{I}$-ultrafiltr (słaby $\mathcal{I}$-ultrafiltr lub $\mathcal{I}$-punkt), który nie jest P-punktem.
2. Jeżeli $\mathcal{I}$ jest gęstym P-ideałem, wtedy istnieje $\mathcal{I}$-ultrafiltr, który nie jest P-punktem.

Dowód. Zauważmy, że gdy ideał $\mathcal{I}$ nie jest gęsty, to $\mathcal{I} \leqslant_K \mathrm{Fin}^2$, więc teza wynika z Twierdzeń 3.31, 3.12 i 3.4(1.).

□

Następujący wynik charakteryzuje ideały $\mathcal{I}$, dla których istnieje $\mathcal{I}$-ultrafiltr, który nie jest P-punktem.

Twierdzenie 3.33. Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem na ω. Zakładając CH, następujące warunki są równoważne.

1. $\mathcal{I} \not\leqslant_K \mathrm{Fin}^2$ ($\mathcal{I} \not\leqslant_{KB} \mathrm{Fin}^2$ lub $\mathcal{I} \not\leqslant_P \mathrm{Fin}^2$).
2. Istnieje $\mathcal{I}$-ultrafiltr (słaby $\mathcal{I}$-ultrafiltr lub $\mathcal{I}$-punkt), który nie jest P-punktem.

Dowód. (1. $\implies$ 2.) Z Twierdzenia 3.8 wiemy, że $\mathfrak{p}(\mathrm{Fin}^2) = \mathfrak{c}$ zakładając CH. Zatem Wniosek 3.32 kończy dowód.

(2. $\implies$ 1.) Teza wynika z Twierdzenia 3.4(1.).

□

W tym momencie jesteśmy już gotowi scharakteryzować ideały borelowskie $\mathcal{I}$, dla których pojęcia P-punktu i $\mathcal{I}$-ultrafiltru są tym samym.

Twierdzenie 3.34. Załóżmy CH. Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem borelowskim. Następujące warunki są równoważne:

1. Pojęcia P-punktu i $\mathcal{I}$-ultrafiltru są tym samym (tzn. każdy P-punkt jest $\mathcal{I}$-ultrafiltrem i każdy $\mathcal{I}$-ultrafiltr jest P-punktem),
2. $\mathcal{I} \leqslant_K \mathrm{Fin}^2$ i $\mathcal{I}$ nie jest rozszerzalny do F_σ ideału.

Dowód. Przez [60, Theorem 3.2.7] borelowski ideał $\mathcal{I}$ może być rozszerzony do P^+-ideału wtedy i tylko wtedy, gdy może być rozszerzony do ideału typu F_σ. Zatem wystarczy zastosować Twierdzenia 3.26 i 3.33.

□

Kolejne dwa wnioski nie są nowe, jednak przedstawiamy je, aby pokazać, w jaki sposób można te wnioski wyprowadzić z naszych wyników. Pierwszy wniosek zakładając $MA_{przeliczalny}$ możemy znaleźć np. w pracy [47, Theorem 19.34].

Wniosek 3.35. Załóżmy, że zachodzi CH. Istnieje słaby $\mathcal{ED}_{\mathrm{Fin}}$-ultrafiltr, który nie jest P-punktem (istnieje Q-punkt, który nie jest P-punktem).

Dowód. Teza wynika z Twierdzeń 3.33, 3.4(2.) i Stwierdzenia 3.3(1.).

□

Wniosek 3.36 ([33, Proposition 2.1.14])**.** Załóżmy, że zachodzi CH. Jeżeli $\mathcal{I}$ jest gęstym P-ideałem, wtedy istnieje $\mathcal{I}$-ultrafiltr, który nie jest P-punktem.

Dowód. Teza wynika z Twierdzenia 3.33 i Stwierdzenia 3.3(5.).

□

W [25, Theorem 3.2] Flašková wzmocniła Wniosek 3.36 zamieniając założenie o CH na $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$. Jednak sposób udowodnienia jej silniejszego wyniku różni się od dowodów, które próbowaliśmy uchwycić we współczynniku kardynalnym $\mathfrak{fip}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{F})$. Poniższe pytanie może działać jako test, czy liczba kardynalna $\mathfrak{fip}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{F})$ może objąć więcej przypadków, niż to do czego została przygotowana.

Problem 3.37. Czy $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$ implikuje $\mathfrak{fip}(\mathcal{I}, \mathrm{Fin}^2, \omega^\omega) = \mathfrak{c}$ dla każdego gęstego P-ideału?

Z drugiej strony nasze wyniki dostarczają innego wniosku, który nie wynika z powyższego wniosku Flaškovej, bo jest niesprzeczne, że $\mathrm{add}^*(\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}) = \mathfrak{c} > \omega_1$ ([38, Theorem 2.2]).

Wniosek 3.38. Jeżeli $\mathcal{I}$ jest gęstym P-ideałem i $\mathrm{add}^*(\mathcal{I}) = \mathfrak{c}$, wtedy istnieje $\mathcal{I}$-ultrafiltr, który nie jest P-punktem.

Dowód. Teza wynika z Wniosku 3.32 i Stwierdzenia 3.3(5.).

□

3.10. Q-punkty i $\mathcal{I}$-ultrafiltry

Ten podrozdział jest odpowiednikiem poprzednich dwóch podrozdziałów - zamiast P-punktów badamy Q-punkty.

W przypadku scharakteryzowania ideałów $\mathcal{I}$ takich, że istnieje $\mathcal{I}$-ultrafiltr, który nie jest Q-punktem, ponownie okaże się, że porządek Katětova jest właściwym narzędziem. Zaczynamy od warunków wystarczających na istnienie $\mathcal{I}$-ultrafiltru, który nie jest Q-punktem.

Twierdzenie 3.39. Niech $\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$ i $\mathcal{I}$ będzie ideałem na ω. Jeżeli $\mathcal{I} \not\leqslant_{\mathcal{F}} \mathcal{ED}_{\mathrm{Fin}}$ i $\mathcal{I}$ jest gęstym ideałem (w szczególności, jeżeli $\mathcal{I}$ jest gęstym P-ideałem), wtedy

$$\max\{\mathrm{add}^*(\mathcal{I}), \mathfrak{p}(\mathcal{ED}_{\mathrm{Fin}})\} \leqslant \mathfrak{fip}(\mathcal{I}, \mathcal{ED}_{\mathrm{Fin}}, \mathcal{F}).$$

Dowód. Teza wynika z Twierdzenia 3.19(1.) i Stwierdzenia 3.5. Część „w szczególności” dodatkowo wykorzystuje Stwierdzenie 3.3(6.).

□

Wniosek 3.40. Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem na ω. Załóżmy, że $\max\{\mathrm{add}^*(\mathcal{I}), \mathfrak{p}(\mathcal{ED}_{\mathrm{Fin}})\} = \mathfrak{c}$.

1. Jeżeli $\mathcal{I} \not\leqslant_K \mathcal{ED}_{\mathrm{Fin}}$ ($\mathcal{I} \not\leqslant_{KB} \mathcal{ED}_{\mathrm{Fin}}$ lub $\mathcal{I} \not\leqslant_P \mathcal{ED}_{\mathrm{Fin}}$), wtedy istnieje $\mathcal{I}$-ultrafiltr (słaby $\mathcal{I}$-ultrafiltr lub $\mathcal{I}$-punkt), który nie jest Q-punktem.
2. Jeżeli $\mathcal{I}$ jest gęstym P-ideałem, wtedy istnieje $\mathcal{I}$-ultrafiltr, który nie jest Q-punktem.

Dowód. Zauważmy, że gdy ideał $\mathcal{I}$ nie jest gęsty, to $\mathcal{I} \leqslant_K \mathcal{ED}_{\mathrm{Fin}}$, więc teza wynika z Twierdzeń 3.39, 3.12 i 3.4(2.).

□

Kolejny wynik charakteryzuje za pomocą porządku Katětova ideały $\mathcal{I}$, dla których istnieje $\mathcal{I}$-ultrafiltr, który nie jest Q-punktem.

Twierdzenie 3.41. Zakładamy, że $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$. Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem na ω. Wtedy następujące warunki są równoważne:

1. $\mathcal{I} \not\leqslant_K \mathcal{ED}_{\mathrm{Fin}}$ ($\mathcal{I} \not\leqslant_{KB} \mathcal{ED}_{\mathrm{Fin}}$ lub $\mathcal{I} \not\leqslant_P \mathcal{ED}_{\mathrm{Fin}}$).
2. Istnieje $\mathcal{I}$-ultrafiltr (słaby $\mathcal{I}$-ultrafiltr lub $\mathcal{I}$-punkt), który nie jest Q-punktem.

Dowód. (1. $\implies$ 2.) Skoro ideał $\mathcal{ED}_{\mathrm{Fin}}$ jest F_σ ideałem, to z Twierdzenia 3.10 otrzymujemy $\mathfrak{p}(\mathcal{ED}_{\mathrm{Fin}}) \geqslant \mathfrak{p}$. Wtedy Wniosek 3.40 kończy dowód.

(2. $\implies$ 1.) Teza wynika z Twierdzenia 3.4(2.).

□

Wniosek 3.42. Załóżmy, że $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$. Wtedy istnieje Fin^2-ultrafiltr, który nie jest Q-punktem (istnieje P-punkt, który nie jest Q-punktem).

Dowód. Teza wynika z Twierdzeń 3.41, 3.4(1.) i Stwierdzenia 3.3(3.), ponieważ $\mathcal{ED}_{\mathrm{Fin}}$ jest F_σ ideałem, więc jest P$^+$-ideałem przez Stwierdzenie 3.6(1.).

□

Teraz przejdziemy do zagadnienia dotyczącego istnienia Q-punktów niebędących $\mathcal{I}$ -ultrafiltrami.

Twierdzenie 3.43. Niech $\mathcal{J}$ będzie P$^+(\mathcal{J})$-ideałem, który jest $\leqslant_{KB}$-jednorodny.

1. Załóżmy, że zachodzi CH. Następujące warunki są równoważne:

   a) $\mathcal{ED}_{\mathrm{Fin}} \not\leqslant_{KB} \mathcal{J}$.

   b) Istnieje Q-punkt, który nie jest $\mathcal{J}$-punktem.

   c) Istnieje Q-punkt, który nie jest słabym $\mathcal{J}$-ultrafiltrem.

2. Jeżeli $\mathcal{J}$ jest F_σ ideałem, wtedy założenie o CH może zostać zastąpione założeniem $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$.

Dowód. Teza wynika z Twierdzeń 3.21 i 3.4(2.).

□

Q-punkty nie mogą zostać scharakteryzowane jako $\mathcal{J}$-ultrafiltry dla żadnego ideału $\mathcal{J}$ - do uzyskania Q-punktu, który nie jest $\mathcal{J}$-ultrafiltrem nie trzeba niczego zakładać o ideale $\mathcal{J}$ jak pokazuje następujący wynik Flaškovej.

Stwierdzenie 3.44 ([33, Proposition 2.4.7])**.** Załóżmy, że $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$. Dla każdego ideału $\mathcal{J}$ istnieje Q-punkt, który nie jest $\mathcal{J}$-ultrafiltrem.

Na koniec tego podrozdziału pokażemy, że przy założeniu $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$ istnieje $\mathcal{D}_{fin}$-ultrafiltr, który nie jest Q-punktem (Twierdzenie 3.49). Zatem istnieje $\mathcal{D}_{fin}$-ultrafiltr, który nie jest $\mathcal{T}$-ultrafiltrem ($\mathcal{ED}_{fin}$-ultrafiltrem), co wynika z [33, Proposition 2.4.1] (i dodatkowo z przypisu w pracy [11, str. 210]). Dzięki temu wykorzystując [33, Corollary 2.1.9] otrzymujemy $\mathcal{D}_{fin} \not\leqslant_K \mathcal{T}$ ($\mathcal{D}_{fin} \not\leqslant_K \mathcal{ED}_{fin}$). Do pokazania, że istnieje $\mathcal{D}_{fin}$-ultrafiltr, który nie jest Q-punktem wykorzystamy stwierdzenia i lemat, które podajemy poniżej.

Stwierdzenie 3.45. Jeśli $\mathcal{B}$ jest bazą filtra oraz $G \subseteq \omega$ jest takim zbiorem, że $G \cap F \neq \emptyset$ dla każdego $F \in \mathcal{B}$, to rodzina $\mathcal{B}(G) = \mathcal{B} \cup \{F \cap G : F \in \mathcal{B}\}$ jest bazą filtra, którą będziemy nazywać bazą filtra utworzoną przez $\mathcal{B}$ i G.

Dowód. Zauważmy, że $\emptyset \notin \mathcal{B}(G)$ i $\mathcal{B}(G)$ zawiera wszystkie zbiory koskończone. Niech $F_1, F_2 \in \mathcal{B}(G)$. Jeżeli $F_1, F_2 \in \{F \cap G : F \in \mathcal{B}\}$, to $F_1 = F_1' \cap G$, $F_2 = F_2' \cap G$, gdzie $F_1', F_2' \in \mathcal{B}$ oraz $F_1 \cap F_2 = F_1' \cap G \cap F_2' \cap G = F_1' \cap F_2' \cap G$. Wtedy istnieje $F_3' \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}(G)$ taki, że $F_3' \subseteq F_1' \cap F_2'$. Zatem $F_3' \cap G \subseteq F_1' \cap F_2' \cap G = F_1 \cap F_2$. Czyli istnieje $F_3 = F_3' \cap G \in \mathcal{B}(G)$ taki, że $F_3 \subseteq F_1 \cap F_2$. Analogicznie w pozostałych przypadkach.

□

Definicja 3.46. Rodzina $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ ma własność (JF), gdy

$$\underset{A \in \mathcal{A}}{\forall}\ \underset{k \in \omega}{\forall}\ \underset{n \in \omega}{\exists} |A \cap \{2^n - 1, 2^n, \ldots, 2^{n+1} - 2\}| \geqslant k.$$

Stwierdzenie 3.47. Załóżmy, że zachodzi $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$ i $\mathcal{B}$ jest bazą filtra, która jest mocy mniejszej niż $\mathfrak{c}$ i ma własność (JF). Niech $f : \omega \to \omega$. Wtedy istnieje $G \in [\omega]^\omega$ taki, że $f[G] \in \mathcal{D}_{fin}$ oraz baza filtra $\mathcal{B}(G)$ utworzona przez $\mathcal{B}$ i G ma własność (JF).

Dowód. Niech $f : \omega \to \omega$. Jeżeli istnieje $F \in \mathcal{B}$ taki, że $f[F] \in \mathcal{D}_{fin}$, wtedy niech $G = F$ i teza jest prawdziwa. Zakładamy, że dla każdego $F \in \mathcal{B}$ dostajemy $f[F] \notin \mathcal{D}_{fin}$. Jeżeli istnieje $K \in [\omega]^{<\omega}$ taki, że $F \cap f^{-1}[K] \neq \emptyset$ dla każdego $F \in \mathcal{B}$ oraz baza filtra utworzona przez $\mathcal{B}$ i $f^{-1}[K]$ ma własność (JF) (co implikuje, że $f^{-1}[K]$ jest nieskończony), to bierzemy $G = f^{-1}[K]$. W dalszej części będziemy zakładać, że takie K nie istnieje. Z tego założenia wynika, że dla każdego $K \in [\omega]^{<\omega}$ istnieją $F_K \in \mathcal{B}$ i $m_K \in \omega$ takie, że dla każdego $n \in \omega$ otrzymujemy

$$|f^{-1}[K] \cap F_K \cap \{2^n - 1, 2^n, \ldots, 2^{n+1} - 2\}| < m_K.$$

Zatem dla każdego $K \in [\omega]^{<\omega}$ istnieje $F_K \in \mathcal{B}$ taki, że dla każdych $F \in \mathcal{B}$ i $k \in \omega$ istnieje $n \in \omega$ takie, że

$$|(F \setminus (f^{-1}[K] \cap F_K)) \cap \{2^n - 1, 2^n, \ldots, 2^{n+1} - 2\}| \geqslant k.$$

Konstruujemy żądany zbiór G, wykorzystując $MA_{przeliczalny}$.

Powiemy, że zbiór $A \subseteq \omega$ ma własność (KK), gdy

$$\underset{a,b,c \in \omega}{\forall} (a < b < c \Longrightarrow (b - a \notin A \vee c - a \notin A \vee c - b \notin A)).$$

Rozważmy zbiór

$$\mathbb{P} = \left\{K \in [\omega]^{<\omega} : f[K] \text{ ma własność (KK)}\right\},$$

wyposażony w częściowy porządek $\leqslant_P$ zdefiniowany w następujący sposób:

$$K \leqslant_P L \Longleftrightarrow (K = L \vee (K \supseteq L \wedge \min(K \setminus L) > \max L)).$$

Zauważmy, że $(\mathbb{P}, \leqslant_P)$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym i $\mathbb{P}$ jest zbiorem przeliczalnym. Dla $F \in \mathcal{B}$ i $k \in \omega$ definiujemy zbiory

$$D_{F,k} = \left\{K \in \mathbb{P} : \underset{n \in \omega}{\exists} |F \cap K \cap \{2^n - 1, 2^n, \dots, 2^{n+1} - 2\}| \geqslant k\right\}.$$

Pokażemy, że zbiory $D_{F,k}$ są gęstymi podzbiorami $(\mathbb{P}, \leqslant_P)$ dla każdych $F \in \mathcal{B}$ i $k \in \omega$.

Niech $L \in \mathbb{P}$ będzie dowolnym zbiorem. Chcemy znaleźć $K \in D_{F,k}$ taki, że $K \leqslant_P L$. Niech $n_0 = \max\{n \in \omega : L \cap \{2^n - 1, 2^n, \dots, 2^{n+1} - 2\} \neq \emptyset\}$.

Przypadek 1. Zakładamy, że

$$\sup_{n \in \omega} |f[F \cap \{2^n - 1, 2^n, \dots, 2^{n+1} - 2\}]| = m < \infty.$$

Dla $N = \{i \in \omega : i \leqslant 3 \max f[L]\}$ istnieje $n(N) > n_0$ taki, że

$$|(F \setminus (f^{-1}[N] \cap F_N)) \cap \{2^{n(N)} - 1, 2^{n(N)}, \dots, 2^{n(N)+1} - 2\}| \geqslant k(m+1).$$

Zgodnie z założeniem przypadku 1. otrzymujemy

$$|f[F \cap \{2^{n(N)} - 1, 2^{n(N)}, \dots, 2^{n(N)+1} - 2\}]| \leqslant m.$$

Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że istnieje

$$l \in f[F \cap \{2^{n(N)} - 1, 2^{n(N)}, \dots, 2^{n(N)+1} - 2\}]$$

i

$$L' \subseteq (F \setminus (f^{-1}[N] \cap F_N)) \cap \{2^{n(N)} - 1, 2^{n(N)}, \dots, 2^{n(N)+1} - 2\}$$

taki, że $|L'| \geqslant k$, $f[L'] = \{l\}$ i $l > 3 \max f[L]$. Bierzemy $K = L \cup L'$. Pozostaje sprawdzić, że K jest zbiorem spełniającym wszystkie wymagane warunki:

- Zauważmy, że $K \in \mathbb{P}$. Przypuśćmy, że $K \notin \mathbb{P}$. Niech $c > b > a$ i $a, b, c \in \omega$. Wtedy $c - a = l$ lub $c - b = l$ lub $b - a = l$ (inaczej wszystkie te trzy liczby należałyby do $f[L]$, co jest sprzeczne z założeniem $L \in \mathbb{P}$). Ponieważ $c - a > c - b$, $c - a > b - a$ i $l > 3 \max f[L]$, to $c - a = l$. Wówczas $b - a, c - b \in f[L]$ i otrzymujemy $l = c - a = (c - b) + (b - a) \leqslant \max f[L] + \max f[L] = 2 \max f[L]$. Sprzeczność, ponieważ $l > 3 \max f[L]$.
- $K \in D_{F,k}$, ponieważ

$$|F \cap K \cap \{2^{n(N)} - 1, 2^{n(N)}, \dots, 2^{n(N)+1} - 2\}| \geqslant$$
$$|L' \cap K \cap \{2^{n(N)} - 1, 2^{n(N)}, \dots, 2^{n(N)+1} - 2\}| \geqslant k.$$

- Zauważmy, że $K \leqslant_P L$, gdyż $n(N) > n_0$ i w konsekwencji

$$\min(K \setminus L) = \min L' > \max L.$$

Przypadek 2. Zakładamy, że

$$\sup_{n \in \omega} |f[F \cap \{2^n - 1, 2^n, \dots, 2^{n+1} - 2\}]| = \infty.$$

Wtedy istnieje $n_1 > n_0$ taki, że

$$|f[F \cap \{2^{n_1} - 1, 2^{n_1}, \dots, 2^{n_1+1} - 2\}]| \geqslant 3 \max f[L] + 2(|L| + k)^2.$$

Niech

$$A_0 = \{m \in f[F \cap \{2^{n_1} - 1, 2^{n_1}, \dots, 2^{n_1+1} - 2\}] : m > 3 \max f[L]\}.$$

Wtedy $|A_0| \geqslant 2(|L| + k)^2$. Wybieramy $l_i \in A_0$ dla $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ tak, że $f[L] \cup \{l_i : i < k\}$ ma własność (KK). To może być zrobione przez indukcję na i w następujący sposób.

