O pracach matematycznych Profesora Wacława Pawelskiego

Wacław Pawelski należał do Krakowskiej Szkoły Równań Różniczkowych. W jej kręgu tematycznym mieści się cała twórczość naukowa Profesora. Szczególny wpływ na zainteresowania matematyczne W. Pawelskiego wywarła działalność naukowa Tadeusza Ważewskiego oraz Jacka Szarskiego. Wacław Pawelski był profesorem Politechniki Gdańskiej, przez wiele lat kierował Pierwszą Katedrą Matematyki. Był także profesorem Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Gdańsku.

Dorobek naukowy Wacława Pawelskiego obejmuje ponad dwadzieścia prac opublikowanych w latach 1955 - 1977 w Annales Polonici Mathematici, Commentationes Mathematicae, Zeszytach Naukowych Politechniki Gdańskiej, Zeszytach Naukowych Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Gdańsku. Problematyka tych prac jest następująca:

- istnienie i oszacowanie obszaru istnienia rozwiązań zagadnień początkowych dla równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu,
- istnienie i jednoznaczność rozwiązań zagadnień różniczkowych hiperbolicznych,
- asymptotyczna stabilność rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych,
- nierówności mieszane między rozwiązaniami równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu,
- geometryczna teoria układów równań cząstkowych słabo sprzężonych.

Przybliżymy teraz niektóre rezultaty z poszczególnych grup tematycznych.

Istnienie i oszacowanie obszaru istnienia rozwiązań zagadnień początkowych dla równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu

Prace [1], [3] dotyczą następującego zagadnienia Cauchy'ego:

$$\partial_t z_i(t,x) + H_i(t,x,z(t,x),\partial_x z(t,x)) = 0,\ i = 1,\dots,m, \tag{1}$$

$$z(\tilde{t},x) = \omega(x),\ x \in R^n, \tag{2}$$

gdzie $t = (t_1,\dots,t_m)$, $x = (x_1,\dots,x_n)$ oraz $\partial_x z = (\partial_{x_1} z,\dots,\partial_{x_n} z)$. Rozważa się więc nadokreślony układ równań cząstkowych pierwszego rzędu. W [1] wykazano, że jeśli $H = (H_1,\dots,H_m)$ i ω są funkcjami klasy C^2 i mają ograniczone pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu oraz spełniony jest warunek zgodności, to zagadnienie początkowe (1), (2) ma dokładnie jedno rozwiązanie. Podane jest także oszacowanie dziedziny rozwiązania w zależności od stałych ograniczających pochodne cząstkowe funkcji danych.

W pracy [3] rozważa się przypadek, gdy (t, x) oraz $z(t, x)$ są zepolone i $H = (H_1, \ldots, H_m)$ oraz ω są funkcjami analitycznymi. Wykazano, że problem (1), (2) ma analityczne rozwiązanie. Podano oszacowanie dziedziny rozwiązania.

Praca [2] dotyczy równań o zmiennych zespolonych. Rozważane jest zagadnienie Cauchy'ego

$$\partial_t z(t,x) = f(t,x,z(t,x),\partial_x z(t,x)), \quad z(t_0,x) = \omega(x),$$

gdzie $x = (x_1, \ldots, x_n)$, Wykazano, że jeśli f i ω są funkcjami analitycznymi, to istnieje dokładnie jedno rozwiązanie tego problemu. Podano oszacowanie dziedziny rozwiązania.

Prace [1] - [3] są rozwinięciem wcześniejszych prac i metod T. Ważewskiego.

Istnienie i jednoznaczność rozwiązań równań różniczkowych hiperbolicznych

Rozważane jest następujące zagadnienie Darboux dla quasiliniowego równania hiperbolicznego

$$\partial_{xy} u(x,y) = F(x,y,u(x,y)), \tag{3}$$

$$u(x,0) = \sigma(x) \text{ dla } x \in [0,a], \quad u(0,y) = \mu(y) \text{ dla } y \in [0,b]. \tag{4}$$

W [6] udowodniono następujące kryterium jednoznaczności rozwiązania problemu (3), (4).

Twierdzenie 1. *Jeśli $F : [0,a] \times [0,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą i istnieją stałe K, $C \geqslant 0$, $0 < \alpha < 1$ takie, że*

$$|F(x,y,u) - F(x,y,\bar{u})| \leqslant \frac{K}{xy}|u - \bar{u}|,$$

$$|F(x,y,u) - F(x,y,\bar{u})| \leqslant C|u - \bar{u}|^\alpha$$

i $K(1-\alpha)^2 < 1$, to zagadnienie (3), (4) ma co najwyżej jedno klasyczne rozwiązanie.

