Wstęp do Teorii Kategorii i Funktorów

Wykład dla doktorantów
30 godz semestr letni 2018/2019

Grzegorz Gromadzki

Teoria kategorii i funktorów [1],[2] pojawiała się na przełomie lat 40-tych i 50-tych jako swoisty język zainspirowany przez nowo powstałe dziedziny matematyki (i jednocześnie stworzony na ich potrzeby) takie jak Topologia Algebraiczna, Algebra Homologiczna i nowoczesna Geometria Algebraiczna. Szybko przekształciła się w samodzielną dziedzinę matematyki. Dziś, w zasadzie każdą z uprawianych dziedzin matematyki można traktować jako badanie pewnej kategorii a pojęcie funktora stało się owocnym narzędziem umożliwiającym badania interdyscyplinarne. Sztandarowy przykład skuteczności takiego podejścia stanowi tu dowód twierdzenia Brauera o punkcie stałym wykorzystujący funktor grupy podstawowej. Obecnie Teoria Kategorii stanowi samodzielną dyscyplinę matematyczną a także swoisty sposób myślenia matematycznego pozwalający na spojrzenie na matematykę jako na całość z wyższego punku widzenia.

Celem wykładu jest zapoznanie słuchaczy z podstawowymi pojęciami i konstrukcjami tej Teorii, przy czym szczególny nacisk położony zostanie na przykłady ilustrujące te konstrukcje w poznanych w czasie studiów dziedzinach w tym w szczególności w Algebrze Liniowej, Algebrze Abstrakcyjnej, Topologii i Teorii Mnogości. Jednym z celów wykładu jest nabycie pewnej umiejętności operowania konstrukcjami kategoryjnymi w praktycznych przykładach. Pojawi się więc okazja do powierzchownego zapoznania słuchaczy z elementami Topologii Algebraicznej [3], Algebry Homologicznej [4] czy też Geometrii Algebraicznej [5] jako że, te właśnie dziedziny miały prototypowy charakter w stosunku do tej teorii a ponadto są źródłem ważnych przykładów. Szczegółowy program zostanie podany po pierwszym wykładzie po zapoznaniu się z matematycznym profilem uczestników. Wstępnie i orientacyjnie przyjmuję jednak, że powinny być omówione następujące zagadnienia

1. **Kategoria, funktor.**
   - Podstawowe przykłady i pojęcia.
   - Kowariantność i kontrawariantność funktora. Przekształcenia naturalne funktorów,
   - Presnopy, presnopy reprezentowalne, lemat Yonedy,
   - Równoważność kategorii, kategoria dualna, zasada dualności. Kategoria małych kategorii
2. **Podstawowe konstrukcje kategoryjne, dualność.**
   - Granica i kogranica funktora.
   - Jądro i kojądro różnicowe,
   - Produkt i koprodukt,jako granice i kogranice pewnych funktorów;
   - Przykłady w konkretnych kategoriach.
3. **Kategorie zupełne i kozupełne.**
   - Podstawowe twierdzenie charakteryzujące te kategorie
   - Charakteryzacja presnopów reprezentowalnych na kategorii zupełnej.
4. **Funktory sprzężone, ich dokładność i inne własności.**

Literatura

(1) I. Bucur, A. Delanu, *Introduction to the theory of categories and Functors*, (istnieje wydanie rosyjskie: Izdatielstwo Mir, Moskwa 1972)

(2) Z. Semadeni, A. Wiweger, *Wstęp do teorii kategorii i funktorów*, Seria Biblioteka Matematyczna **45**, PWN W-wa 1978.

(3) H. Spanier, Topologia Algebraiczna PWN W-wa 1972

(4) S. Balcerzyk, *Wstęp do Algebry homologicznej*, Biblioteka Matematyczna **34**, PWN W-wa 1970.

(5) A. Białynicki-Birula, *Zarys Algebry* Biblioteka Matematyczna **63** PWN W-wa 1987