Dla $i = 0$ niech $l_0 = \min A_0$. Niech $B_1 = f[L] \cup \{l_0\}$, $c > b > a$ i $a, b, c \in \omega$. Gdyby $c - a, c - b, b - a \in B_1$, to $c - a = l_0$ i $c - b, b - a \in f[L]$ (bo $c - a > c - b$, $c - a > b - a$ oraz $l_0 > 3 \max f[L]$), więc otrzymalibyśmy $l_0 = c - a = (c - b) + (b - a) \leqslant \max f[L] + \max f[L] = 2 \max f[L]$. Sprzeczność, ponieważ $l_0 > 3 \max f[L]$.

Jeżeli $0 < i \leqslant k - 1$ i $l_j \in A_0$ dla $j < i$ zostały utworzone tak, że $B_i = f[L] \cup \{l_j : j < i\}$ ma własność (KK), to definiujemy

$$A_i = \left\{ m \in A_0 : \underset{a,b,c \in \omega}{\exists} \ \underset{d,e \in B_i}{\exists} (a < b < c \wedge d = b - a \wedge e = c - b \wedge m = c - a) \right\}.$$

Skoro $|B_i| \leqslant |L| + i$, to zbiór A_i ma co najwyżej $\frac{1}{2}(|L| + i)(|L| + i - 1)$ elementów (elementy d, e ze zbioru B_i możemy wybrać na co najwyżej $\binom{|L|+i}{2}$ sposobów, wtedy do każdych tak wybranych d i e możemy na jeden sposób dobrać element m). Zatem $A_0 \setminus A_i \neq \emptyset$ i możemy zdefiniować $l_i = \min((A_0 \setminus A_i) \setminus \{l_0, \dots, l_{i-1}\})$. Z konstrukcji wynika, że $B_{i+1} = B_i \cup \{l_i\}$ ma własność (KK) oraz $l_i > l_{i-1}$.

Niech

$$L' = F \cap \{2^{n_1} - 1, 2^{n_1}, \dots, 2^{n_1+1} - 2\} \cap f^{-1}[\{l_i : i < k\}]$$

i bierzemy $K = L \cup L'$. Pozostaje sprawdzić, że K jest zbiorem spełniającym wszystkie wymagane warunki:

- Zauważmy, że $K \in \mathbb{P}$, ponieważ $f[K] \subseteq f[L] \cup \{l_i : i < k\}$ i zbiór $f[L] \cup \{l_i : i < k\}$ ma własność (KK).
- $K \in D_{F,k}$, ponieważ

$$|F \cap K \cap \{2^{n_1} - 1, 2^{n_1}, \dots, 2^{n_1+1} - 2\}| \geqslant |L'| \geqslant k.$$

- Zauważmy, że $K \leqslant_P L$, ponieważ $n_1 > n_0$ i w konsekwencji

$$\min(K \setminus L) = \min L' > \max L.$$

Skoro rodzina $\mathbb{D} = \{D_{F,k} : F \in \mathcal{B},\, k \in \omega\}$ składa się z gęstych podzbiorów przeliczalnego zbioru częściowo uporządkowanego $\mathbb{P}$ i $|\mathbb{D}| < \mathfrak{c}$, to wynika z aksjomatu Martina dla przeliczalnego zbioru częściowo uporządkowanego, że istnieje filtr $\mathcal{G}$ taki, że $\mathcal{G} \cap D_{F,k} \neq \emptyset$ dla wszystkich $F \in \mathcal{B}$, $k \in \omega$.

Niech $G = \bigcup\{K \in \mathbb{P} : K \in \mathcal{G}\}$. Pozostaje sprawdzić, że G jest zbiorem spełniającym wszystkie wymagane warunki, to znaczy:

a) $f[G]$ ma własność (KK), w szczególności $f[G] \in \mathcal{D}_{fin}$,

b) $\mathcal{B}(G)$ ma własność (JF):

$$\underset{F \in \mathcal{B}}{\forall} \ \underset{k \in \omega}{\forall} \ \underset{n \in \omega}{\exists} |F \cap G \cap \{2^n - 1, 2^n, \dots, 2^{n+1} - 2\}| \geqslant k$$

(w szczególności zbiór G jest nieskończony i $G \cap F \neq \emptyset$ dla każdego $F \in \mathcal{B}$).

Uzasadnienie dla podpunktu a).

Rozważmy dowolne $e, g, h \in f[G]$. Wtedy istnieją $K_e, K_g, K_h \in \mathcal{G}$ takie, że $e \in f[K_e]$, $g \in f[K_g]$, $h \in f[K_h]$. Skoro $\mathcal{G}$ jest filtrem, to istnieje $K_0 \in \mathcal{G}$, który jest poniżej wszystkich trzech zbiorów K_e, K_g, K_h w porządku $\leqslant_P$. Zatem $e, g, h \in f[K_0]$. Ponieważ K_0 jest elementem z $\mathbb{P}$, to zbiór $f[K_0]$ ma własność (KK). W szczególności zbiór $\{e, g, h\}$ ma własność (KK). Z dowolności elementów $e, g, h \in f[G]$ wynika, że $f[G]$ ma własność (KK).

Uzasadnienie dla podpunktu b).

Bierzemy $F \in \mathcal{B}$ i $k \in \omega$. Dla każdego $K \in \mathcal{G} \cap D_{F,k}$ mamy $G \supseteq K$ i

$$|F \cap G \cap \{2^n - 1, 2^n, \dots, 2^{n+1} - 2\}| \geqslant |F \cap K \cap \{2^n - 1, 2^n, \dots, 2^{n+1} - 2\}| \geqslant k$$

dla jakiegoś $n \in \omega$.

□

Lemat 3.48. Każda baza filtra $\mathcal{B}$, która ma własność (JF) może być rozszerzona do ultrafiltru, który nie jest Q-punktem.

Dowód. Rodzina $\{\{2^n - 1, 2^n, \dots, 2^{n+1} - 2\} : n \in \omega\}$ jest partycją ω na skończone zbiory świadczącą o fakcie, że ultrafiltr z własnością (JF) nie jest Q-punktem. Niech $P(\omega) = \{A_{\alpha+1} : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Pokażemy, że każda baza filtra $\mathcal{B}$ z własnością (JF) może być rozszerzona do ultrafiltru z własnością (JF). Przez indukcję pozaskończoną na $\alpha < \mathfrak{c}$ skonstruujemy bazy filtra $\mathcal{B}_\alpha$ tak, że poniższe warunki będą spełnione:

1. $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$,
2. $\mathcal{B}_\alpha \subseteq \mathcal{B}_\beta$, gdy $\alpha \leqslant \beta$,
3. $\mathcal{B}_{\alpha+1}$ jest bazą filtra utworzoną przez $\mathcal{B}_\alpha$ i $A_{\alpha+1}$ lub $\mathcal{B}_\alpha$ i $\omega \setminus A_{\alpha+1}$ dla każdej $\alpha < \mathfrak{c}$,
4. dla granicznej liczby γ mamy
$$\mathcal{B}_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} \mathcal{B}_\alpha,$$
5. $\mathcal{B}_\alpha$ posiada własność (JF) dla każdej $\alpha < \mathfrak{c}$.

Warunek 1. rozpoczyna indukcję, a warunek 4. pozwala na kontynuację indukcji na krokach granicznych (jeżeli bazy mają własność (JF), to ich suma również ma własność (JF)), więc pozostaje pokazać, że etapy następnikowe także zachodzą.

Krok następnikowy. Niech $\alpha = \beta + 1$ i załóżmy, że mamy skonstruowane $\mathcal{B}_\gamma$ dla $\gamma \leqslant \beta$. Jeżeli

$$\forall_{F \in \mathcal{B}_\alpha} \forall_{k \in \omega} \exists_{n \in \omega} |F \cap A_{\beta+1} \cap \{2^n - 1, 2^n, \dots, 2^{n+1} - 2\}| \geqslant k,$$

to baza filtra $\mathcal{B}_\alpha$ utworzona przez $\mathcal{B}_\beta$ oraz zbiór $A_{\beta+1}$ posiada własność (JF).

Załóżmy, że

$$\exists_{F_0 \in \mathcal{B}_\alpha} \exists_{k_0 \in \omega} \forall_{n \in \omega} |F_0 \cap A_{\beta+1} \cap \{2^n - 1, 2^n, \dots, 2^{n+1} - 2\}| \leqslant k_0.$$

Wtedy skoro $\mathcal{B}_\beta$ ma własność (JF), to dla każdych $F \in \mathcal{B}_\beta$ i $k \in \omega$ istnieje $n_0 \in \omega$ taki, że

$$|F \cap F_0 \cap \{2^{n_0} - 1, 2^{n_0}, \dots, 2^{n_0+1} - 2\}| \geqslant k + k_0.$$

Ponieważ

$$|F \cap F_0 \cap A_{\beta+1} \cap \{2^{n_0} - 1, 2^{n_0}, \dots, 2^{n_0+1} - 2\}| \leqslant k_0,$$

więc

$$|F \cap (\omega \setminus A_{\beta+1}) \cap \{2^{n_0}-1, 2^{n_0}, \dots, 2^{n_0+1}-2\}| \geqslant$$

$$|F \cap F_0 \cap (\omega \setminus A_{\beta+1}) \cap \{2^{n_0}-1, 2^{n_0}, \dots, 2^{n_0+1}-2\}| \geqslant k.$$

Zatem baza filtra $\mathcal{B}_\alpha$ utworzona przez $\mathcal{B}_\beta$ oraz zbiór $\omega \setminus A_{\beta+1}$ posiada własność (JF).

To kończy konstrukcję indukcyjną rodziny $\{\mathcal{B}_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$.

Wtedy

$$\mathcal{U} = \bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} \mathcal{B}_\alpha$$

jest ultrafiltrem zawierającym $\mathcal{B}$, który nie jest Q-punktem.

□

Twierdzenie 3.49. Załóżmy, że zachodzi $\operatorname{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$. Wtedy istnieje $\mathcal{D}_{fin}$-ultrafiltr, który nie jest Q-punktem.

Dowód. Ponumerujmy wszystkie funkcje $f : \omega \to \omega$ w następujący sposób $\{f_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Przez indukcję pozaskończoną na $\alpha < \mathfrak{c}$ skonstruujemy bazy filtra $\mathcal{B}_\alpha$ tak, że poniższe warunki będą spełnione:

1. $\mathcal{B}_0$ jest filtrem Frécheta,
2. $\mathcal{B}_\alpha \subseteq \mathcal{B}_\beta$, gdy $\alpha \leqslant \beta$,
3. dla granicznej liczby γ mamy
$$\mathcal{B}_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} \mathcal{B}_\alpha,$$
4. $|\mathcal{B}_\alpha| \leqslant (|\alpha|+1)\omega$ dla każdej $\alpha < \mathfrak{c}$,
5. $\mathcal{B}_\alpha$ posiada własność (JF) dla każdej $\alpha < \mathfrak{c}$,
6.
$$\forall_{\alpha<\mathfrak{c}} \exists_{F \in \mathcal{B}_{\alpha+1}} f_\alpha[F] \in \mathcal{D}_{fin}.$$

Warunek 1. rozpoczyna indukcję, a warunek 3. pozwala na kontynuację indukcji na krokach granicznych (jeżeli bazy mają własność (JF), to ich suma również ma własność (JF)), więc pozostaje pokazać, że etapy następnikowe także zachodzą.

Krok następnikowy. Załóżmy, że mamy skonstruowane $\mathcal{B}_\beta$ dla $\beta < \alpha + 1$. Stosujemy Stwierdzenie 3.47 do bazy filtra $\mathcal{B}_\alpha$ i f_α. Dostajemy zbiór $G \in [\omega]^\omega$ taki, że $f[G] \in \mathcal{D}_{fin}$ oraz baza filtra utworzona przez $\mathcal{B}_\alpha$ i G ma własność (JF). Niech $\mathcal{B}_{\alpha+1}$ będzie bazą filtra utworzoną przez $\mathcal{B}_\alpha$ i G.

To kończy konstrukcję indukcyjną rodziny $\{\mathcal{B}_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$.

Definiujemy

$$\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} \mathcal{B}_\alpha.$$

Wtedy $\mathcal{B}$ jest bazą filtra mającą własność (JF), więc może być rozszerzona do ultrafiltru, który nie jest Q-punktem według Lematu 3.48. Zatem istnieje $\mathcal{D}_{fin}$-ultrafiltr, który nie jest Q-punktem, ponieważ każdy ultrafiltr, który rozszerza $\mathcal{B}$ z warunku 6. jest $\mathcal{D}_{fin}$-ultrafiltrem.

□

3.11. Selektywne ultrafiltry i $\mathcal{I}$-ultrafiltry

W tym podrozdziale zajmiemy się selektywnymi ultrafiltrami i ich związkiem z $\mathcal{I}$-ultrafiltrami.

Stwierdzenie 3.50. Niech $\mathcal{J}$ będzie P$^+(\mathcal{J})$-ideałem, który jest $\leqslant_K$-jednorodny.

1. Załóżmy, że zachodzi CH. Następujące warunki są równoważne:

   a) $\mathcal{ED} \nleqslant_K \mathcal{J}$.

   b) Istnieje selektywny ultrafiltr, który nie jest $\mathcal{J}$-punktem.

   c) Istnieje selektywny ultrafiltr, który nie jest słabym $\mathcal{J}$-ultrafiltrem.

   d) Istnieje selektywny ultrafiltr, który nie jest $\mathcal{J}$-ultrafiltrem.

2. Jeżeli $\mathcal{J}$ jest F_σ ideałem, wtedy założenie o CH może zostać zastąpione założeniem $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$.

Dowód. Teza wynika z Twierdzeń 3.21 i 3.4(3.).

□

W Twierdzeniu 3.52 pokażemy, że założenia ze Stwierdzenia 3.50 o ideale $\mathcal{J}$ mogą zostać usunięte, jeżeli zamienimy porządek Katětova na własność, że $\mathcal{J}$ może zostać rozszerzony do selektywnego ideału.

Lemat 3.51. Niech $\mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$ będą ideałami na ω.

1. Jeżeli $\mathcal{I} \leqslant_K \mathcal{J}$ i $\mathcal{J}$ jest selektywnym ideałem, wtedy $\mathcal{I}$ można rozszerzyć do selektywnego ideału.
2. Jeżeli $\mathcal{J}$ jest selektywnym ideałem i $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ jest przeliczalną rodziną taką, że $\omega \notin \mathcal{J}(\mathcal{A})$, wtedy $\mathcal{J}(\mathcal{A})$ jest selektywnym ideałem.
3. Jeżeli $\mathcal{J}$ nie jest selektywnym ideałem, wtedy istnieje przeliczalna rodzina $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ taka, że $\omega \notin \mathcal{J}(\mathcal{A})$ i $\mathcal{ED} \leqslant_K \mathcal{J}(\mathcal{A})$.

Dowód. 1. Niech $f : \omega \to \omega$ będzie taka, że $f^{-1}[B] \in \mathcal{J}$ dla każdego $B \in \mathcal{I}$. Definiujemy $\mathcal{K} = \{B : f^{-1}[B] \in \mathcal{J}\}$. Zauważmy, że $\mathcal{K}$ jest ideałem i $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{K}$. Pokażemy, że $\mathcal{K}$ jest selektywnym ideałem. Niech $\{B_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{K}^+$ i $\langle B_n \rangle_{n\in\omega}$ będzie malejącym ciągiem zbiorów. Wtedy $f^{-1}[B_n] \in \mathcal{J}^+$ i $f^{-1}[B_n] \supseteq f^{-1}[B_{n+1}]$ dla każdego $n \in \omega$. Skoro $\mathcal{J}$ jest selektywnym ideałem, to istnieje zbiór $A \in \mathcal{J}^+$ taki, że $|A \cap (f^{-1}[B_n] \setminus f^{-1}[B_{n+1}])| \leqslant 1$ dla każdego $n \in \omega$. Otrzymujemy $B = f[A] \in \mathcal{K}^+$ (bo $\mathcal{J}^+ \ni A \subseteq f^{-1}[f[A]] = f^{-1}[B]$) i $|B \cap (B_n \setminus B_{n+1})| \leqslant 1$ dla każdego $n \in \omega$.

2. Niech $\mathcal{A} = \{A_n : n \in \omega\}$ będzie taka, że $\omega \notin \mathcal{J}(\mathcal{A})$. Bierzemy malejący ciąg zbiorów $B_n \in \mathcal{J}(\mathcal{A})^+$. Niech $C_0 = \omega$ i

$$C_{n+1} = B_n \setminus \bigcup_{i<n} A_i.$$

Wtedy $C_n \in \mathcal{J}(\mathcal{A})^+$ i $C_n \supseteq C_{n+1}$ dla każdego $n \in \omega$. Skoro $C_n \in \mathcal{J}^+$ i $\mathcal{J}$ jest selektywnym ideałem, to istnieje $C' \in \mathcal{J}^+$ taki, że $|C' \cap (C_n \setminus C_{n+1})| \leqslant 1$ dla każdego $n \in \omega$. Definiujemy $C = C' \cap C_1$. Wtedy $C \in \mathcal{J}^+$, gdyż $|C' \setminus C| = |C' \cap (C_0 \setminus C_1)| \leqslant 1$ (bo $C' = (C' \setminus C) \cup C$ i $C' \notin \mathcal{J}$). Zauważmy, że $C \setminus B_{n+1}$ jest skończony dla każdego $n \in \omega$, ponieważ

$$C \setminus B_{n+1} \subseteq C \cap (C_0 \setminus C_{n+1}) \subseteq C \setminus C_{n+1} \subseteq C' \cap (C_0 \setminus C_{n+1}),$$

więc ma co najwyżej n elementów. Definiujemy zbiory: $E_0 = \omega$ i $E_{n+1} = C \cap B_n$ (czyli $E_1 = C \cap B_0 = C$, bo $C \subseteq C_1 = B_0$). Wtedy $E_{n+1} \subseteq E_n$ (bo $B_{n+1} \subseteq B_n$) oraz $E_{n+1} \in \mathcal{J}^+$ (gdyż $C = (C \cap B_n) \cup (C \setminus B_n)$, a $C \in \mathcal{J}^+$ i $C \setminus B_n \in \mathrm{Fin}$).

Skoro ideał $\mathcal{J}$ jest selektywny, to istnieje $B' \in \mathcal{J}^+$ taki, że $|B' \cap (E_n \setminus E_{n+1})| \leqslant 1$ dla każdego $n \in \omega$. Niech $B = B' \cap C$. Wtedy $B \in \mathcal{J}^+$ (bo $B' = B \cup (B' \setminus B)$ oraz $|B' \setminus B| = |B' \setminus (B' \cap C)| = |B' \setminus C| = |B' \setminus (C \cap B_0)| = |B' \setminus E_1| = |B' \cap (E_0 \setminus E_1)| \leqslant 1$). Ponadto,

$$B \cap (B_n \setminus B_{n+1}) = (B' \cap C) \cap (B_n \setminus B_{n+1}) \subseteq B' \cap (E_{n+1} \setminus E_{n+2}),$$

więc $|B \cap (B_n \setminus B_{n+1})| \leqslant 1$.

Pokażemy, że $B \in \mathcal{J}(\mathcal{A})^+$, wtedy dowód zostanie zakończony. Przypuśćmy, że $B \in \mathcal{J}(\mathcal{A})$. Z tego istnieje $n \in \omega$ takie, że

$$B \setminus \bigcup_{i<n} A_i \in \mathcal{J}.$$

Ale

$$B \cap \bigcup_{i<n} A_i \subseteq C \cap \bigcup_{i<n} A_i \subseteq C \cap (C_0 \setminus C_{n+1})$$

i zbiór $C \cap (C_0 \setminus C_{n+1})$ ma co najwyżej n elementów, więc

$$B \cap \bigcup_{i<n} A_i$$

ma co najwyżej n elementów. Zatem $B \in \mathcal{J}$. Sprzeczność.

3. Skoro $\mathcal{J}$ nie jest selektywnym ideałem, to istnieje malejący ciąg zbiorów $B_n \in \mathcal{J}^+$ taki, że jeżeli $|X \cap (B_n \setminus B_{n+1})| \leqslant 1$ dla wszystkich $n \in \omega$, wtedy $X \in \mathcal{J}$. Niech $A_0 = \omega \setminus B_0$ i $A_{n+1} = B_n \setminus B_{n+1}$ dla wszystkich $n \in \omega$. Zauważmy, że

$$\bigcup_{i \leqslant n} A_i = \omega \setminus B_n \notin \mathcal{J}^*,$$

więc $\omega \notin \mathcal{J}(\{A_n : n \in \omega\})$. Co więcej, różnowartościowa funkcja $f : \omega \to \omega^2$ taka, że $f[A_n] \subseteq \{n\} \times \omega$ świadczy o tym, że $\mathcal{ED} \leqslant_K \mathcal{J}(\{A_n : n \in \omega\})$ - wykorzystując fakt, że $\mathcal{J}$ nie jest selektywnym ideałem.

□

Twierdzenie 3.52. Niech $\mathcal{J}$ będzie ideałem na ω.

1. Następujące warunki są równoważne:
   a) $\mathcal{J}$ jest rozszerzalny do selektywnego ideału.
   b) $\mathcal{ED} \not\leq^{\omega_1}_{\omega^\omega, 1-1} \mathcal{J}$.
   c) $\mathcal{ED} \not\leq^{\omega_1}_{\omega^\omega, \mathrm{Fin}-1} \mathcal{J}$.
   d) $\mathcal{ED} \not\leq^{\omega_1}_{\omega^\omega, \omega^\omega} \mathcal{J}$.
2. Zakładając CH, powyższe warunki są równoważne następującym:
   e) Istnieje selektywny ultrafiltr, który nie jest $\mathcal{J}$-punktem.
   f) Istnieje selektywny ultrafiltr, który nie jest słabym $\mathcal{J}$-ultrafiltrem.
   g) Istnieje selektywny ultrafiltr, który nie jest $\mathcal{J}$-ultrafiltrem.

Dowód. 1. (a) $\implies$ b)) Niech $\mathcal{J}'$ będzie selektywnym ideałem takim, że $\mathcal{J}' \supseteq \mathcal{J}$. Z Lematu 3.51(2.) dostajemy, że $\mathcal{J}'(\mathcal{A})$ jest selektywnym ideałem dla każdej przeliczalnej rodziny $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ takiej, że $\omega \notin \mathcal{J}'(\mathcal{A})$. Zatem $\mathcal{ED} \not\leqslant_K \mathcal{J}'(\mathcal{A})$ przez Stwierdzenie 3.3(4.). Z tego mamy $\mathcal{ED} \not\preceq^{\omega_1}_{\omega^\omega,1-1} \mathcal{J}$.

Implikacje (b) $\implies$ c)) i (c) $\implies$ d)) zachodzą poprzez definicję porządku.

(d) $\implies$ a)) Skoro $\mathcal{ED} \not\preceq^{\omega_1}_{\omega^\omega,\omega^\omega} \mathcal{J}$, to istnieje ideał $\mathcal{J}'$ taki, że $\mathcal{J} \leqslant_K \mathcal{J}'$ i $\mathcal{ED} \not\leqslant_K \mathcal{J}'(\mathcal{A})$ dla każdej przeliczalnej rodziny $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ takiej, że $\omega \notin \mathcal{J}'(\mathcal{A})$. $\mathcal{J}'$ jest selektywnym ideałem przez Lemat 3.51(3.), zatem $\mathcal{J}$ może być rozszerzony do selektywnego ideału poprzez Lemat 3.51(1.).

2. (b) $\implies$ e)) Zakładając CH, teza wynika z Wniosku 3.16(1.) i Twierdzenia 3.4(3.).

Implikacje (e) $\implies$ f)) i (f) $\implies$ g)) zachodzą w ZFC.

(g) $\implies$ a)) Weźmy selektywny ultrafiltr $\mathcal{U}$, który nie jest $\mathcal{J}$-ultrafiltrem (to znaczy $\mathcal{J} \leqslant_K \mathcal{U}^*$). Wtedy $\mathcal{U}^*$ jest selektywnym ideałem, więc $\mathcal{J}$ może być rozszerzony do selektywnego ideału z Lematu 3.51(1.). (Zauważmy, że ten argument działa w ZFC).

□

Charakteryzacja ideałów $\mathcal{I}$, dla których istnieje $\mathcal{I}$-ultrafiltr, który nie jest selektywnym ultrafiltrem, okazuje się konsekwencją naszych poprzednich rozważań.

Twierdzenie 3.53. Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem na ω. Zakładając, że zachodzi CH, następujące warunki są równoważne:

1. ($\mathcal{I} \not\leqslant_K \mathrm{Fin}^2$ lub $\mathcal{I} \not\leqslant_K \mathcal{ED}_{\mathrm{Fin}}$) (($\mathcal{I} \not\leqslant_{KB} \mathrm{Fin}^2$ lub $\mathcal{I} \not\leqslant_{KB} \mathcal{ED}_{\mathrm{Fin}}$), ($\mathcal{I} \not\leqslant_P \mathrm{Fin}^2$ lub $\mathcal{I} \not\leqslant_P \mathcal{ED}_{\mathrm{Fin}}$)).
2. Istnieje $\mathcal{I}$-ultrafiltr (słaby $\mathcal{I}$-ultrafiltr, $\mathcal{I}$-punkt), który nie jest selektywnym ultrafiltrem.

Dowód. Teza wynika z Twierdzeń 3.33, 3.41 i z faktu, że ultrafiltr jest selektywny wtedy i tylko wtedy, gdy jest P-punktem i Q-punktem.

□

3.12. *Niektóre własności ideałów $\mathcal{L}$ i $\mathcal{T}$*

Wykorzystując rzeczy, które udowodniliśmy w tym rozdziale, pokażemy, że: ideał $\mathcal{T}$ nie ma własności hBW oraz ideał $\mathcal{L}$ nie jest $\leqslant_K$-jednorodny, a więc także nie jest jednorodny.

Twierdzenie 3.54. Jeżeli ideał $\mathcal{I}$ jest P^--ideałem i ma własność BW (hBW), wtedy $\mathcal{I}$ ma własność FinBW (hFinBW).

Dowód. Pokażemy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $\mathcal{I}$ mającego własność BW - w analogiczny sposób dowód przebiega dla ideału $\mathcal{I}$ mającego własność hBW. Niech $\{A_s : s \in \{0,1\}^{<\omega}\} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ będzie rodziną spełniającą warunki Stwierdzenia 2.25. Skoro $\mathcal{I}$ ma własność BW, to używając Stwierdzenia 2.25 otrzymujemy, że

$$\underset{A\notin\mathcal{I}}{\exists}\ \underset{x\in\{0,1\}^\omega}{\exists}\ \underset{n\in\omega}{\forall}\ A \setminus A_{x\restriction n} \in \mathcal{I}.$$

Z faktu, że $\mathcal{I}$ jest P^--ideałem dla malejącego ciągu $\{A \cap A_{x\restriction n} : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{I}^+$ takiego, że dla każdego $n \in \omega$ mamy $(A \cap A_{x\restriction n}) \setminus (A \cap A_{x\restriction n+1}) \in \mathcal{I}$ (bo $(A \cap A_{x\restriction n}) \setminus (A \cap A_{x\restriction n+1}) \subseteq A \setminus (A \cap A_{x\restriction n+1}) = A \setminus A_{x\restriction n+1} \in \mathcal{I}$) otrzymujemy zbiór $B \in \mathcal{I}^+$ taki, że $B \setminus (A \cap A_{x\restriction n}) \in \mathrm{Fin}$ dla każdego $n \in \omega$. Zatem $B \setminus A_{x\restriction n} \in \mathrm{Fin}$ dla każdego $n \in \omega$. Czyli $\mathcal{I}$ ma własność FinBW. □

Wniosek 3.55. Ideał $\mathcal{T}$ nie ma własności hBW.

Dowód. W [26, Lemma 3.3] Flašková pokazała, że $\mathcal{T} \leqslant_{KB} \mathcal{ED}_{\mathrm{Fin}}$. Po drobnej modyfikacji tego lematu otrzymujemy, że $\mathcal{T}_{\restriction A} \leqslant_{KB} \mathcal{ED}_{\mathrm{Fin}}$ dla każdego $A \in \mathcal{T}^+$. Zatem $\mathcal{T}_{\restriction A} \leqslant_K \mathcal{ED}_{\mathrm{Fin}}$ dla każdego $A \in \mathcal{T}^+$. Ze Stwierdzenia 3.3(3.) otrzymujemy, że $\mathrm{Fin}^2 \not\leqslant_K \mathcal{ED}_{\mathrm{Fin}}$, więc $\mathrm{Fin}^2 \not\leqslant_K \mathcal{T}_{\restriction A}$ dla każdego $A \in \mathcal{T}^+$. Wtedy [44, Theorem 3.8(4)] daje nam, że ideał cienki jest P^--ideałem. Z Twierdzeń 2.43 i 3.54 otrzymujemy, że $\mathcal{T}$ nie ma własności hBW.

□

Stwierdzenie 3.56. Ideał $\mathcal{L}$ jest P$^+(\mathcal{L})$-ideałem.

Dowód. Użyjemy następującej charakteryzacji ideału $\mathcal{L}$ ([33, Lemma 1.2.7]):

$$A \notin \mathcal{L} \iff \underset{n\in\omega}{\forall}\ \underset{d\in\omega}{\exists}\ \underset{K\in\omega}{\forall}\ \underset{k\geqslant K}{\exists} (|A \cap [k, k+d]| \geqslant n).$$

Niech $A_n \notin \mathcal{L}$ i $A_n \supseteq A_{n+1}$ dla każdego $n \in \omega$. Używając charakteryzacji dla każdego zbioru A_n oddzielnie, znajdziemy $d_n \in \omega$ taki, że dla każdego $K \in \omega$ istnieje $k \geqslant K$ taki, że $|A_n \cap [k, k+d_n]| \geqslant n$. Zatem dla każdego $n \in \omega$, wybieramy rosnący ciąg $k_0^n < k_1^n < \ldots$ taki, że $|A_n \cap [k_i^n, k_i^n + d_n]| \geqslant n$ dla każdego $i \in \omega$. Z faktu, że ideał $\mathcal{L}$ jest gęsty, bez straty ogólności możemy założyć, że $\{k_i^n : i \in \omega\} \in \mathcal{L}$. Definiujemy

$$A = \bigcup_{n\in\omega} \left(\bigcup_{i\in\omega} A_n \cap [k_i^n, k_i^n + d_n] \right).$$

Używając wspomnianej charakteryzacji, zauważmy, że $A \notin \mathcal{L}$. Poniżej pokażemy, że $A \setminus A_n \in \mathcal{L}$ dla każdego $n \in \omega$.

Po pierwsze dla każdego $n \in \omega$ zbiór

$$B_n = \bigcup_{i\in\omega} A_n \cap [k_i^n, k_i^n + d_n]$$

jest sumą $d_n + 1$ zbiorów należących do ideału $\mathcal{L}$ (przesunięcie zbioru z $\mathcal{L}$ jest zbiorem należącym do $\mathcal{L}$), więc $B_n \in \mathcal{L}$. Wtedy biorąc pod uwagę, że $A_0 \supseteq A_1 \supseteq \ldots$ otrzymujemy

$$A \setminus A_n \subseteq \bigcup_{i<n} B_i \in \mathcal{L}.$$

□

Wniosek 3.57. Ideał $\mathcal{L}$ ma własność hBW.

Dowód. Teza wynika ze Stwierdzenia 3.56, bo $\mathcal{L}$ jest P$^+(\mathcal{L})$-ideałem, a to implikuje, że ma własność hBW (co otrzymujemy z dowodu [20, Proposition 5.5]).

□

Twierdzenie 3.58. Ideał $\mathcal{L}$ nie jest $\leqslant_K$-jednorodny (w szczególności, nie jest jednorodny).

Dowód. Przypuśćmy, że ideał $\mathcal{L}$ jest $\leqslant_K$-jednorodny, wtedy dla każdego $A \notin \mathcal{L}$ otrzymujemy $\mathcal{L}_{\restriction A} \cong_K \mathcal{L}$, zatem $\mathcal{L}_{\restriction A} \leqslant_K \mathcal{L}$. Z Wniosku 3.57 oraz [48, Lemma 3.2] wiemy, że $\mathcal{L}$ ma własność hBW, ale nie ma własności hFinBW. Wtedy ze Stwierdzenia 3.54 ideał $\mathcal{L}$ nie jest P^--ideałem. Zatem z [44, Theorem 3.8(4)] istnieje zbiór $B \notin \mathcal{L}$ taki, że $\mathrm{Fin}^2 \leqslant_K \mathcal{L}_{\restriction B}$, więc $\mathrm{Fin}^2 \leqslant_K \mathcal{L}$. Skoro $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{I}_d$ ([33, Lemma 1.4.4] i $\mathrm{Fin}^2 \not\leqslant_K \mathcal{I}_d$ (przez Stwierdzenie 3.3(2.) i fakt, że $\mathcal{I}_d$ jest P-ideałem), uzyskujemy, że $\mathrm{Fin}^2 \not\leqslant_K \mathcal{L}$. Sprzeczność. Zatem $\mathcal{L}$ nie jest $\leqslant_K$-jednorodny.

□

4. PRZESTRZENIE TOPOLOGICZNE

W 2002 roku Kojman i Shelah pokazali przy założeniu hipotezy continuum, że istnieje przestrzeń van der Waerdena, która nie jest przestrzenią Hindmana ([51, Theorem 3]). Rok później, Shi w swoim doktoracie skonstruował przestrzeń van der Waerdena, która nie była przestrzenią różnicowo zwartą ([63, Theorem 4.2.2]). W kolejnym roku Jones zamienił założenie CH na $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$ w konstrukcji Kojmana i Shelaha ([46, Corollary 5]).

W tym rozdziale pokażemy, jaki jest związek przestrzeni topologicznych z porządkiem Katětova. Sprawdzimy jakie warunki powinny zostać spełnione, by rozróżnić dane dwie klasy przestrzeni i dla jakich warunków jedna klasa przestrzeni jest zawarta w drugiej. Wyniki w tym rozdziale pochodzą z prac [52] i [23]. Na początku podajemy szereg definicji, które zostaną wykorzystane w dalszej części pracy.

Definicja 4.1 ([27])**.** Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem na ω. Przestrzeń topologiczną X nazywamy *$\mathcal{I}$-przestrzenią*, jeżeli dla każdego ciągu $\langle x_n \rangle_{n\in\omega}$ w X istnieje zbieżny podciąg $\langle x_n \rangle_{n\in A}$, gdzie $A \notin \mathcal{I}$.

$\mathcal{W}$-przestrzenie nazywać będziemy *przestrzeniami van der Waerdena*, a $\mathcal{F}$-przestrzenie - *przestrzeniami Folkmana*. Kojman zauważył, że $\mathcal{H}$-przestrzenie są przestrzeniami skończonymi (zobacz [49, Theorem 3]), więc wprowadził *przestrzenie Hindmana*. Z kolei Shi zauważył, że $\mathcal{D}$-przestrzenie są przestrzeniami skończonymi (zobacz [63, Theorem 4.2.1]) i zdefiniował *przestrzenie różnicowo zwarte*.

IP-ciąg (DP-ciąg) w X jest ciągiem indeksowanym przez zbiór $FS(K)$ ($D(K)$) dla jakiegoś nieskończonego zbioru $K \subseteq \omega$.

Definicja 4.2 ([36, Definition 2.2])**.** Niech zbiór $D \subseteq \omega$ będzie nieskończony. IP-ciąg $\langle x_n \rangle_{n\in FS(D)}$ w przestrzeni topologicznej X, IP-zbiega do punktu $x \in X$, jeżeli dla każdego otoczenia U punktu x, istnieje $m \in \omega$ takie, że $\{x_n : n \in FS(D \setminus \{0, 1, \ldots, m-1\})\} \subseteq U$ (punkt x jest nazywany IP-granicą ciągu).

Definicja 4.3 ([49, Definition 4])**.** Przestrzeń topologiczną X nazywamy *przestrzenią Hindmana*, jeżeli dla każdego ciągu $\langle x_n \rangle_{n\in\omega}$ w X istnieje nieskończony zbiór $D \subseteq \omega$ taki, że podciąg $\langle x_n \rangle_{n\in FS(D)}$ IP-zbiega do jakiegoś $x \in X$.

Definicja 4.4 ([63, Definition 4.2.2])**.** Niech $S \subseteq \omega$ będzie nieskończonym zbiorem. DP-ciąg $\langle x_n \rangle_{n\in D(S)}$ w przestrzeni topologicznej X, DP-zbiega do punktu $x \in X$, jeżeli dla każdego otoczenia U punktu x istnieje $m \in \omega$ takie, że $\{x_n : n \in D(S \setminus \{0, 1, \ldots, m-1\})\} \subseteq U$ (punkt x jest nazywany DP-granicą ciągu).

Definicja 4.5 ([63, Definition 4.2.4])**.** Przestrzeń topologiczną X nazywamy *przestrzenią różnicowo zwartą*, jeżeli dla każdego ciągu $\langle x_n \rangle_{n\in\omega}$ w X istnieje nieskończony zbiór $S \subseteq \omega$ taki, że podciąg $\langle x_n \rangle_{n\in D(S)}$ DP-zbiega do jakiegoś $x \in X$.

Przykładem przestrzeni, która odróżnia jedną z powyżej zdefiniowanych klas przestrzeni od drugiej, jest często jednopunktowe uzwarcenie *przestrzeni Mrówki*.

Powiemy, że zbiory A i B są prawie rozłączne, gdy $|A \cap B| < \omega$. Rodzina $\mathcal{A}$ jest prawie rozłączna, gdy dla każdych zbiorów $A, B \in \mathcal{A}$, jeżeli $A \neq B$, to A i B są prawie rozłączne.

Niech $\mathcal{A}$ będzie nieskończoną, maksymalną, prawie rozłączną rodziną nieskończonych podzbiorów ω (w skrócie: rodzina *mad*). Przestrzeń topologiczna $\Psi(\mathcal{A})$ była wprowadzona w [61]. Nazwana została *przestrzenią Mrówki* i zdefiniowana jest następująco: $\Psi(\mathcal{A}) = \omega \cup \mathcal{A}$, gdzie punkty z ω są izolowane i bazowe otoczenie $A \in \mathcal{A}$ ma postać $\{A\} \cup (A \setminus F)$, gdzie F jest skończonym zbiorem.

Niech $\Phi(\mathcal{A}) = \Psi(\mathcal{A}) \cup \{\infty\} = \omega \cup \mathcal{A} \cup \{\infty\}$ będzie jednopunktowym uzwarceniem Aleksandrowa przestrzeni Mrówki. Bazowym otoczeniem ∞ jest $\Phi(\mathcal{A}) \setminus K$, gdzie K będzie zwartym podzbiorem $\Psi(\mathcal{A})$. Jeśli K jest zwartym podzbiorem $\Psi(\mathcal{A})$, to $K \cap \mathcal{A}$ jest zbiorem skończonym.

4.1. Przestrzeń $\Phi(\mathcal{A})$ nie jest przestrzenią różnicowo zwartą

Następujące twierdzenie pokazuje, że jeżeli $\mathcal{A}$ jest nieskończoną, maksymalną, prawie rozłączną rodziną nieskończonych podzbiorów ω, wtedy przestrzeń $\Phi(\mathcal{A})$ nie może być przestrzenią różnicowo zwartą (a co za tym idzie, nie może być przestrzenią Hindmana przez [24, Proposition 4.6]).

Twierdzenie 4.6. Niech $\mathcal{A}$ będzie nieskończoną, maksymalną, prawie rozłączną rodziną nieskończonych podzbiorów ω. Wtedy $\Phi(\mathcal{A})$ nie jest przestrzenią różnicowo zwartą.

Dowód. Niech $\Phi(\mathcal{A})$ będzie jednopunktowym uzwarceniem Aleksandrowa przestrzeni Mrówki.

Dla każdego $k \in \omega$ zdefiniujmy zbiór $P_k = \{n2^{k+1} + 2^k : n \in \omega\}$ i zauważmy, że dla każdego nieskończonego $K \subseteq \omega$ zachodzi:

1. $$\underset{k \in \omega}{\exists} |D(K) \cap P_k| = \omega,$$
2. $$\underset{k \in \omega}{\forall} |D(K) \setminus P_k| = \omega.$$

Aby wykazać pierwszy podpunkt, rozpatrzmy trzy podprzypadki.

a) Zbiór K ma nieskończenie wiele liczb nieparzystych i skończenie wiele liczb parzystych. Jeżeli zbiór K ma co najmniej jedną liczbę parzystą, wtedy warunek jest spełniony dla $k = 0$. Gdy nie ma liczb parzystych w K, wtedy $K \subseteq P_0$. Dla każdych $x, y \in K$ takich, że $x > y$ niech $a_x, a_y \in \omega$ będą takie, że: $x = 2a_x + 1$, $y = 2a_y + 1$. Zauważmy, że dla $x, y \in K$ otrzymujemy $x - y = 2(a_x - a_y)$.

Jeżeli istnieje $l \in \omega$ i nieskończenie wiele par $\{x, y\} \in [K]^2$ takich, że $a_x - a_y \in P_l$, wtedy dla każdej takiej pary mamy $x - y = 2(2^{l+1}d + 2^l) = 2^{l+2}d + 2^{l+1} \in P_{l+1}$, gdzie $d \in \omega$. Liczba $k = l + 1$ spełnia warunek.

W innym przypadku bierzemy $l \in \omega$ takie, że $a_x - a_y \in P_l$ dla jakichś $x, y \in K$. Istnieje nieskończenie wiele $c \in K$ i nieskończenie wiele $l_c \in \omega$ takich, że $a_c - a_x \in P_{l_c}$. Bez straty ogólności, załóżmy, że $l < l_c$ dla wszystkich $c \in K$. Wtedy istnieje nieskończenie wiele c takich, że $a_c - a_y = (a_c - a_x) + (a_x - a_y) \in P_l + P_{l_c} \subseteq P_l$ (zawieranie zachodzi, ponieważ jeżeli $z \in P_l + P_{l_c}$, wtedy $z = n2^{l+1} + 2^l + t2^{l_c+1} + 2^{l_c} = (n + t2^{l_c - l} + 2^{l_c - l - 1})2^{l+1} + 2^l \in P_l$, gdzie $n, t \in \omega$). Sprzeczność, gdyż jest to poprzedni przypadek.

b) Zbiór K ma skończenie wiele liczb nieparzystych i nieskończenie wiele liczb parzystych. Jeżeli zbiór K ma co najmniej jedną liczbę nieparzystą, wtedy warunek jest spełniony dla $k = 0$. Gdy nie ma liczb nieparzystych w K, to postępujemy jak w podpunkcie a).

c) Zbiór K ma nieskończenie wiele liczb nieparzystych i nieskończenie wiele liczb parzystych. Wtedy $k = 0$ spełnia warunek.

Aby wykazać drugi podpunkt, zauważmy, że

$$\exists_{k \in \omega} \exists_{a,b \in K} a - b \in P_k.$$

Dla wszystkich $c \in K$ i $c > a$ mamy: $c - a \notin P_k$ lub $c - b \notin P_k$. Jeżeli $c - a \in P_k$, wtedy $c - b = (c - a) + (a - b) \notin P_k$. Gdy $c - b \in P_k$, to $c - a = (c - b) - (a - b) \notin P_k$.

Teraz pokażemy, że $\Phi(\mathcal{A})$ nie jest przestrzenią różnicowo zwartą. Niech $A_1, A_2, \ldots$ będzie ciągiem różnych zbiorów z rodziny $\mathcal{A}$, a $f : \omega \to \Phi(\mathcal{A})$ będzie ciągiem takim, że

$$f_{\restriction P_k} : P_k \to A_k \setminus \bigcup_{i<k} A_i$$

jest bijekcją dla każdego $k \in \omega$. Twierdzimy, że f nie ma DP-zbieżnego DP-podciągu.

Weźmy nieskończony zbiór $K \subseteq \omega$ i pokażemy, że $f_{\restriction D(K)}$ nie jest DP-zbieżny do żadnego $x \in \Phi(\mathcal{A})$.

Jeżeli $x \in \omega$, wtedy $f_{\restriction D(K)}$ nie jest DP-zbieżny do x, skoro ω jest dyskretną przestrzenią w $\Phi(\mathcal{A})$ i f jest różnowartościowa.

Załóżmy, że $x = \infty$. Pokażemy, że $f_{\restriction D(K)}$ nie jest DP-zbieżny do ∞. Niech $B_m = f[D(K \setminus \{0, 1, \ldots, m-1\})]$ dla każdego $m \in \omega$. Zbiory B_m są nieskończone dla każdego $m \in \omega$ i tworzą zstępujący ciąg. Niech $B \subseteq \omega$ będzie nieskończonym zbiorem takim, że $B \setminus B_m$ jest skończony dla każdego $m \in \omega$. Z maksymalności rodziny $\mathcal{A}$ istnieje zbiór $A \in \mathcal{A}$ taki, że $|A \cap B| = \omega$. Zauważmy, że $\{A\} \cup A$ jest zbiorem zwartym. Niech $U = \Phi(\mathcal{A}) \setminus (\{A\} \cup A)$ będzie otwartym otoczeniem ∞. Jeżeli $f_{\restriction D(K)}$ jest DP-zbieżny do ∞, wtedy istnieje $m \in \omega$ taki, że $f[D(K \setminus \{0, 1, \ldots, m-1\})] \cap A = \emptyset$. Zatem $B_m \cap A = \emptyset$. Otrzymujemy $|A \cap B| < \omega$ i dostajemy sprzeczność, bo $|A \cap B| = \omega$. Zatem $f_{\restriction D(K)}$ nie jest DP-zbieżny do ∞.

Załóżmy, że $x \in \mathcal{A}$. Mamy dwa przypadki:

a) $x \neq A_k$ dla każdego $k \in \omega$,

b) $x = A_{k_0}$ dla jakiegoś $k_0 \in \omega$.

W pierwszym przypadku $U = \{x\} \cup x$ jest otwartym otoczeniem x takim, że $f[D(K \setminus \{0, 1, \ldots, n-1\})] \setminus U$ jest nieskończony dla każdego $n \in \omega$ (bo korzystając z podpunktu 1. dla każdego $n \in \omega$ istnieje $k \in \omega$ takie, że $f[D(K \setminus \{0, 1, \ldots, n-1\})] \cap A_k$ jest nieskończony), więc $f_{\restriction D(K)}$ nie jest DP-zbieżny do x.

W drugim przypadku $U = \{A_{k_0}\} \cup A_{k_0}$ jest otwartym otoczeniem x takim, że $f[D(K \setminus \{0, 1, \ldots, n-1\})] \setminus U$ jest nieskończony dla każdego $n \in \omega$ (bo korzystając z podpunktu 2. zbiór $f[D(K \setminus \{0, 1, \ldots, n-1\})] \setminus A_{k_0}$ jest nieskończony dla każdego $n \in \omega$). Zatem $f_{\restriction D(K)}$ nie jest DP-zbieżny do x.

□

4.2. $\mathcal{I}$-przestrzeń nie będąca przestrzenią różnicowo zwartą

Trzy poniższe lematy przygotowują nas do pokazania, że przy pewnych założeniach istnieje $\mathcal{I}$-przestrzeń, która nie jest przestrzenią różnicowo zwartą. Jeżeli $\mathcal{I}$-przestrzeń nie będzie przestrzenią różnicowo zwartą, wtedy nie będzie także przestrzenią Hindmana (klasa przestrzeni Hindmana jest zawarta w klasie przestrzeni różnicowo zwartych [24, Proposition 4.6]).

Lemat 4.7. Niech $\mathcal{I}$ będzie P$^+$-ideałem na ω, $A \in \mathcal{I}^+$ i $f : \omega \to \omega$. Istnieje zbiór $C \subseteq A$ i $C \in \mathcal{I}^+$ taki, że albo f jest stała na C, albo f jest $\mathrm{Fin} - 1$ na C.

Dowód. Jeżeli istnieje skończony zbiór $K \subseteq \omega$ taki, że $f^{-1}[K] \cap A \in \mathcal{I}^+$, to $f^{-1}[\{k\}] \cap A \in \mathcal{I}^+$ dla jakiegoś $k \in K$ (ponieważ, gdy wszystkie zbiory $f^{-1}[\{k\}] \cap A \in \mathcal{I}$, wtedy $f^{-1}[K] \cap A \in \mathcal{I}$ - przez definicję ideału). Zatem funkcja jest stała na zbiorze $f^{-1}[\{k\}] \cap A \in \mathcal{I}^+$.

Jeżeli $f^{-1}[K] \cap A \in \mathcal{I}$ dla każdego skończonego zbioru $K \subseteq \omega$, wtedy konstruujemy zbiór C tak, by funkcja na tym zbiorze była $\mathrm{Fin} - 1$. Niech $D_n = \{0, 1, \ldots, n\}$ i $E_n = A \cap f^{-1}[D_n]$. Wtedy $E_n \in \mathcal{I}$ dla wszystkich $n \in \omega$. Zauważmy, że

$$\bigcup_{n \in \omega} E_n = A$$

i $A \setminus E_0 \supseteq A \setminus E_1 \supseteq A \setminus E_2 \supseteq \ldots$. Dla wszystkich $n \in \omega$ otrzymujemy $A \setminus E_n \in \mathcal{I}^+$. Z faktu, że $\mathcal{I}$ jest P$^+$-ideałem dostajemy:

$$\underset{C \in \mathcal{I}^+, C \subseteq A}{\exists} \ \underset{n \in \omega}{\forall} \ C \setminus (A \setminus E_n) = C \cap E_n \in \mathrm{Fin}.$$

Zbiór C jest poszukiwanym zbiorem spełniającym warunek lematu. Zatem funkcja f jest $\mathrm{Fin} - 1$ na zbiorze C.

$\square$

Lemat 4.8. Załóżmy, że zachodzi CH. Niech $\mathcal{I}$ będzie P$^+$-ideałem. Istnieje nieskończona, maksymalna, prawie rozłączna rodzina $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ taka, że dla każdego $\mathcal{I}^+$-zbioru $B \subseteq \omega$ i każdej $\mathrm{Fin} - 1$ funkcji $f : B \to \omega$ istnieją $\mathcal{I}^+$-zbiór $C \subseteq B$ i $A \in \mathcal{A}$ takie, że $f[C] \subseteq A$.

Dowód. Ustalmy listę $\{(H_\alpha, f_\alpha) : \omega \leqslant \alpha < \mathfrak{c}\}$ wszystkich par zbiorów $H_\alpha \notin \mathcal{I}$ i $\mathrm{Fin} - 1$ funkcji $f_\alpha : H_\alpha \to \omega$. Przez indukcję pozaskończoną na $\alpha < \mathfrak{c}$ konstruujemy prawie rozłączną rodzinę $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ taką, że $f_\alpha[C] \subseteq A_\alpha$ dla jakiegoś $C \in \mathcal{I}^+$. Ponumerowanie $\{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ może zawierać powtórzenia. Niech $\{A_n : n \in \omega\}$ będzie rodziną nieskończonych i parami rozłącznych podzbiorów ω.

Załóżmy, że $\omega \leqslant \alpha < \mathfrak{c}$ i A_β zostały wybrane dla wszystkich $\beta < \alpha$. Jeżeli istnieje skończony zbiór $\{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_l\} \subseteq \alpha$ taki, że

$$f_\alpha^{-1}\left[\bigcup_{i \leqslant l} A_{\beta_i}\right] \in \mathcal{I}^+,$$

wtedy niech $A_\alpha = A_{\beta_i}$ dla tego $i \in \{0, 1, \ldots, l\}$ dla którego zachodzi $f_\alpha^{-1}[A_{\beta_i}] \in \mathcal{I}^+$. Dla $C = f_\alpha^{-1}[A_{\beta_i}] \in \mathcal{I}^+$ mamy $f_\alpha[C] \subseteq A_\alpha$.

W innym przypadku ponumerujmy zbiór α jako $\{\beta_i : i \in \omega\}$. Teraz dla wszystkich $n \in \omega$ dostajemy

$$f_\alpha^{-1}\left[\bigcup_{i < n} A_{\beta_i}\right] \in \mathcal{I}.$$

Z tego otrzymujemy

$$H_\alpha \setminus f_\alpha^{-1}\left[\bigcup_{i < n} A_{\beta_i}\right] \in \mathcal{I}^+.$$

Z faktu, że $\mathcal{I}$ jest P$^+$-ideałem, istnieje $B' \in \mathcal{I}^+$ taki, że $B' \subseteq H_\alpha$ i

$$B' \setminus \left(H_\alpha \setminus f_\alpha^{-1} \left[\bigcup_{i<n} A_{\beta_i} \right] \right) = B' \cap f_\alpha^{-1} \left[\bigcup_{i<n} A_{\beta_i} \right] \in \mathrm{Fin}$$

dla wszystkich $n \in \omega$. Zatem $f_\alpha[B']$ jest nieskończony (ponieważ f_α jest $\mathrm{Fin} - 1$) i $|f_\alpha[B'] \cap A_\beta| < \omega$ dla wszystkich $\beta < \alpha$. Definiujemy $A_\alpha = f_\alpha[B']$. Wtedy dla $C = B' \in \mathcal{I}^+$ mamy $f_\alpha[C] \subseteq A_\alpha$.

Rodzina $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ jest prawie rozłączną rodziną nieskończonych zbiorów. Sprawdzimy, że $\mathcal{A}$ jest maksymalna. Niech dane będą: nieskończony zbiór $D \subseteq \omega$ i funkcja $f : \omega \to D$, która jest rosnącym ponumerowaniem elementów zbioru D. Skoro istnieją $C \in \mathcal{I}^+$ i $A \in \mathcal{A}$ takie, że $f[C] \subseteq A$, to $D \cap A$ jest nieskończony.

□

Lemat 4.9. Załóżmy $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$. Niech $\mathcal{I}$ będzie F_σ ideałem. Istnieje nieskończona, maksymalna prawie rozłączna rodzina $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ taka, że dla każdego $\mathcal{I}^+$-zbioru $B \subseteq \omega$ i każdej $\mathrm{Fin} - 1$ funkcji $f : B \to \omega$ istnieją $\mathcal{I}^+$-zbiór $C \subseteq B$ i $A \in \mathcal{A}$ takie, że $f[C] \subseteq A$.

Dowód. Niech $\mathcal{I} = \mathrm{Fin}(\varphi) = \{A \subseteq \omega : \varphi(A) < \infty\}$, gdzie φ jest dolnie półciągłą podmiarą.

Ustalmy listę $\{(H_\alpha, f_\alpha) : \omega \leqslant \alpha < \mathfrak{c}\}$ wszystkich par zbiorów $H_\alpha \notin \mathcal{I}$ i $\mathrm{Fin} - 1$ funkcji $f_\alpha : H_\alpha \to \omega$. Przez indukcję pozaskończoną na $\alpha < \mathfrak{c}$ konstruujemy prawie rozłączną rodzinę $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ taką, że $f_\alpha[C] \subseteq A_\alpha$ dla jakiegoś $C \in \mathcal{I}^+$. Ponumerowanie $\{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ może zawierać powtórzenia. Niech $\{A_n : n \in \omega\}$ będzie rodziną nieskończonych, parami rozłącznych podzbiorów ω.

Załóżmy, że $\omega \leqslant \alpha < \mathfrak{c}$ i A_β zostały wybrane dla wszystkich $\beta < \alpha$. Jeżeli istnieje skończony zbiór $\{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_l\} \subseteq \alpha$ taki, że

$$f_\alpha^{-1} \left[\bigcup_{i \leqslant l} A_{\beta_i} \right] \in \mathcal{I}^+,$$

wtedy niech $A_\alpha = A_{\beta_i}$ dla tego $i \in \{0, 1, \ldots, l\}$ dla którego zachodzi $f_\alpha^{-1}[A_{\beta_i}] \in \mathcal{I}^+$. Dla $C = f_\alpha^{-1}[A_{\beta_i}] \in \mathcal{I}^+$ mamy $f_\alpha[C] \subseteq A_\alpha$.

W innym przypadku, używając $MA_{\sigma-scentrowany}$ (Twierdzenie 3.9), stworzymy $\mathcal{I}^+$-zbiór $C \subseteq H_\alpha$, dla którego zbiór $A_\alpha = f_\alpha[C]$ jest prawie rozłączny z poprzednio wybranymi A_β.

Zdefiniujmy następujący zbiór częściowo uporządkowany $\mathbb{P}$.

Elementy $\mathbb{P}$ są parami

$$p = (B_p, F_p) \in [H_\alpha]^{<\omega} \times [\alpha]^{<\omega}.$$

Dla $p, q \in \mathbb{P}$ definiujemy porządek:

$$q \leqslant p \iff \left(B_q \supseteq B_p \wedge F_q \supseteq F_p \wedge B_q \setminus B_p \subseteq H_\alpha \setminus f_\alpha^{-1} \left[\bigcup \{A_\beta : \beta \in F_p\} \right] \right).$$

Zauważmy, że $H_\alpha \setminus f_\alpha^{-1}[\bigcup\{A_\beta : \beta \in F\}]$ jest $\mathcal{I}^+$-zbiorem dla wszystkich skończonych $F \subseteq \alpha$.

Pokażemy, że dla każdego $n \in \omega$, zbiór $\mathcal{A}_n = \{p \in \mathbb{P} : \varphi(B_p) \geqslant n\}$ jest gęsty w $\mathbb{P}$.

Niech $p = (B_p, F_p)$ będzie dowolnym elementem z $\mathbb{P}$ i $n \in \omega$. Wiemy, że $E_p = H_\alpha \setminus f_\alpha^{-1} \left[\bigcup \{A_\beta : \beta \in F_p\} \right]$ jest $\mathcal{I}^+$-zbiorem, więc zawiera skończony zbiór $K \subseteq E_p$ taki, że $\varphi(K) \geqslant n$ (ponieważ φ jest dolnie półciągła). Definiujemy $q = (B_p \cup K, F_p)$. Wtedy $q \leqslant p$ i $\varphi(B_q) \geqslant n$. Zatem $\mathcal{A}_n$ jest gęsty w $\mathbb{P}$.

Pokażemy, że dla każdego $\beta < \alpha$, zbiór $\mathcal{B}_\beta = \{p \in \mathbb{P} : \beta \in F_p\}$ jest gęsty w $\mathbb{P}$.

Niech $p = (B_p, F_p)$ będzie dowolnym elementem z $\mathbb{P}$. Definiujemy $q = (B_p, F_p \cup \{\beta\})$. Wtedy $q \leqslant p$. Zatem $\mathcal{B}_\beta$ jest gęsty w $\mathbb{P}$.

Pokażemy, że $\mathbb{P}$ jest σ-scentrowany.

Zauważmy, że

$$\mathbb{P} = \bigcup_{T \in [H_\alpha]^{<\omega}} \{p \in \mathbb{P} : B_p = T\}.$$

Weźmy $p, q \in \mathbb{P}$ i $T \in [H_\alpha]^{<\omega}$ z $B_p = B_q = T$. Otrzymujemy $(T, F_p \cup F_q) \leqslant p$ i $(T, F_p \cup F_q) \leqslant q$.

Zatem możemy użyć $MA_{\sigma-scentrowany}$ do znalezienia filtra $G \subseteq \mathbb{P}$, który jednocześnie przecina każdy $\mathcal{A}_n$ dla $n \in \omega$ i każdy $\mathcal{B}_\beta$ dla $\beta < \alpha$. Po znalezieniu takiego filtra niech $C = \bigcup\{B_p : p \in G\}$. Dzięki temu, że G przecina $\mathcal{A}_n$ dla każdego $n \in \omega$ otrzymujemy, że C jest $\mathcal{I}^+$-zbiorem. Dla każdego $\beta < \alpha$ mamy $G \cap \mathcal{B}_\beta \neq \emptyset$, więc istnieje $p \in G \cap \mathcal{B}_\beta$. Pokażemy, że $C \cap f^{-1}[A_\beta] \subseteq B_p \in \mathrm{Fin}$. Niech $x \in C \cap f^{-1}[A_\beta]$ i przypuśćmy, że $x \notin B_p$. Wtedy istnieje $q \in G$ takie, że $x \in B_q$. Ponieważ G jest filtrem, to znajdziemy $r \in G$ takie, że $r \leqslant p$ i $r \leqslant q$. Wtedy $x \in B_q \setminus B_p \subseteq B_r \setminus B_p \subseteq H_\alpha \setminus f_\alpha^{-1}[A_\beta]$. Sprzeczność.

Do zobaczenia, że $\mathcal{A}$ jest maksymalną prawie rozłączną rodziną, załóżmy, że $N \in [\omega]^\omega$. Niech $f : \omega \to N$ będzie rosnącym ponumerowaniem elementów zbioru N. Istnieje $\mathcal{I}^+$-zbiór C i $A \in \mathcal{A}$ z $f[C] \subseteq A$. Zatem $N \cap A$ jest nieskończony.

□

Teraz możemy udowodnić, że przestrzeń $\Phi(\mathcal{A})$ jest rozróżniającą przestrzenią, to znaczy $\mathcal{I}$-przestrzenią, która nie jest przestrzenią różnicowo zwartą.

Twierdzenie 4.10. Załóżmy, że zachodzi $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$ (CH). Jeżeli $\mathcal{I}$ jest F_σ ideałem (P$^+$-ideałem), wtedy istnieje przestrzeń $\Phi(\mathcal{A})$, która jest $\mathcal{I}$-przestrzenią, ale nie jest przestrzenią różnicowo zwartą.

Dowód. Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną skonstruowaną w Lemacie 4.9 (Lemacie 4.8), a $\Phi(\mathcal{A})$ będzie jednopunktowym uzwarceniem Aleksandrowa przestrzeni Mrówki.

Z Twierdzenia 4.6 wiemy, że przestrzeń $\Phi(\mathcal{A})$ nie jest przestrzenią różnicowo zwartą.

Teraz pokażemy, że $\Phi(\mathcal{A})$ jest $\mathcal{I}$-przestrzenią. Załóżmy, że $f : \omega \to \Phi(\mathcal{A})$ jest dana. Niech $g : f[\omega] \to \omega$ będzie różnowartościowa. Z Lematu 4.7 możemy znaleźć $B \in \mathcal{I}^+$ i $B \subseteq \omega$ taki, że $(g \circ f)_{\restriction B}$ jest stała lub $\mathrm{Fin} - 1$. W pierwszym przypadku ciąg $\langle f(n) \rangle_{n \in B}$ jest stały i zatem zbieżny. Załóżmy, że $f_{\restriction B}$ jest $\mathrm{Fin} - 1$. Skoro $f^{-1}[\omega] \cap B \in \mathcal{I}^+$ lub $B \setminus f^{-1}[\omega] \in \mathcal{I}^+$, to możemy założyć przez zmniejszenie B do jakiegoś $\mathcal{I}^+$-podzbioru, że $f[B] \subseteq \omega$ lub $f[B] \subseteq \Phi(\mathcal{A}) \setminus (\omega \cup \{\infty\})$.

W pierwszym przypadku, z Lematu 4.9 (Lematu 4.8) istnieją $A \in \mathcal{A}$ i $\mathcal{I}^+$-zbiór $C \subseteq B$ takie, że $f[C] \subseteq A$. Skoro $f_{\restriction B}$ jest $\mathrm{Fin} - 1$, to $\langle f(n) \rangle_{n \in C}$ zbiega do A. W drugim przypadku twierdzimy, że ciąg $\langle f(n) \rangle_{n \in B}$ jest zbieżny do ∞. Do zobaczenia tego, niech K będzie zwartym podzbiorem $\Psi(\mathcal{A})$ takim, że $\Phi(\mathcal{A}) \setminus K$ jest bazowym otoczeniem ∞. Wtedy $K \setminus \omega$ jest skończony (bo $K \cap \mathcal{A}$ jest zbiorem skończonym), więc dlatego, że $f_{\restriction B}$ jest $\mathrm{Fin} - 1$, to $\langle f(n) \rangle_{n \in B}$ jest od pewnego miejsca w $\Phi(\mathcal{A}) \setminus K$.

□

4.3. *Przestrzeń różnicowo zwarta i Hindmana będąca $\mathcal{I}$-przestrzenią*

Poniższe twierdzenie pokazuje, że przy założeniu pewnych warunków każda przestrzeń różnicowo zwarta (Hindmana) jest $\mathcal{I}$-przestrzenią.

Twierdzenie 4.11.

1. Jeżeli $\mathcal{I} \leqslant_K \mathcal{D}$ i $\mathcal{I}$ jest P$^+$-ideałem, wtedy każda przestrzeń różnicowo zwarta jest $\mathcal{I}$-przestrzenią. W szczególności, jeżeli $\mathcal{I}$ jest F_σ ideałem i $\mathcal{I} \leqslant_K \mathcal{D}$, wtedy każda przestrzeń różnicowo zwarta jest $\mathcal{I}$-przestrzenią.
2. Jeżeli $\mathcal{I} \leqslant_K \mathcal{H}$ i $\mathcal{I}$ jest P$^+$-ideałem, wtedy każda przestrzeń Hindmana jest $\mathcal{I}$-przestrzenią. W szczególności, jeżeli $\mathcal{I}$ jest F_σ ideałem i $\mathcal{I} \leqslant_K \mathcal{H}$, wtedy każda przestrzeń Hindmana jest $\mathcal{I}$-przestrzenią.

Dowód. Udowodnimy tylko podpunkt 1., ponieważ podpunkt 2. dowodzi się analogicznie.

Każdy F_σ ideał jest P$^+$-ideałem, więc udowadniając twierdzenie dla P$^+$-ideału dostajemy wynik dla F_σ ideału.

Niech X będzie przestrzenią różnicowo zwartą. Ustalmy $\{x_n : n \in \omega\} \subseteq X$. Niech $f : \omega \to \omega$ będzie świadkiem dla $\mathcal{I} \leqslant_K \mathcal{D}$. Definiujemy $y_n = x_{f(n)}$ dla każdego $n \in \omega$. Wtedy istnieją nieskończony $A \subseteq \omega$ i $x \in X$ takie, że dla każdego otwartego zbioru $U \ni x$ istnieje $m \in \omega$ takie, że $\{y_n : n \in D(A \setminus \{0,1,\ldots,m-1\})\} \subseteq U$. Otrzymujemy $f[D(A \setminus \{0,1,\ldots,n-1\})] \notin \mathcal{I}$ dla każdego $n \in \omega$. Rozważmy malejący ciąg $\mathcal{I}^+$-zbiorów dany przez: $A_i = f[D(A \setminus \{0,1,\ldots,i-1\})]$ dla każdego $i \in \omega$. Skoro $\mathcal{I}$ jest P$^+$-ideałem, to istnieje $B \notin \mathcal{I}$ taki, że $B \setminus A_i \in \mathrm{Fin}$ dla każdego $i \in \omega$. Twierdzimy, że $\langle x_n \rangle_{n \in B}$ jest zbieżny do x. Do zobaczenia tego, niech $U \ni x$ będzie zbiorem otwartym. Wtedy istnieje $k \in \omega$ takie, że $\{x_n : n \in f[D(A \setminus \{0,1,\ldots,k-1\})]\} = \{y_n : n \in D(A \setminus \{0,1,\ldots,k-1\})\} \subseteq U$. Zatem $\{n \in B : x_n \notin U\} \subseteq B \setminus f[D(A \setminus \{0,1,\ldots,k-1\})] = B \setminus A_k \in \mathrm{Fin}$.

□

4.4. *Przestrzeń Hindmana nie będąca $\mathcal{I}$-przestrzenią*

W tym podrozdziale podamy definicje zbioru rzadkiego i bardzo rzadkiego oraz szereg lematów, które posłużą nam do pokazania, że przy założeniu hipotezy continuum i jeszcze jednego warunku związanego z porządkiem Katětova istnieje przestrzeń Hindmana, która nie jest $\mathcal{I}$-przestrzenią (Twierdzenie 4.17).

Definicja 4.12 ([49, str. 1598])**.** Nieskończony zbiór $D \subseteq \omega$ jest *rzadki*, jeżeli dla każdego $x \in FS(D)$ istnieje jedyny, skończony zbiór $F \subseteq D$ taki, że

$$x = \sum_{i \in F} i.$$

Rzadki zbiór D jest *bardzo rzadki*, gdy

$$\forall_{F,F' \in [D]^{<\omega}} \left(F \cap F' \neq \emptyset \implies \sum_{i \in F} i + \sum_{i \in F'} i \notin FS(D) \right).$$

Dowód poniższego lematu znajduje się w pracy [40, Lemma 2.3], ale przedstawimy inny dowód, który autorowi wydaje się łatwiejszy.

Lemat 4.13. Dla każdego nieskończonego zbioru $D \subseteq \omega$ istnieje nieskończony bardzo rzadki zbiór $D' \subseteq D$.

Dowód. Niech $D \subseteq \omega$ będzie nieskończonym zbiorem. Indukcyjnie wybieramy $d_i \in D$ w taki sposób, że

$$d_n > 2 \sum_{i<n} d_i.$$

Definiujemy $D' = \{d_i : i \in \omega\}$. Zatem $D' \subseteq D$. Pokażemy, że D' jest rzadki. Niech $x \in FS(D)$ i $F, F' \in [D]^{<\omega}$. Zakładamy, dążąc do sprzeczności, że $F \neq F'$, ale

$$x = \sum_{i \in F} i = \sum_{i \in F'} i.$$

Wtedy

$$\sum_{i \in F \setminus F'} i = \sum_{i \in F' \setminus F} i.$$

Skoro $(F \setminus F') \cap (F' \setminus F) = \emptyset$, to bez straty ogólności możemy założyć, że $d_n = \max(F \setminus F') > \max(F' \setminus F)$. Zauważmy, że

$$\sum_{i \in F' \setminus F} i \leqslant \sum_{i<n} d_i < d_n \leqslant \sum_{i \in F \setminus F'} i.$$

Zatem $F = F'$.

Następnie pokażemy indukcyjnie, że D' jest bardzo rzadki. Dla pierwszego kroku indukcyjnego, kiedy $F, F' \subseteq \{d_0\}$ i $F \cap F' \neq \emptyset$, to $F = F' = \{d_0\}$ i

$$\sum_{i \in F} i + \sum_{i \in F'} i = 2d_0 < d_1.$$

Otrzymujemy

$$\sum_{i \in F} i + \sum_{i \in F'} i \notin FS(D').$$

Załóżmy teraz, że dla jakiegoś $n \in \omega$, jeżeli $F, F' \subseteq \{d_i : i < n\}$ i $F \cap F' \neq \emptyset$, wtedy

$$\sum_{i \in F} i + \sum_{i \in F'} i \notin FS(D').$$

Ustalmy $F, F' \subseteq \{d_i : i \leqslant n\}$ takie, że $F \cap F' \neq \emptyset$.

Istnieją dwie możliwości: albo $\max(F \cup F') < d_n$ i przez założenie indukcyjne

$$\sum_{i \in F} i + \sum_{i \in F'} i \notin FS(D'),$$

albo $\max(F \cup F') = d_n$. W drugim przypadku zauważmy, że

$$\sum_{i \in F} i + \sum_{i \in F'} i \leqslant 2 \sum_{i \leqslant n} d_i < d_{n+1}.$$

Co więcej, jeżeli $d_n \in F \cap F'$, wtedy

$$\sum_{i \in F} i + \sum_{i \in F'} i \geqslant 2d_n > \sum_{i \leqslant n} d_i.$$

Zatem

$$\sum_{i \in F} i + \sum_{i \in F'} i \notin FS(D').$$

Z innej strony, kiedy $d_n \in F \setminus F'$, to zakładamy, dążąc do sprzeczności, że

$$\sum_{i \in F} i + \sum_{i \in F'} i \in FS(D').$$

W tym przypadku, skoro

$$\sum_{i \in F} i + \sum_{i \in F'} i < d_{n+1},$$

to

$$\sum_{i \in F} i + \sum_{i \in F'} i \in FS(\{d_i : i \leqslant n\}) = \{d_n\} \cup FS(\{d_i : i < n\}) \cup (d_n + FS(\{d_i : i < n\})).$$

Dlatego, że
$$d_n > 2 \sum_{i<n} d_i$$
i $d_n \in F \setminus F'$, to dostajemy
$$\sum_{i\in F} i + \sum_{i\in F'} i \in d_n + FS(\{d_i : i < n\}),$$
to znaczy
$$\sum_{i\in F\setminus\{d_n\}} i + \sum_{i\in F'} i \in FS(\{d_i : i < n\}).$$
Sprzeczność z założeniem indukcyjnym, więc D' jest bardzo rzadki.

$\square$

Lemat 4.14. Niech $D_i \in [\omega]^\omega$ dla każdego $i \in \omega$ będą takie, że zbiór D_0 jest bardzo rzadki i $FS(D_0) \supseteq FS(D_1) \supseteq \ldots$. Wtedy istnieje nieskończony zbiór E taki, że $FS(E) \subseteq FS(D_0)$ i dla każdego $n \in \omega$ istnieje $k \in \omega$ takie, że $FS(E \setminus \{0, 1, \ldots, k-1\}) \subseteq FS(D_n)$.

Dowód. Skoro D_0 jest bardzo rzadki, to dla każdego $x \in FS(D_0)$ istnieje jedyny $F(x) \in [D_0]^{<\omega}$ taki, że
$$x = \sum_{i\in F(x)} i.$$
Wybierzmy $e_0 \in D_0$, $e_1 \in FS(D_1) \setminus \{x \in FS(D_0) : F(x) \cap F(e_0) \neq \emptyset\}$ i
$$e_n \in FS(D_n) \setminus \left\{x \in FS(D_0) : \underset{i<n}{\exists}\, F(x) \cap F(e_i) \neq \emptyset\right\}$$
dla każdego $n > 1$. To jest możliwe, ponieważ
$$\left\{x \in FS(D_0) : \underset{i<n}{\exists}\, F(x) \cap F(e_i) \neq \emptyset\right\} = \bigcup_{i<n} \bigcup_{k\in F(e_i)} \{x \in FS(D_0) : k \in F(x)\} \in \mathcal{H}_{\restriction FS(D_0)}$$
dla każdego $n \in \omega$, a ponieważ zbiór D_0 jest bardzo rzadki, więc jest to skończona suma zbiorów z ideału $\mathcal{H}$.

Definiujemy $E = \{e_i : i \in \omega\}$. Wtedy E jest nieskończony. Potrzebujemy sprawdzić, że E spełnia żądane warunki.

Niech $x \in FS(E)$. Wtedy istnieje skończony zbiór $F \subseteq \omega$ taki, że
$$x = \sum_{i\in F} e_i.$$
Skoro $F(e_i)$ są parami rozłączne, dostajemy $x \in FS(D_0)$. Zatem $FS(E) \subseteq FS(D_0)$.

Ustalmy $n \in \omega$ i niech $x \in FS(E \setminus \{0, 1, \ldots, e_n - 1\})$. Wtedy istnieje skończony $F \subseteq \omega \setminus \{0, 1, \ldots, n-1\}$ taki, że
$$x = \sum_{i\in F} e_i.$$
Przypomnijmy, że każdy e_i dla $i \geqslant n$ jest w $FS(D_n)$. Zatem, dla każdego $i \in F$ możemy znaleźć skończony zbiór $T_i \subseteq D_n$ taki, że
$$e_i = \sum_{d\in T_i} d.$$
Zauważmy, że $F(d) \cap F(d') = \emptyset$ dla wszystkich $d, d' \in D_n$ ($d \neq d'$), bo inaczej dostalibyśmy $d + d' \in FS(D_n) \setminus FS(D_0)$ (gdyż zbiór D_0 jest bardzo rzadki), co przeczy $FS(D_0) \supseteq FS(D_n)$. Twierdzimy, że zbiory T_i są parami rozłączne. Jeżeli $d \in T_i \cap T_j \subseteq D_n$ dla jakichś $i, j \in F$, wtedy
$$F(d) \subseteq \bigcup_{d'\in T_i} F(d') = F(e_i)$$

i

$$F(d) \subseteq \bigcup_{d' \in T_j} F(d') = F(e_j)$$

(ponieważ $F(x)$ są jedyne). Z tego otrzymujemy, że $F(e_i) \cap F(e_j) \neq \emptyset$, co implikuje $e_i + e_j \notin FS(D_0)$ (bo zbiór D_0 jest bardzo rzadki). Sprzeczność z faktem, że $FS(E) \subseteq FS(D_0)$. Skoro zbiory $T_i \in [D_n]^{<\omega}$ są parami rozłączne, to

$$x = \sum_{i \in F} \sum_{d \in T_i} d \in FS(D_n).$$

□

Lemat 4.15. Niech $D \subseteq \omega$ będzie nieskończonym zbiorem i $A_n \in \mathcal{H}$ dla każdego $n \in \omega$. Wtedy istnieje nieskończony zbiór $D' \subseteq \omega$ taki, że $FS(D') \subseteq FS(D)$ i dla każdego $n \in \omega$ istnieje $k \in \omega$ takie, że $FS(D' \setminus \{0, 1, \ldots, k-1\}) \cap A_n = \emptyset$.

Dowód. Wykorzystując Lemat 4.13, bez straty ogólności możemy założyć, że D jest bardzo rzadki. Skoro $A_0 \in \mathcal{H}$, to zbiór $FS(D) \setminus A_0$ zawiera $FS(D_0)$ dla jakiegoś nieskończonego zbioru $D_0 \subseteq \omega$. Podobnie, zbiór $FS(D_0) \setminus A_1$ zawiera $FS(D_1)$ dla jakiegoś nieskończonego zbioru $D_1 \subseteq \omega$. Zatem możemy indukcyjnie zdefiniować ciąg zbiorów $D_n \in [\omega]^\omega$ taki, że $FS(D) \supseteq FS(D_0) \supseteq FS(D_1) \supseteq \ldots$ i $FS(D_i) \cap A_i = \emptyset$ dla każdego $i \in \omega$. Stosując Lemat 4.14 dostajemy nieskończony zbiór E taki, że dla każdego $n \in \omega$ istnieje $k \in \omega$ takie, że $FS(E \setminus \{0, 1, \ldots, k-1\}) \subseteq FS(D_n)$. Niech k_0 będzie takie, że $FS(E \setminus \{0, 1, \ldots, k_0 - 1\}) \subseteq FS(D_0)$. Definiujemy $D' = E \setminus \{0, 1, \ldots, k_0 - 1\}$. Wtedy $FS(D') = FS(E \setminus \{0, 1, \ldots, k_0 - 1\}) \subseteq FS(D_0) \subseteq FS(D)$. Co więcej, dla $n \in \omega$, skoro istnieje $k \in \omega$ takie, że $FS(E \setminus \{0, 1, \ldots, k-1\}) \subseteq FS(D_n)$, to $FS(D' \setminus \{0, 1, \ldots, k-1\}) \subseteq FS(E \setminus \{0, 1, \ldots, k-1\}) \subseteq FS(D_n)$. Zatem $FS(D' \setminus \{0, 1, \ldots, k-1\}) \cap A_n = \emptyset$.

□

Przypomnimy definicję przestrzeni T_1 i będziemy mogli sformułować twierdzenie.

Definicja 4.16. Przestrzeń topologiczna X jest T_1, jeśli dla dowolnych dwóch punktów $x, y \in X$ istnieje taki zbiór otwarty $U \subseteq X$, że $x \in U$, ale $y \notin U$.

Twierdzenie 4.17. Załóżmy, że CH zachodzi. Jeżeli $\mathcal{I} \not\leq_K \mathcal{H}$, wtedy istnieje T_1, ośrodkowa przestrzeń Hindmana, która nie jest $\mathcal{I}$-przestrzenią.

Dowód. Używając CH, zapisujemy listę $\langle (H_\alpha, f_\alpha) : \alpha < \mathfrak{c} \rangle$ wszystkich par zbiorów $H_\alpha \notin \mathcal{H}$ i funkcji $f_\alpha : H_\alpha \to \omega$ spełniających $f_\alpha^{-1}[\{n\}] \in \mathcal{H}$ dla każdego $n \in \omega$.

Konstruujemy ciąg $\langle D_\alpha : \alpha < \mathfrak{c} \rangle$ nieskończonych podzbiorów ω taki, że dla każdego $\alpha < \mathfrak{c}$ mamy: $FS(D_\alpha) \subseteq H_\alpha$, $f_\alpha[FS(D_\alpha)] \in \mathcal{I}$ i zachodzi jeden z następujących warunków:

$$\forall_{\beta < \alpha} \forall_{i \in \omega} \exists_{k \in \omega} f_\alpha[FS(D_\alpha \setminus \{0, 1, \ldots, k-1\})] \cap (\{0, 1, \ldots, i-1\} \cup f_\beta[FS(D_\beta \setminus \{0, 1, \ldots, k-1\})]) = \emptyset \tag{W1}$$

lub

$$\exists_{\beta < \alpha} \forall_{k \in \omega} \exists_{n \in \omega} f_\alpha[FS(D_\alpha \setminus \{0, 1, \ldots, n-1\})] \subseteq f_\beta[FS(D_\beta \setminus \{0, 1, \ldots, k-1\})] \setminus \{0, 1, \ldots, k-1\}. \tag{W2}$$

Załóżmy, że $\alpha < \mathfrak{c}$ i D_β zostały wybrane dla każdego $\beta < \alpha$. Skoro $\mathcal{H}$ jest jednorodny (zobacz [54, Example 2.6]) i $\mathcal{I} \not\leq_K \mathcal{H}$, to istnieje $C \in \mathcal{I}$ taki, że $f_\alpha^{-1}[C] \notin \mathcal{H}_{\restriction H_\alpha}$. Znajdziemy nieskończony $D \subseteq \omega$ taki, że $FS(D) \subseteq H_\alpha$ i $f_\alpha[FS(D)] \subseteq C$. Korzystając z Lematu 4.13 możemy założyć, że D jest bardzo rzadki.

Mamy dwa przypadki:

$$\forall_{D' \in [\omega]^\omega} \forall_{\beta<\alpha} \left(FS(D') \subseteq FS(D) \implies \exists_{k\in\omega} FS(D') \setminus f_\alpha^{-1}[f_\beta[FS(D_\beta \setminus \{0,1,\ldots,k-1\})]] \notin \mathcal{H} \right) \tag{P1}$$

lub

$$\exists_{D' \in [\omega]^\omega} \exists_{\beta<\alpha} \left(FS(D') \subseteq FS(D) \wedge \forall_{k\in\omega} FS(D') \setminus f_\alpha^{-1}[f_\beta[FS(D_\beta \setminus \{0,1,\ldots,k-1\})]] \in \mathcal{H} \right). \tag{P2}$$

W pierwszym przypadku, biorąc pod uwagę, że α jest przeliczalna, niech $\alpha \times \omega = \{(\beta_n, i_n) : n \in \omega\}$. Używając warunku (P1) i faktu, że dla każdego $i \in \omega$ mamy $f_\alpha^{-1}[\{0,1,\ldots,i-1\}] \in \mathcal{H}$, możemy skonstruować ciąg $\langle E_n : n \in \omega \rangle$ nieskończonych podzbiorów ω taki, że

1. $$FS(E_0) \subseteq FS(D),$$

2. $$\forall_{n\in\omega} FS(E_{n+1}) \subseteq FS(E_n),$$

3. $$\forall_{n\in\omega} \exists_{k\in\omega} FS(E_n) \cap f_\alpha^{-1}[\{0,1,\ldots,i_n-1\} \cup f_{\beta_n}[FS(D_{\beta_n} \setminus \{0,1,\ldots,k-1\})]] = \emptyset.$$

Teraz używając Lematu 4.14 znajdziemy nieskończony zbiór $E' \subseteq \omega$ taki, że $FS(E') \subseteq FS(D)$ i dla każdego $n \in \omega$ istnieje $l \in \omega$ taki, że $FS(E' \setminus \{0,1,\ldots,l-1\}) \subseteq FS(E_n)$.

Zauważmy, że dla $D_\alpha = E'$ otrzymujemy: $FS(D_\alpha) \subseteq FS(D) \subseteq H_\alpha$, $f_\alpha[FS(D_\alpha)] \subseteq f_\alpha[FS(D)] \subseteq C \in \mathcal{I}$ i (W1).

Rozważmy drugi przypadek. Niech $D' \in [\omega]^\omega$ i $\beta < \alpha$ będą takie, że $FS(D') \subseteq FS(D)$ i $FS(D') \setminus f_\alpha^{-1}[f_\beta[FS(D_\beta \setminus \{0,1,\ldots,k-1\})]] \in \mathcal{H}$ dla każdego $k \in \omega$. Skoro dla każdego $i \in \omega$ mamy $f_\alpha^{-1}[\{0,1,\ldots,i-1\}] \in \mathcal{H}$, to

$$FS(D') \setminus f_\alpha^{-1}[f_\beta[FS(D_\beta \setminus \{0,1,\ldots,k-1\})] \setminus \{0,1,\ldots,k-1\}] =$$

$$= (FS(D') \setminus f_\alpha^{-1}[f_\beta[FS(D_\beta \setminus \{0,1,\ldots,k-1\})]]) \cup (FS(D') \cap f_\alpha^{-1}[\{0,1,\ldots,k-1\}]) \in \mathcal{H}$$

dla każdego $k \in \omega$. Używając Lematu 4.15, znajdziemy nieskończony zbiór $D'' \subseteq \omega$ taki, że $FS(D'') \subseteq FS(D')$ i dla każdego $k \in \omega$ istnieje $n \in \omega$ taki, że

$$FS(D'' \setminus \{0,1,\ldots,n-1\}) \cap (FS(D') \setminus f_\alpha^{-1}[f_\beta[FS(D_\beta \setminus \{0,1,\ldots,k-1\})] \setminus \{0,1,\ldots,k-1\}]) = \emptyset.$$

Stąd

$$f_\alpha[FS(D'' \setminus \{0,1,\ldots,n-1\})] \subseteq f_\beta[FS(D_\beta \setminus \{0,1,\ldots,k-1\})] \setminus \{0,1,\ldots,k-1\}.$$

Zauważmy, że $D_\alpha = D''$ spełnia: $FS(D_\alpha) \subseteq FS(D') \subseteq FS(D) \subseteq H_\alpha$, $f_\alpha[FS(D_\alpha)] \subseteq f_\alpha[FS(D)] \subseteq C \in \mathcal{I}$ i (W2).

Konstrukcja zbiorów D_α została zakończona.

Zdefiniujemy żądaną przestrzeń. Niech $T = \{\alpha < \mathfrak{c} : D_\alpha$ spełnia (W1)$\}$ i

$$X = \omega \cup \{FS(D_\alpha) : \alpha \in T\} \cup \{\infty\}.$$

Dla każdego $x \in X$ definiujemy rodzinę $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{P}(X)$ następująco:

- $\mathcal{B}(n) = \{\{n\}\}$ dla $n \in \omega$,
- $\mathcal{B}(FS(D_\alpha)) = \{\{FS(D_\alpha)\} \cup f_\alpha[FS(D_\alpha \setminus \{0,1,\ldots,k-1\})] \setminus \{0,1,\ldots,k-1\} : k \in \omega\}$ dla $\alpha \in T$,
- $$\mathcal{B}(\infty) = \left\{ \{\infty\} \cup \bigcup_{\alpha \in T \setminus F} U_\alpha : F \in [T]^{<\omega} \text{ i } U_\alpha \in \mathcal{B}(FS(D_\alpha)) \text{ dla } \alpha \in T \setminus F \right\}.$$

Rodzina $\mathcal{N} = \{\mathcal{B}(x) : x \in X\}$ spełnia:

- dla każdego $x \in X$ mamy $\mathcal{B}(x) \neq \emptyset$ i jeżeli $U \in \mathcal{B}(x)$, wtedy $x \in U$;
- dla każdego $x \in X$, jeżeli $U, U' \in \mathcal{B}(x)$, wtedy istnieje $V \in \mathcal{B}(x)$ taki, że $V \subseteq U \cap U'$;
- jeżeli $x, y \in X$ są takie, że $y \in U$ dla jakiegoś $U \in \mathcal{B}(x)$, wtedy istnieje $V \in \mathcal{B}(y)$ taki, że $V \subseteq U$.

Zatem $\mathcal{N}$ jest układem otoczeń (zobacz na przykład [15, Proposition 1.2.3]). Twierdzimy, że X z topologią utworzoną przez $\mathcal{N}$ jest przestrzenią topologiczną, której szukamy.

Po pierwsze, zauważmy, że X jest ośrodkowa (ponieważ ω jest przeliczalnym, gęstym podzbiorem X) i T_1.

Teraz pokażemy, że X jest przestrzenią Hindmana. Ustalmy $f : \omega \to X$. Jeżeli istnieje $x \in X$ taki, że $f^{-1}[\{x\}] \notin \mathcal{H}$, wtedy znajdziemy $D \in [\omega]^\omega$ taki, że $FS(D) \subseteq f^{-1}[\{x\}]$. Zauważmy, że $\langle f(n) \rangle_{n \in FS(D)}$ IP-zbiega do x. Zatem możemy założyć, że $f^{-1}[\{x\}] \in \mathcal{H}$ dla każdego $x \in X$. Istnieją dwa przypadki: $f^{-1}[X \setminus \omega] \notin \mathcal{H}$ lub $f^{-1}[\omega] \notin \mathcal{H}$.

Jeżeli $f^{-1}[X \setminus \omega] \notin \mathcal{H}$, wtedy znajdziemy $D \in [\omega]^\omega$ taki, że $FS(D) \subseteq f^{-1}[X \setminus \omega]$. Skoro $f^{-1}[\{x\}] \in \mathcal{H}$ dla każdego $x \in X$ i $f^{-1}[\{x\}] \neq \emptyset$ jedynie dla przeliczalnie wielu $x \in X$ (gdyż $|f[\omega]| = \omega$), to używając Lematu 4.15 możemy znaleźć $D' \in [\omega]^\omega$ taki, że $FS(D') \subseteq FS(D)$ i dla każdego $x \in X \setminus \omega$ istnieje $k \in \omega$ takie, że

$$FS(D' \setminus \{0,1,\ldots,k-1\}) \cap f^{-1}[\{x\}] = \emptyset.$$

Skoro dla każdego $U \in \mathcal{B}(\infty)$ istnieje jedynie skończenie wiele $\alpha \in T$ takich, że $FS(D_\alpha) \notin U$ otrzymujemy, że $\langle f(n) \rangle_{n \in FS(D')}$ IP-zbiega do ∞.

Jeżeli $f^{-1}[\omega] \notin \mathcal{H}$, wtedy istnieje $\alpha < \mathfrak{c}$ taki, że $(f^{-1}[\omega], f_{\restriction f^{-1}[\omega]}) = (H_\alpha, f_\alpha)$. Mamy dwa przypadki: $\alpha \in T$ lub $\alpha \notin T$.

Załóżmy, że $\alpha \in T$. Na mocy Lematu 4.13 istnieje bardzo rzadki, nieskończony zbiór $D' \subseteq D_\alpha$. Zauważmy, że

$$FS(D' \setminus \{0,1,\ldots,k-1\}) \subseteq FS(D_\alpha \setminus \{0,1,\ldots,k-1\})$$

dla każdego $k \in \omega$. Ponadto, jeżeli dla każdego $x \in FS(D')$ przez $F(x)$ oznaczymy jedyny skończony podzbiór D', którego sumą jest x, to mamy

$$FS(D') \setminus FS(D' \setminus \{0,1,\ldots,k-1\}) \in \mathcal{H}.$$

Powyższy fakt wynika z tego, że jeśli

$$x_0, x_1, \ldots, x_k \in FS(D') \setminus FS(D' \setminus \{0,1,\ldots,k-1\}) =$$

$$= \{x \in FS(D') : F(x) \cap \{0,1,\ldots,k-1\} \neq \emptyset\},$$

to istnieją $i, j \leqslant k$, $i \neq j$ takie, że $F(x_i) \cap F(x_j) \neq \emptyset$. Wtedy $x_i + x_j \notin FS(D')$ (ponieważ D' jest bardzo rzadkim zbiorem). Zatem

$$FS(D') \setminus FS(D' \setminus \{0, 1, \ldots, k-1\})$$

nie może zawierać $FS(F)$ dla żadnego zbioru F mocy większej niż k.

Skoro $f^{-1}[\{0, 1, \ldots, k-1\}] \in \mathcal{H}$ oraz

$$FS(D') \setminus FS(D' \setminus \{0, 1, \ldots, k-1\}) \in \mathcal{H}$$

dla każdego $k \in \omega$, to na mocy Lematu 4.15 istnieje nieskończony zbiór D'' taki, że $FS(D'') \subseteq FS(D') \subseteq FS(D_\alpha)$ i dla każdego $k \in \omega$ istnieje $n \in \omega$ takie, że

$$FS(D'' \setminus \{0, 1, \ldots, n-1\}) \cap (f^{-1}[\{0, 1, \ldots, k-1\}] \cup FS(D') \setminus FS(D' \setminus \{0, 1, \ldots, k-1\})) = \emptyset.$$

Z faktu, że każdy $U \in \mathcal{B}(FS(D_\alpha))$ jest postaci

$$\{FS(D_\alpha)\} \cup f[FS(D_\alpha \setminus \{0, 1, \ldots, k-1\})] \setminus \{0, 1, \ldots, k-1\}$$

dla jakiegoś $k \in \omega$, otrzymujemy podciąg $\langle f(n) \rangle_{n \in FS(D'')}$ IP-zbieżny do $FS(D_\alpha)$.

Załóżmy, że $\alpha \notin T$. Wtedy istnieje $\beta < \alpha$ taki, że dla każdego $k \in \omega$ istnieje $n \in \omega$ takie, że

$$f_\alpha[FS(D_\alpha \setminus \{0, 1, \ldots, n-1\})] \subseteq f_\beta[FS(D_\beta \setminus \{0, 1, \ldots, k-1\})] \setminus \{0, 1, \ldots, k-1\}.$$

Jeżeli weźmiemy najmniejszy $\beta < \alpha$ z powyższą własnością, wtedy $\beta \in T$, bo gdyby $\beta \notin T$, to istniałaby $\gamma < \beta$ taka, że dla każdego $m \in \omega$ istniałoby $k \in \omega$ takie, że

$$f_\beta[FS(D_\beta \setminus \{0, 1, \ldots, k-1\})] \subseteq f_\gamma[FS(D_\gamma \setminus \{0, 1, \ldots, m-1\})] \setminus \{0, 1, \ldots, m-1\}.$$

Ale wtedy dla γ wiemy, że dla każdego $m \in \omega$ istnieje $k \in \omega$, dla którego istnieje $n \in \omega$ takie, że:

$$f_\alpha[FS(D_\alpha \setminus \{0, 1, \ldots, n-1\})] \subseteq f_\beta[FS(D_\beta \setminus \{0, 1, \ldots, k-1\})] \setminus \{0, 1, \ldots, k-1\} \subseteq$$

$$\subseteq f_\beta[FS(D_\beta \setminus \{0, 1, \ldots, k-1\})] \subseteq f_\gamma[FS(D_\gamma \setminus \{0, 1, \ldots, m-1\})] \setminus \{0, 1, \ldots, m-1\}.$$

Sprzeczność z minimalnością β. Zatem $\langle f(n) \rangle_{n \in FS(D_\alpha)}$ IP-zbiega do $FS(D_\beta) \in X$.

Teraz sprawdzimy, że X nie jest $\mathcal{I}$-przestrzenią. Definiujemy $f : \omega \to X$ przez $f(n) = n$ i ustalamy $B \notin \mathcal{I}$. Twierdzimy, że $\langle f(n) \rangle_{n \in B}$ nie jest zbieżny. Ciąg $\langle f(n) \rangle_{n \in B}$ nie może być zbieżny do żadnego $x \in \omega$. Co więcej, nie może zbiegać do żadnego $FS(D_\alpha)$ skoro

$$U = \{FS(D_\alpha)\} \cup f_\alpha[FS(D_\alpha)]$$

jest otwartym otoczeniem $FS(D_\alpha)$ i $f[B] \setminus U = B \setminus U$ jest nieskończony (bo $B \notin \mathcal{I}$ i $f_\alpha[FS(D_\alpha)] \in \mathcal{I}$).

Pokażemy, że $\langle f(n) \rangle_{n \in B}$ nie może zbiegać do ∞. Skoro B jest nieskończony, to istnieje $\alpha < \mathfrak{c}$ takie, że $H_\alpha = \omega$ i $f_\alpha : H_\alpha \to B$ jest rosnącym ponumerowaniem elementów zbioru B. W szczególności $f_\alpha[H_\alpha] = B$. Mamy dwa przypadki: $\alpha \in T$ lub $\alpha \notin T$.

W pierwszym przypadku $\alpha \in T$. Wtedy $f_\alpha[FS(D_\alpha)] \subseteq B$. Skoro

$$f_\alpha[FS(D_\alpha \setminus \{0, 1, \ldots, k-1\})]$$

jest nieskończony dla każdego $k \in \omega$, to możemy indukcyjnie wybrać

$$c_k \in f_\alpha[FS(D_\alpha \setminus \{0, 1, \ldots, k-1\})] \setminus \{c_i : i < k\}$$

do uzyskania nieskończonego zbioru $C = \{c_k : k \in \omega\}$ takiego, że $C \subseteq B$ i

$$C \setminus f_\alpha[FS(D_\alpha \setminus \{0, 1, \ldots, k-1\})]$$

jest skończony dla każdego $k \in \omega$. Pokażemy, że dla każdego $\beta \in T \setminus \{\alpha\}$ istnieje $U_\beta \in \mathcal{B}(FS(D_\beta))$ taki, że $U_\beta \cap C = \emptyset$. Ustalmy $\beta \in T \setminus \{\alpha\}$. Z warunku (W1) istnieje $k \in \omega$ takie, że

$$f_\alpha[FS(D_\alpha \setminus \{0, 1, \ldots, k-1\})] \cap f_\beta[FS(D_\beta \setminus \{0, 1, \ldots, k-1\})] = \emptyset.$$

Niech

$$k_\beta = \max\{k, \max(C \setminus f_\alpha[FS(D_\alpha \setminus \{0, 1, \ldots, k-1\})])\}.$$

Wtedy

$$U_\beta = \{FS(D_\beta)\} \cup f_\beta[FS(D_\beta \setminus \{0, 1, \ldots, k_\beta - 1\})] \setminus \{0, 1, \ldots, k_\beta - 1\}$$

jest w $\mathcal{B}(FS(D_\beta))$ i $U_\beta \cap C = \emptyset$. Zatem

$$U = \{\infty\} \cup \bigcup_{\beta \in T \setminus \{\alpha\}} U_\beta$$

jest otwartym otoczeniem ∞, które jest rozłączne z C. Skoro $C \in [B]^\omega$, to $\langle f(n) \rangle_{n \in B}$ nie może zbiegać do ∞.

Załóżmy, że $\alpha \notin T$. Wtedy istnieje $\beta < \alpha$ taki, że dla każdego $k \in \omega$ istnieje $n \in \omega$ takie, że

$$f_\alpha[FS(D_\alpha \setminus \{0, 1, \ldots, n-1\})] \subseteq f_\beta[FS(D_\beta \setminus \{0, 1, \ldots, k-1\})].$$

Jeżeli weźmiemy najmniejszy $\beta < \alpha$ z powyższą własnością, wtedy $\beta \in T$. Podobnie jak w pierwszym przypadku, możemy znaleźć nieskończony zbiór $C \subseteq B$ taki, że zbiór

$$C \setminus f_\beta[FS(D_\beta \setminus \{0, 1, \ldots, k-1\})]$$

jest skończony dla każdego $k \in \omega$, więc znajdziemy otwarte otoczenie U z $\mathcal{B}(\infty)$ rozłączne z C. Zatem $\langle f(n) \rangle_{n \in B}$ nie będzie zbiegać do ∞.

□

Poniższy wniosek wynika z Twierdzeń 4.17 i 4.11(2.).

Wniosek 4.18. Załóżmy CH. Jeżeli $\mathcal{I}$ jest P^+-ideałem, to następujące warunki są równoważne:

1. $\mathcal{I} \not\leq_K \mathcal{H}$.
2. Istnieje przestrzeń Hindmana, która nie jest $\mathcal{I}$-przestrzenią.

4.5. *Przestrzeń Hindmana, która nie jest $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$-przestrzenią*

W tym podrozdziale pokażemy, że istnieje przestrzeń Hindmana, która nie jest $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$ - przestrzenią. Dla $x \in FS(C)$, gdzie $C \subseteq \omega$ jest nieskończonym zbiorem rzadkim, przez $\alpha(x)$ będziemy oznaczać skończony podzbiór zbioru C taki, że

$$x = \sum_{i \in \alpha(x)} i.$$

Twierdzenie 4.19.

1. $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}} \not\leqslant_K \mathcal{H}$, tzn., że nie istnieje funkcja $\phi : \omega \to \omega$ taka, że $\phi^{-1}[A] \in \mathcal{H}$ dla każdego $A \in \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$.
2. Załóżmy, że CH zachodzi. Istnieje przestrzeń Hindmana, która nie jest $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$-przestrzenią.

Dowód. Skoro 2. wynika z 1. i Twierdzenia 4.17, to poniżej pokażemy jedynie podpunkt 1.. Niech $\phi : \omega \to \omega$ będzie dowolną funkcją. Pokażemy, że ϕ nie będzie świadczyć o tym, że $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}} \leqslant_K \mathcal{H}$, to znaczy znajdziemy nieskończony zbiór $D \subseteq \omega$ taki, że $\phi[FS(D)] \in \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$. Używając Kanonicznego Twierdzenia Hindmana ([67, Theorem 2.1], zobacz także [37, Theorem 5 na str. 133]), znajdziemy nieskończony zbiór rzadki $C = \{c_n : n \in \omega\} \subseteq \omega$, gdzie $c_n < c_{n+1}$ dla każdego $n \in \omega$ i jeden z następujących pięciu warunków będzie zachodził:

1. $$\underset{x,y\in FS(C)}{\forall} \phi(x) = \phi(y),$$
2. $$\underset{x,y\in FS(C)}{\forall} \phi(x) = \phi(y) \iff \min\alpha(x) = \min\alpha(y),$$
3. $$\underset{x,y\in FS(C)}{\forall} \phi(x) = \phi(y) \iff \max\alpha(x) = \max\alpha(y),$$
4. $$\underset{x,y\in FS(C)}{\forall} \phi(x) = \phi(y) \iff (\min\alpha(x) = \min\alpha(y) \wedge \max\alpha(x) = \max\alpha(y)),$$
5. $$\underset{x,y\in FS(C)}{\forall} \phi(x) = \phi(y) \iff x = y.$$

Przypadek 1. Weźmy $D = C$ i zauważmy, że zbiór $\phi[FS(D)]$ ma jedynie jeden element, więc należy do ideału $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$.
Przypadek 2. Skonstruujemy ściśle rosnący ciąg $\{k_n : n \in \omega\}$ taki, że $\phi(c_{k_n}) > 2^{n+1}$ dla każdego $n \in \omega$.

Załóżmy, że k_i zostały skonstruowane dla $i < n$. Skoro $\alpha(c_k) = \{c_k\}$ dla każdego $k \in \omega$, to $\min\alpha(c_k) \neq \min\alpha(c_l)$ dla różnych $k, l \in \omega$. W konsekwencji $\phi_{\restriction C}$ jest różnowartościowa, więc możemy znaleźć $k_n > k_{n-1}$ takie, że $\phi(c_{k_n}) > 2^{n+1}$. To kończy indukcyjną konstrukcję k_n.

Niech $D = \{c_{k_n} : n \in \omega\}$. Jeżeli pokażemy, że $\phi[FS(D)] \in \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$, wtedy dowód tego przypadku zostanie zakończony. Używając własności c_{k_n}-ów zauważmy, że

$$\phi[c_{k_n} + FS(\{c_{k_i} : i > n\})] = \{\phi(c_{k_n})\}$$

dla każdego $n \in \omega$, więc

$$\sum_{y\in\phi[FS(D)]} \frac{1}{y+1} = \sum_{n\in\omega} \left(\frac{1}{\phi(c_{k_n})+1} + \sum_{y\in\phi[c_{k_n}+FS(\{c_{k_i}:i>n\})]} \frac{1}{y+1} \right) =$$

$$= \sum_{n\in\omega} \left(\frac{1}{\phi(c_{k_n})+1} + \frac{1}{\phi(c_{k_n})+1} \right) \leqslant \sum_{n\in\omega} \frac{2}{2^{n+1}+1} \leqslant \sum_{n\in\omega} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

Przypadek 3. Skonstruujemy ściśle rosnący ciąg $\{k_n : n \in \omega\}$ taki, że $\phi(c_{k_n}) > 2^{n+1}$ dla każdego $n \in \omega$.

Załóżmy, że k_i zostały skonstruowane dla $i < n$. Skoro $\alpha(c_k) = \{c_k\}$ dla każdego $k \in \omega$, to $\max \alpha(c_k) \neq \max \alpha(c_l)$ dla różnych $k, l \in \omega$. W konsekwencji $\phi_{\restriction C}$ jest różnowartościowa, więc możemy znaleźć $k_n > k_{n-1}$ takie, że $\phi(c_{k_n}) > 2^{n+1}$. To kończy indukcyjną konstrukcję k_n.

Niech $D = \{c_{k_n} : n \in \omega\}$. Jeżeli pokażemy, że $\phi[FS(D)] \in \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$, wtedy dowód tego przypadku zostanie zakończony. Używając własności c_{k_n}-ów zauważmy, że

$$\phi[c_{k_n} + FS(\{c_{k_i} : i < n\})] = \{\phi(c_{k_n})\}$$

dla każdego $n \in \omega$, więc

$$\sum_{y\in\phi[FS(D)]} \frac{1}{y+1} = \sum_{n\in\omega} \left(\frac{1}{\phi(c_{k_n})+1} + \sum_{y\in\phi[c_{k_n}+FS(\{c_{k_i}:\, i<n\})]} \frac{1}{y+1} \right) =$$

$$= \sum_{n\in\omega} \left(\frac{1}{\phi(c_{k_n})+1} + \frac{1}{\phi(c_{k_n})+1} \right) \leqslant \sum_{n\in\omega} \frac{2}{2^{n+1}+1} \leqslant \sum_{n\in\omega} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

Przypadek 4. Skonstruujemy ściśle rosnący ciąg $\{k_n : n \in \omega\}$ taki, że

$$\forall_{n\in\omega} \forall_{i<n} \left(\phi(c_{k_n}) > n2^{n+1} \wedge \phi(c_{k_n} + c_{k_i}) > n2^{n+1} \right).$$

Załóżmy, że k_i zostały skonstruowane dla $i < n$. Skoro $\alpha(c_k) = \{c_k\}$ dla każdego $k \in \omega$, to uzyskujemy $\min \alpha(c_k + c_{k_i}) \neq \min \alpha(c_k + c_{k_j})$ oraz $\min \alpha(c_k) \neq \min \alpha(c_k + c_{k_i})$ dla każdego $k > k_{n-1}$ i $i < j \leqslant n-1$. W konsekwencji

$$\phi_{\restriction(\{c_k+c_{k_i}:\, k>k_{n-1},\, i<n\}\cup\{c_k:\, k>k_{n-1}\})}$$

jest różnowartościowa, więc używając zasady szufladkowej Dirichleta, możemy znaleźć $k_n > k_{n-1}$ takie, że $\phi(c_{k_n}) > n2^{n+1}$ i $\phi(c_{k_n} + c_{k_i}) > n2^{n+1}$ dla każdego $i < n$. To kończy indukcyjną konstrukcję k_n.

Niech $D = \{c_{k_n} : n \in \omega\}$. Jeżeli pokażemy, że $\phi[FS(D)] \in \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$, wtedy dowód tego przypadku zostanie zakończony. Używając własności c_{k_n}-ów zauważmy, że

$$\phi[c_{k_m} + FS(\{c_{k_i} : m < i < n\}) + c_{k_n}] = \{\phi(c_{k_m} + c_{k_n})\}$$

dla każdych $m < n$, $m, n \in \omega$, więc

$$\sum_{y\in\phi[FS(D)]} \frac{1}{y+1} =$$

$$= \sum_{n\in\omega} \frac{1}{\phi(c_{k_n})+1} + \sum_{n\in\omega}\sum_{m<n} \frac{1}{\phi(c_{k_m}+c_{k_n})+1} + \sum_{n\in\omega}\sum_{m<n} \left(\sum_{y\in\phi[c_{k_m}+FS(\{c_{k_i}:\, m<i<n\})+c_{k_n}]} \frac{1}{y+1} \right) =$$

$$= \sum_{n\in\omega} \frac{1}{\phi(c_{k_n})+1} + \sum_{n\in\omega}\sum_{m<n} \frac{1}{\phi(c_{k_m}+c_{k_n})+1} + \sum_{n\in\omega}\sum_{m<n} \frac{1}{\phi(c_{k_m}+c_{k_n})+1} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n\in\omega} \frac{1}{n2^{n+1}+1} + 2\sum_{n\in\omega}\sum_{m<n} \frac{1}{n2^{n+1}+1} \leqslant \sum_{n\in\omega} \frac{1}{2^n} + \sum_{n\in\omega} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

Przypadek 5. Skonstruujemy ściśle rosnący ciąg $\{k_n : n \in \omega\}$ taki, że

$$\forall_{n\in\omega} \forall_{x\in FS(\{c_{k_i}:\, i<n\})} \left(\phi(c_{k_n}) > 2^{2n} \wedge \phi(c_{k_n} + x) > 2^{2n} \right).$$

Załóżmy, że k_i zostały skonstruowane dla $i < n$. Niech $m \in \omega$ będzie taki, że $m > 2^{2n}$ i $m > \phi(x)$ dla każdego $x \in FS(\{c_{k_i} : i < n\})$. Skoro $\phi_{\restriction FS(C)}$ jest różnowartościowa, więc zbiór $F = \phi^{-1}[\{0, 1, \ldots, m\}]$ jest skończony. Niech $k_n \in \omega$ będzie taki, że $c_{k_n} > \max F$. Skoro $c_{k_n} > \max F$, to uzyskujemy $c_{k_n} \notin F$ i w konsekwencji $\phi(c_{k_n}) > m > 2^{2n}$. Podobnie, dla każdego $x \in FS(\{c_{k_i} : i < n\})$ mamy $c_{k_n} + x > c_{k_n} > \max F$, więc $\phi(c_{k_n} + x) > m > 2^{2n}$. To kończy indukcyjną konstrukcję k_n.

Niech $D = \{c_{k_n} : n \in \omega\}$. Jeżeli pokażemy, że $\phi[FS(D)] \in \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$, wtedy dowód tego przypadku zostanie zakończony. Używając własności c_{k_n}-ów zauważmy, że

$$\sum_{y \in \phi[FS(D)]} \frac{1}{y+1} = \sum_{n \in \omega} \left(\frac{1}{\phi(c_{k_n}) + 1} + \sum_{x \in FS(\{c_{k_i} : i < n\})} \frac{1}{\phi(c_{k_n} + x) + 1} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n \in \omega} \left(\frac{1}{2^{2n} + 1} + \sum_{x \in FS(\{c_{k_i} : i < n\})} \frac{1}{2^{2n} + 1} \right) \leqslant \sum_{n \in \omega} \left(\frac{1}{2^{2n} + 1} + (2^n - 1) \cdot \frac{1}{2^{2n} + 1} \right) =$$

$$= \sum_{n \in \omega} \frac{2^n}{2^{2n} + 1} \leqslant \sum_{n \in \omega} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

□

Zakończmy nasze rozważania dwoma pytaniami.

Problem 4.20. Czy istnieje przestrzeń różnicowo zwarta, która nie jest przestrzenią Folkmana ($\mathcal{F}$-przestrzenią)?

Problem 4.21. Czy istnieje przestrzeń różnicowo zwarta, która nie jest przestrzenią van der Waerdena ($\mathcal{W}$-przestrzenią)?

5. PORZĄDKI

W tym rozdziale podamy definicje porządków Rudin-Keislera i Rudin-Blassa (definicje pozostałych porządków zostały przedstawione w rozdziale 3). Następnie pokażemy kilka przykładów zachowań ideałów z rozdziałów 2 i 3 w tych porządkach, które udało nam się sprawdzić (to znaczy, napiszemy, czy ideały są ze sobą w wybranym porządku, czy też nie). Wyniki porządków dotyczące ideałów z rozdziału drugiego uzyskane w tej pracy i pracach innych autorów, podsumowuje tabela na końcu rozdziału.

Definicja 5.1. Niech $\mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$ będą ideałami na ω. Mówimy, że $\mathcal{I}$ jest poniżej $\mathcal{J}$ w *porządku Rudin-Keislera* ($\mathcal{I} \leqslant_{RK} \mathcal{J}$), gdy istnieje funkcja $f : \omega \to \omega$ taka, że dla każdego zbioru $A \subseteq \omega$ otrzymujemy: $A \in \mathcal{I} \iff f^{-1}[A] \in \mathcal{J}$.

Definicja 5.2. Niech $\mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$ będą ideałami na ω. Mówimy, że $\mathcal{I}$ jest poniżej $\mathcal{J}$ w *porządku Rudin-Blassa* ($\mathcal{I} \leqslant_{RB} \mathcal{J}$), gdy istnieje $\mathrm{Fin} - 1$ funkcja $f : \omega \to \omega$ taka, że dla każdego zbioru $A \subseteq \omega$ otrzymujemy: $A \in \mathcal{I} \iff f^{-1}[A] \in \mathcal{J}$.

Twierdzenie 5.3. [21, Theorem 6.1] Załóżmy, że $\mathcal{I} \leqslant_{RK} \mathcal{J}$ i ideał $\mathcal{J}$ ma własność FinBW. Wtedy ideał $\mathcal{I}$ ma własność FinBW.

Uwaga 5.4.

W założeniach [21, Theorem 6.1] można zamienić porządek Rudin-Keislera na porządek Katětova.

Stwierdzenie 5.5.

$\mathcal{I}_{\frac{1}{n}} \not\leqslant_K \mathcal{I}_{PS}$.

Dowód. Niech $f : \omega \to \omega$ i załóżmy, że dla każdego $f^{-1}[\{n\}] \in \mathcal{I}_{PS}$. Indukcyjnie zdefiniujemy ciąg liczb naturalnych $\langle b_n \rangle_{n \geqslant 1}$ tak, że:

$$A = \{f(b_n + k) : n \geqslant 1 \wedge k \in \{0, 1 \ldots, n-1\}\} \in \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}.$$

Wtedy $f^{-1}[A] \notin \mathcal{I}_{PS}$, ponieważ spełnia definicję zbioru piecewise syndetic dla stałej $b = 1$. Więc funkcja f nie może świadczyć o tym, że $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}} \leqslant_K \mathcal{I}_{PS}$.

Wybierzemy b_n w taki sposób, że $f(b_n + k) \geqslant 2^n$ dla każdego $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Najpierw wybieramy dowolny b_1, a jak już mamy wybrane b_i dla $i < n$, to $f^{-1}[\{0, 1, \ldots, 2^n\}] \in \mathcal{I}_{PS}$, więc z definicji ideału $\mathcal{I}_{PS}$ dla stałej $b = n$ istnieje $N > 0$ takie, że dla każdego $i \in \omega$ istnieje $k \in \{i, i+1, \ldots, i+N\}$ takie, że mamy $a_{k+1} - a_k > b = n$, gdzie elementy a_i są rosnącym ponumerowaniem zbioru $f^{-1}[\{0, 1, \ldots, 2^n\}]$. Zatem dopełnienie $f^{-1}[\{0, 1, \ldots, 2^n\}]$ zawiera przedział długości n (przedział pomiędzy elementami a_k i a_{k+1} dla dowolnego $k \in \omega$ o powyższej własności). Niech b_n będzie równe minimum tego przedziału.

Mając już utworzone elementy b_n zauważmy, że $A \in \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$, ponieważ

$$\sum_{c \in A} \frac{1}{c+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{f(b_n + k) + 1} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} < \infty.$$

□

Stwierdzenie 5.6.

$\mathcal{ED}_{fin} \sqsubseteq \mathcal{T}$.

Dowód. Szukamy funkcji różnowartościowej (to, że możemy wziąć funkcję różnowartościową zamiast bijekcji, wynika z [4, Lemma 3.3]) $f : \omega \to \Delta$ takiej, że:

$$\underset{A \in \mathcal{ED}_{fin}}{\forall} f^{-1}[A] \in \mathcal{T}.$$

Definiujemy: $d_0 = s_0 = 0$, $d_1 = s_1 = 1$, $d_n = ns_{n-1}$, gdzie

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} d_i,$$

dla $n \geqslant 2$. Niech $I_0 = \emptyset$ i $I_n = \{s_{n-1}, \ldots, s_n - 1\}$ dla $n \geqslant 1$. Rozpatrujemy taką funkcję $f : \omega \to \omega \times \omega$, że $f[I_n] = \{d_n\} \times \{0, 1, \ldots, d_n - 1\} \subseteq \Delta$ dla każdego $n \geqslant 1$.

Pokażemy, że dla każdego zbioru $B = \{b_i : i \geqslant 1\}$ takiego, że $b_n \in I_n$ dla każdego $n \geqslant 1$, B należy do ideału $\mathcal{T}$ jako suma dwóch zbiorów cienkich: $B_1 = \{b_{2n+1} : n \in \omega\}$ i $B_2 = \{b_{2n} : n \in \omega\}$.

Sprawdzamy, że zbiór B_1 jest cienki. Dla $n \geqslant 1$ otrzymujemy

$$\frac{b_{2n-1}}{b_{2n+1}} \leqslant \frac{b_{2n-1}}{b_{2n-1} + d_{2n}} = \frac{1}{1 + \frac{d_{2n}}{b_{2n-1}}}.$$

Pokażemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{d_{2n}}{b_{2n-1}}} = 0$$

przez sprawdzenie, że zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d_{2n}}{b_{2n-1}} = \infty.$$

Uzyskujemy

$$\frac{d_{2n}}{b_{2n-1}} = \frac{2n \cdot s_{2n-1}}{b_{2n-1}} \geqslant 2n.$$

Zatem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d_{2n}}{b_{2n-1}} = \infty.$$

Czyli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{2n-1}}{b_{2n+1}} = 0,$$

więc zbiór B_1 jest cienki. Podobnie sprawdza się, że zbiór B_2 jest cienki.

Niech $A \in \mathcal{ED}_{fin}$. Z definicji ideału $\mathcal{ED}_{fin}$ istnieje $m \in \omega$ takie, że $|A_{(n)}| < m$ dla każdego $n \in \omega$. Zatem $f^{-1}[A]$ składa się z mniej niż m zbiorów B, które mają po jednym punkcie wspólnym z przedziałami I_n, więc $f^{-1}[A] \in \mathcal{T}$ jako suma skończenie wielu zbiorów należących do $\mathcal{T}$.

□

Postawimy teraz kilka pytań związanych z porządkiem Katětova i ideałami pojawiającymi się w tej pracy.

Problem 5.7. Czy $\mathcal{W} \not\leqslant_K \mathcal{H}$?

Problem 5.8. Czy $\mathcal{D}_{fin} \not\leqslant_K \mathcal{I}_{PS}$?

Problem 5.9. Czy $\mathcal{D}_{fin} \not\leqslant_K \mathcal{I}_d$?

Problem 5.10. Czy $\mathcal{I}_{PS} \not\leqslant_K \mathcal{I}_d$?

Na następnej stronie prezentujemy tabelę podsumowującą zależności między rozważanymi w rozprawie ideałami w porządkach: $\subseteq$, $=$, $\sqsubseteq$, $\cong$, $\leqslant_{RK}$, $\leqslant_{RB}$, $\leqslant_{KB}$, $\leqslant_K$.

Jeżeli w i-tym wierszu i j-tej kolumnie tabeli pojawia się np. symbol $\leqslant_K$, to znaczy, że ideał z i-tego wiersza jest poniżej ideału z j-tej kolumny w porządku $\leqslant_K$. W tabelce podajemy także cytowania - niektóre z nich odnoszą się wprost do dowodów danej tezy, a niektóre do faktów, z których możemy wywnioskować, czy dane ideały są ze sobą w wybranym porządku. Czasami trzeba łączyć wiele faktów ze sobą i dla przejrzystości tabelki postanowiliśmy wpisać tylko cytowania do tych mniej znanych. Poniżej postaramy się przedstawić z jakich rzeczy skorzystaliśmy poza przechodniością porządków i symetrią izomorfizmu.

Oto lista prac z faktami, które wykorzystaliśmy realizując poniższą tabelkę.

- Dla $\mathcal{T} \not\leqslant_K \mathrm{Fin}$ (i pierwszej kolumny): [4, Lemma 3.1(2)].
- Dla $\mathcal{L} \not\leqslant_K \mathcal{F}$, $\mathcal{L} \not\leqslant_K \mathcal{W}$, $\mathcal{L} \not\leqslant_K \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$ (dla pozostałych ideałów możemy skorzystać z przechodniości porządku Katětova): [21, Theorem 6.1], [48, Lemma 3.2] i Uwaga 5.4. Z [48, Lemma 3.2] otrzymujemy, że $\mathcal{L}$ nie ma własności FinBW. Wtedy [21, Theorem 6.1] i Uwaga 5.4 dają nam: $\mathcal{L} \not\leqslant_K \mathcal{F}$, $\mathcal{L} \not\leqslant_K \mathcal{W}$, $\mathcal{L} \not\leqslant_K \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$, bo ideały $\mathcal{F}$, $\mathcal{W}$ i $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$ mają własność FinBW.
- Dla $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}} \not\leqslant_{RK} \mathcal{I}_d$: [58, Theorem 7], [42, akapit przed Theorem 1.2]. W [58, Theorem 7] autorzy pokazali, że $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$ nie jest poniżej $\mathcal{I}_d$ w porządku Tukeya. Wtedy [42, akapit przed Theorem 1.2] pokazuje, że $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}} \not\leqslant_{RK} \mathcal{I}_d$.
- Dla $\mathcal{T} \not\leqslant_{RK} \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$, $\mathcal{A} \not\leqslant_{RK} \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$, $\mathcal{D}_{fin} \not\leqslant_{RK} \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$, $\mathcal{F} \not\leqslant_{RK} \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$, $\mathcal{W} \not\leqslant_{RK} \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$, $\mathcal{A} \not\leqslant_{RK} \mathcal{I}_d$, $\mathcal{D}_{fin} \not\leqslant_{RK} \mathcal{I}_d$, $\mathcal{F} \not\leqslant_{RK} \mathcal{I}_d$, $\mathcal{W} \not\leqslant_{RK} \mathcal{I}_d$, $\mathcal{T} \not\leqslant_{RK} \mathcal{I}_d$, $\mathcal{L} \not\leqslant_{RK} \mathcal{I}_d$, $\mathcal{I}_u \not\leqslant_{RK} \mathcal{I}_d$, $\mathcal{I}_{PS} \not\leqslant_{RK} \mathcal{I}_d$: [42, Theorem 1.2(3) i akapit przed tym twierdzeniem] - wykorzystując, że $\mathrm{add}^*(\mathcal{I}) \geqslant \omega_1$ dla P-ideału i $\mathrm{add}^*(\mathcal{I}) = \omega$ dla $\mathcal{I}$, który nie jest P-ideałem.
- Dla $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}} \not\leqslant_K \mathcal{I}_u$: [12, Fact 6.11].
- Dla $\mathcal{W} \not\leqslant_K \mathcal{A}$: [31, Theorem 2.4], [33, Corollary 2.1.9], [11, str. 210], [26, Theorem 3.4]. W [31, Theorem 2.4] autorka pokazała, że przy założeniu $MA_{przeliczalny}$ istnieje $\mathcal{W}$-ultrafiltr, który nie jest Q-punktem. W [26, Theorem 3.4] Flašková udowodniła, że Q-punkt i słaby $\mathcal{A}$-ultrafiltr są tym samym. Zatem przy założeniu $MA_{przeliczalny}$ istnieje $\mathcal{W}$-ultrafiltr, który nie jest $\mathcal{A}$-ultrafiltrem. Stosując kolejno [33, Corollary 2.1.9] i [11, str. 210] dostajemy $\mathcal{W} \not\leqslant_K \mathcal{A}$.
- Dla $\mathrm{Fin} \leqslant_{RB} \mathcal{T}$ (i pierwszego wiersza): [16, str. 12].
- Dla $\mathcal{D} \not\leqslant_K \mathcal{I}_d$ i $\mathcal{D} \not\leqslant_K \mathcal{I}_{PS}$: [43, str. 837], [17]. W [17] autorzy pokazali, że $\mathrm{Fin}^2 \leqslant_K \mathcal{D}$, a z [43, str. 837] otrzymujemy, że $\mathrm{Fin}^2 \not\leqslant_K \mathcal{I}_d$ i $\mathrm{Fin}^2 \not\leqslant_K \mathcal{I}_{PS}$. Z przechodniości $\mathcal{D} \not\leqslant_K \mathcal{I}_d$ i $\mathcal{D} \not\leqslant_K \mathcal{I}_{PS}$.
- Dla $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{T}$: [26, Theorem 3.4], [18, Theorem 4.3(3)], [11, str. 210] i Stwierdzenie 5.6. Z [26, Theorem 3.4] $\mathcal{ED}_{fin}$-punkty i $\mathcal{A}$-punkty są tym samym. Stosując [18, Theorem 4.3(3)] otrzymujemy $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{ED}_{fin}$ zakładając CH. Ze Stwierdzenia 5.6, przechodniości porządku i [11, str. 210] (bo porządek $\sqsubseteq$ też jest absolutny dla ideałów borelowskich) dostajemy $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{T}$.
- Dla $\mathcal{H} \not\leqslant_K \mathcal{D}$: [17].

Tabela 5.1: Porządki

	Fin	$\mathcal{T}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}_{fin}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{H}$	$\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{I}_u$	$\mathcal{I}_d$	$\mathcal{I}_{PS}$
Fin	$=$	$\subset$, $\leqslant_{RB}$ [16], $\ncong$	$\subset$, $\leqslant_{RB}$ [16], $\ncong$	$\subset$, $\leqslant_{RB}$ [16], $\ncong$	$\subset$, $\leqslant_{RB}$ [16], $\ncong$	$\subset$, $\leqslant_{RB}$ [16], $\ncong$	$\subset$, $\leqslant_{RB}$ [16], $\ncong$	$\subset$, $\leqslant_{RB}$ [16], $\ncong$	$\subset$, $\leqslant_{RB}$ [16], $\ncong$	$\subset$, $\leqslant_{RB}$ [16], $\ncong$	$\subset$, $\leqslant_{RB}$ [16], $\ncong$	$\subset$, $\leqslant_{RB}$ [16], $\ncong$	$\subset$, $\leqslant_{RB}$ [16], $\ncong$
$\mathcal{T}$	$\nleqslant_K$ [4]	$=$	$\subset$, $\ncong$	$\subset$, $\ncong$	$\subset$, $\ncong$	$\subset$, $\ncong$	$\subset$, $\ncong$	$\subset$, $\ncong$	$\subset$, $\nleqslant_{RK}$ [42]	$\subset$, $\ncong$	$\subset$, $\ncong$	$\subset$, $\nleqslant_{RK}$ [42]	$\subset$, $\ncong$
$\mathcal{A}$	$\nleqslant_K$ [4]	$\not\subset$, $\ncong$, $\sqsubseteq$ [26]	$=$	$\subset$, $\ncong$	$\subset$, $\ncong$	$\subset$, $\ncong$	$\subset$, $\ncong$	$\subset$, $\ncong$	$\subset$, $\nleqslant_{RK}$ [42]	$\subset$, $\ncong$	$\subset$, $\ncong$	$\subset$, $\nleqslant_{RK}$ [42]	$\subset$, $\ncong$
$\mathcal{L}$	$\nleqslant_K$ [4]	$\nleqslant_K$	$\nleqslant_K$ [21]	$=$	$\subset$, $\ncong$	$\nleqslant_K$ [21]	$\nleqslant_K$ [21]	$\subset$, $\ncong$	$\nleqslant_K$ [21]	$\nleqslant_K$ [21]	$\subset$	$\subset$, $\nleqslant_{RK}$ [42]	$\subset$
$\mathcal{D}$	$\nleqslant_K$ [4]	$\nleqslant_K$	$\nleqslant_K$ [21]	$\nleqslant_K$	$=$	$\nleqslant_K$ [21]	$\nleqslant_K$ [21]	$\subset$, $\ncong$	$\nleqslant_K$ [21]	$\nleqslant_K$ [21]	$\nleqslant_K$	$\nleqslant_K$ [43] [17]	$\nleqslant_K$ [43] [17]
$\mathcal{D}_{fin}$	$\nleqslant_K$ [4]	$\nleqslant_K$	$\nleqslant_K$	$\not\subset$, $\ncong$	$\subset$, $\ncong$	$=$	$\subset$, $\neq$	$\subset$, $\ncong$	$\not\subset$, $\nleqslant_{RK}$ [42]	$\not\subset$	$\not\subset$, $\ncong$	$\not\subset$, $\nleqslant_{RK}$ [42]	$\not\subset$, $\ncong$
$\mathcal{F}$	$\nleqslant_K$ [4]	$\nleqslant_K$	$\nleqslant_K$	$\not\subset$, $\ncong$	$\not\subset$, $\ncong$	$\not\subset$	$=$	$\subset$, $\ncong$	$\not\subset$, $\nleqslant_{RK}$ [42]	$\not\subset$	$\not\subset$, $\ncong$	$\not\subset$, $\nleqslant_{RK}$ [42]	$\not\subset$, $\ncong$
$\mathcal{H}$	$\nleqslant_K$ [4]	$\nleqslant_K$	$\nleqslant_K$ [21]	$\nleqslant_K$	$\nleqslant_K$ [17]	$\nleqslant_K$ [21]	$\nleqslant_K$ [21]	$=$	$\nleqslant_K$ [21]	$\nleqslant_K$ [21]	$\nleqslant_K$	$\nleqslant_K$	$\nleqslant_K$
$\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$	$\nleqslant_K$ [4]	$\nleqslant_K$	$\nleqslant_K$	$\nleqslant_K$	$\nleqslant_K$	$\nleqslant_K$	$\nleqslant_K$	$\nleqslant_K$	$=$	$\nleqslant_K$	$\nleqslant_K$ [12]	$\subset$, $\nleqslant_{RK}$ [58]	$\nleqslant_K$
$\mathcal{W}$	$\nleqslant_K$ [4]	$\nleqslant_K$	$\nleqslant_K$ [31] [26]	$\not\subset$, $\ncong$	$\not\subset$, $\ncong$	$\not\subset$	$\not\subset$	$\not\subset$, $\ncong$	$\nleqslant_{RK}$ [42]	$=$	$\subset$, $\ncong$	$\subset$, $\nleqslant_{RK}$ [42]	$\subset$, $\ncong$
$\mathcal{I}_u$	$\nleqslant_K$ [4]	$\nleqslant_K$	$\nleqslant_K$ [21]	$\not\subset$	$\not\subset$, $\ncong$	$\nleqslant_K$ [21]	$\nleqslant_K$ [21]	$\not\subset$, $\ncong$	$\nleqslant_K$ [21]	$\nleqslant_K$ [21]	$=$	$\subset$, $\nleqslant_{RK}$ [42]	$\subset$ $\neq$
$\mathcal{I}_d$	$\nleqslant_K$ [4]	$\nleqslant_K$	$\nleqslant_K$ [21]	$\nleqslant_K$	$\nleqslant_K$	$\nleqslant_K$ [21]	$\nleqslant_K$ [21]	$\nleqslant_K$	$\nleqslant_K$ [21]	$\nleqslant_K$ [21]	$\nleqslant_K$	$=$	$\nleqslant_K$
$\mathcal{I}_{PS}$	$\nleqslant_K$ [4]	$\nleqslant_K$	$\nleqslant_K$ [21]	$\not\subset$	$\not\subset$, $\ncong$	$\nleqslant_K$ [21]	$\nleqslant_K$ [21]	$\not\subset$, $\ncong$	$\nleqslant_K$ [21]	$\nleqslant_K$ [21]	$\not\subset$	$\not\subset$, $\nleqslant_{RK}$ [42]	$=$

BIBLIOGRAFIA

[1] Carlos Uzcátegui Aylwin, *Ideals on countable sets: a survey with questions*, Rev. integr. temas mat. **37** (2019), no. 1, 167-198.

[2] Marek Balcerzak, Szymon Głąb, Jarosław Swaczyna, *Ideal invariant injections*, J. Math. Anal. Appl. **445** (2017), no. 1, 423-442.

[3] Paweł Barbarski, Rafał Filipów, Nikodem Mrożek, Piotr Szuca, *Uniform density u and $\mathcal{I}_u$-convergence on a big set*, Math. Commun. **16** (2011), 125-130.

[4] Paweł Barbarski, Rafał Filipów, Nikodem Mrożek, Piotr Szuca, *When does the Katětov order imply that one ideal extends the order?*, Colloq. Math. **130** (2013), no. 1, 91-102.

[5] Tomek Bartoszyński, Haim Judah, *Set theory*, A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1995, On the structure of the real line.

[6] James Baumgartner, *Ultrafilters on ω*, J. Symb. Log. **60** (1995), no. 2, 624-639.

[7] Mathias Beiglböck, Henry Towsner, *Transfinite approximation of Hindman's theorem*, Israel J. Math. **191** (2012), no. 1, 41-59.

[8] Murray Bell, *On the combinatorial principle $P(\mathfrak{c})$*, Fundam. Math. **114** (1981), no. 2, 149-157.

[9] Andreas Blass, *Combinatorial cardinal characteristics of the continuum*, Handbook of set theory. Vols. 1, 2, 3, Springer, Dordrecht, 2010, pp. 395-489.

[10] Andreas Blass, Natasha Dobrinen, Dilip Raghavan, *The next best thing to a P-point*, J. Symb. Log. **80** (2015), no. 3, 866-900.

[11] Jörg Brendle, Jana Flašková, *Generic existence of ultrafilters on the natural numbers*, Fundam. Math. **236** (2017), 201-245.

[12] Jörg Brendle, Barnabas Farkas, Jonathan L. Verner, *Towers in Filters, Cardinal Invariants, and Luzin Type Families*, J. Symb. Log., Vol. 83 (2018), 1013-1062.

[13] Thomas Brown, *On locally finite semigroups*, Ukrainian Math. J. **20** (1968), 732-738.

[14] David Conlon, Jacob Fox, Yufei Zhao, *A relative Szemerédi theorem*, Geom. Funct. Anal. **25** (2015), no. 3, 733-762.

[15] Ryszard Engelking, *General topology, second ed.*, Sigma Series in Pure Mathematics, Vol. 6 (2018), Heldermann Verlag, Berlin, 1989, Translated from the Polish by the author.

[16] Ilijas Farah, *Analytic quotients: theory of liftings for quotients over analytic ideals on the integers*, Mem. Amer. Math. Soc. **148** (2000), no. 702, xvi+177.

[17] Rafał Filipów, Krzysztof Kowitz, Adam Kwela, *A unified approach to Hindman, Ramsey and van der Waerden spaces*, preprint.

[18] Rafał Filipów, Krzysztof Kowitz, Adam Kwela, *Characterizing existence of certain ultrafilters*, Ann. Pure Appl. Logic **173** (2022), no. 9, 31, Id/No 103157.

[19] Rafał Filipów, Jacek Tryba, *Convergence in van der Waerden and Hindman spaces*, Topology Appl.**178** (2014), 438-452.

[20] Rafał Filipów, Nikodem Mrożek, Ireneusz Recław, Piotr Szuca, *$\mathcal{I}$-selection principles for sequences of functions*, J. Math. Anal. Appl. **396** (2012), no. 2, 680-688.

[21] Rafał Filipów, Nikodem Mrożek, Ireneusz Recław, Piotr Szuca, *Ideal convergence of bounded sequences*, J. Symb. Log. **72** (2007), no. 2, 501-512.

[22] Rafał Filipów, Nikodem Mrożek, Ireneusz Recław, Piotr Szuca, *Ideal version of Ramsey's theorem*, Czech. Math. J. **61** (2011), no. 2, 289-308.

[23] Rafał Filipów, Krzysztof Kowitz, Adam Kwela, Jacek Tryba, *New Hindman spaces*, Proc. Am. Math. Soc. **150** (2022), no. 2, 891-902.

[24] Rafał Filipów, *On Hindman spaces and the Bolzano - Weierstrass property*, Topology Appl. **160** (2013), no. 15, 2003-2011.

[25] Jana Flašková, *A note on $\mathcal{I}$-ultrafilters and P-points*, Acta Univ. Carolin. Math. Phys., Vol. 48 (2007), no. 2, 43-48.

[26] Jana Flašková, *Description of some ultrafilters via $\mathcal{I}$-ultrafilters*, Combinatorial and Descriptive Set Theory, RIMS Kōkyūroku **1619** (2008), 20-31.

[27] Jana Flašková, *Ideals and sequentially compact spaces*, Topology Proc. **33** (2009), 107-121.

[28] Jana Flašková, *$\mathcal{I}$-ultrafilters and summable ideals*, 10th Asian Logic Conference, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2010, pp. 113-123.

[29] Jana Flašková, *On certain $\mathcal{I}$-ultrafilters and IP Rich sets*, Presented at 2nd European Set Theory Meeting (`http://home.zcu.cz/~blobner/research/Bedlewo2009.pdf`), 2009.

[30] Jana Flašková, *Remarks about van der Waerden ideal*, Workshop on Set Theory and its Applications to Topology, Gdańsk, (`http://home.zcu.cz/~blobner/research/Gdansk2013.pdf`), 2013.

[31] Jana Flašková, *The relation of rapid ultrafilters and Q-points to van der Waerden ideal*, Acta Univ. Carolin. Math. Phys. **51** (2010), no. suppl., 19-27.

[32] Jana Flašková, *Thin ultrafilters*, Acta Univ. Carolin. Math. Phys. **46** (2005), no. 2, 13-19.

[33] Jana Flašková, *Ultrafilters and small sets*, Doctoral Thesis, Charles University in Prague, 2006.

[34] John Fridy, *Statistical limit points*, Proc. Amer. Math. Soc. **118**(4) (1993), 1187-1192.

[35] Emanuele Frittaion, *Brown's lemma in second-order arithmetic*, Fundam. Math. **238** (2017), no. 3, 269-283.

[36] Hillel Furstenberg, Benjamin Weiss, *Topological dynamics and combinatorial number theory*, J. Analyse Math. **34** (1978), 61-85 (1979).

[37] Ronald Graham, Bruce Rothschild, Joel Spencer, *Ramsey Theory*, second ed., Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1990, A Wiley-Interscience Publication.

[38] Fernando Hernández-Hernández, Michael Hrušák, *Cardinal invariants of analytic P-ideals*, Cand. J. Math., **59**(3) (2003), 575-595.

[39] Neil Hindman, *Finite sums from sequences within cells of a partition of* $\mathbb{N}$, J. Combinatorial Theory Ser. A **17** (1974), 1-11.

[40] Neil Hindman, *The existence of certain ultrafilters on* $\mathbb{N}$ *and a conjecture of Graham and Rothschild*, Proc. Amer. Math. Soc. **36** (1972), 341-346.

[41] Michael Hrušák, Jonathan Verner, *Adding ultrafilters by definable quotients*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **60** (2011), no. 3, 445-454.

[42] Michael Hrušák, *Combinatorics of filters and ideals*, Set theory and its applications, Contemp. Math. vol. 533, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, pp. 29-69.

[43] Michael Hrušák, *Katětov order on Borel ideals*, Arch. Math. Logic **56** (2017), no. 7-8, 831-847.

[44] Michael Hrušák, David Meza-Alcántara, Egbert Thümmel, Carlos Uzcátegui, *Ramsey type properties of ideals*, Ann. Pure Appl. Logic **168** (2017), no. 11, 2022-2049.

[45] Thomas Jech, *Set theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2003, The third millennium edition, revised and expanded.

[46] Albin Jones, *A brief remark on van der Waerden spaces*, Proc. Am. Math. Soc. **132** (8) (2004) 2457-2460.

[47] Winfried Just, Martin Wesse, *Discovering modern set theory. II: Set-theoretic tools for every mathematician*, Grad. Stud. Math., vol. 18, 1997. ISBN 0-8218-0528-2.

[48] Paweł Klinga, Andrzej Nowik, *Extendability to summable ideals*, Acta Math. Hungar., **152** (1) (2017), 153.

[49] Menachem Kojman, *Hindman spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), no. 6, 1597-1602.

[50] Menachem Kojman, *van der Waerden spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), no. 3, 631-635.

[51] Menachem Kojman, Saharon Shelah, *van der Waerden spaces and Hindman spaces are not the same*, Proc. Am. Math. Soc. **131** (5) (2003) 1619-1622.

[52] Krzysztof Kowitz, *Differentially compact spaces*, Topology Appl. **307** (2022), Paper No. 107948, 9.

[53] Krzysztof Kowitz, *The relationship between* $\mathcal{D}_{fin}$*-ultrafilter and* Q*-point*, Topology Appl., (`https://doi.org/10.1016/j.topol.2023.108597`).

[54] Adam Kwela, Jacek Tryba, *Homogeneous ideals on countable sets*, Acta Math. Hungar. **151** (2017), no.1, 139-161.

[55] Adam Kwela, *Kombinatoryczne i deskryptywne własności ideałów na zbiorach przeliczalnych*, Rozprawa doktorska, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, 2014.

[56] Adam Kwela, *On extendability to* F_σ*-ideals*, Arch. Math. Logic **61** (2022), no. 7-8, 881-890.

[57] Marta Kwela, *Ideały zbiorów nigdziegęstych w topologiach na zbiorze liczb naturalnych*, Rozprawa doktorska, Uniwersytet Gdański, 2021.

[58] Alain Louveau, Boban Veličković, *Analytic ideals and cofinal types*, Ann. Pure Appl. Logic **99**(1-3), 171-195 (1999).

[59] Krzysztof Mazur, *F_σ - ideals and $\omega_1\omega_1^*$ - gaps in the Boolean algebras $\mathcal{P}(\omega)/\mathcal{I}$*, Fund. Math. **138**(2), 103-111 (1991).

[60] David Meza-Alcántara, *Ideals and filters on countable set*, Ph.D. thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2009.

[61] Stanisław Mrówka, *On completely regular spaces*, Fund. Math. **41** (1954), 105-106.

[62] Andrzej Nowicki, Podróże po Imperium Liczb, Wyd. 2. Cz. 3: Liczby Kwadratowe. Olsztyn, Toruń: Olsztyńska Wyższa Szkoła Informatyki i Zarządzania im. prof. T. Kotarbińskiego, 2012, s. 41–43. ISBN 978-83-88629-69-3.

[63] Lingsheng Shi, *Numbers and Topologies: Two Aspects of Ramsey Theory*, Ph.D. thesis, Humboldt-Universität zu Berlin 2003.

[64] Sławomir Solecki, *Analytic ideals and their applications*, Ann. Pure Appl. Logic **99** (1999), no. 1-3, 51-72.

[65] Endre Szemerédi, *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression*, Acta Arith. **27** (1975), 199-245.

[66] Andrzej Szymański, Zhou Hao Xua *The behaviour of ω^{2^*} under some consequences of Martin's axiom*, General topology and its relations to modern analysis and algebra, V (Prague, 1981), Sigma Ser. Pure Math., vol. 3, Heldermann, Berlin, 1983, pp. 577-584.

[67] Alan Taylor, *A canonical partition relation for finite subsets of ω*, J. Combinatorial Theory Ser. A **21** (1976), no. 2, 137-146.

[68] Jacek Tryba, *Analityczne własności ideałów*, Rozprawa doktorska, Uniwersytet Gdański, 2018.

[69] Bartel Van der Waerden, *Beweis einer Baudetschen Vermutung*, Nieuw Arch. Wiskunde **15** (1927), 212-216.

[70] Piotr Zarzycki, *Teoria liczb z programem Mathematica*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2022.