Twierdzenie to jest uogólnieniem kryterium Krasnosielskiego - Kreina dotyczącego jednoznaczności rozwiązań zagadnień początkowych dla równań różniczkowych zwyczajnych i łatwo przenosi się na równania wyższych rzędów oraz na układy równań różniczkowych.

Praca [4] dotyczy istnienia i jednoznaczności rozwiązań zagadnienia Darboux z funkcją niewiadomą u zmiennych (x, y, z):

$$\partial_{xyz} u = F(x,y,z,u,\partial_x u,\partial_y u,\partial_z u,\ \partial_{xy} u,\partial_{xz} u,\partial_{yz} u),$$

$$u(0,y,z) = \psi_1(y,z), \quad u(x,0,z) = \psi_2(x,z),$$

$$u(x,y,0) = \psi_3(x,y),$$

gdzie $x \in [0,a]$, $y \in [0,b]$, $z \in [0,c]$. Jest to rozwinięcie wcześniejszych rezultatów Z. Szmydt, J. Kisyńskiego i R. Conti.

Asymptotyczna stabilność rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych

W latach 1969 - 1977 ukazało sę kilka prac W. Pawelskiego dotyczących stabilności rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych. Zapoczątkowały je prace [11], [16], gdzie badane były zagadnienia stabilności rozwiązań typu $y = at$ równania

$$y'(t) = F\Big(\frac{y(t)}{t}\Big). \tag{5}$$

Przypuśćmy, że $F : (a - u_0, a + u_0) \to \mathbb{R}$ jest ciągła, $F(a) = a$ oraz $F(u) < a$ dla $u \in (a, a + u_0)$, $F(u) > a$ dla $u \in (a - u_0, a)$. Wówczas rozwiązania równania (5) położone w zbiorze

$$D_a = \{(t, x) : t \in (0, +\infty),\ (a - u_0)t < x < (a + u_0)t\}$$

zbliżają się do rozwiązania $y = at$ przy $t \to +\infty$ w sensie stabilności Lapunowa. Wyróżnia się przy tym dwa sposoby zbliżania się krzywych całkowych równania (5) do prostej $y = at$:

(i) wszystkie krzywe całkowe równania (5) położone w D_a dążą asymptotycznie przy $t \to +\infty$ do prostej $y = at$,

(ii) każda krzywa całkowa zbliża się do prostej $y = at$ przy $t \to +\infty$ i ma asymptotę $y = at + b$, $b \neq 0$, przy czym różne krzywe mają różne asymptoty.

Jeśli, prócz założeń wyżej wymienionych, funkcja F spełnia warunek: dla każdego $b \neq 0$ istnieje granica

$$\lim_{\substack{t \to +\infty \\ y \to b}} \left[F\Big(\frac{a + yt^{-1}}{1 - ayt^{-1}}\Big) - a \right]$$

i dla pewnego b jest ona różna od zera, to prosta $y = at$ jest asymptotą (przy $t \to +\infty$) dla wszystkich rozwiązań równania (5) położonych w D_a.

Następne prace z tego zakresu dotyczą badania stabilności asymptotycznej jednostajnej względem warunków początkowych. Rozwiązanie $y(t) = 0$, $t \geqslant a$, równania różniczkowego

$$y'(t) = F(t, y(t)) \tag{6}$$

jest asymptotycznie stabilne jednostajnie względem warunków początkowych na zbiorze $D = [a, +\infty) \times [-b, b] \subset \mathbb{R}^2$ jeśli

1) rozwiązanie to jest stabilne,

2) dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $A > 0$ zależne tylko od ε i takie, że jeśli φ jest rozwiązaniem (6) wychodzącym z odcinka

$$K = \{(t, x);\ t = t_0,\ x \in [-x_0, x_0]\}$$

gdzie $t_0 \geqslant a$, $x_0 < b$, to $|\varphi(t)| < \varepsilon$ dla $t > t_0 + A$.

W pracy [16] wykazano, że przy poprzednio wymienionych założeniach, asymptotyczna stabilność rozwiązań równania (5) nie jest jednostajna względem warunków początkowych.

W [13] i [22] podane są warunki wystarczające na to, by rozwiązanie zerowe równania (6) było stabilne asymptotycznie jednostajnie względem warunków początkowych. Niektóre z tych wyników są uogólnione w [23] na układy równań różniczkowych typu (6). Przypuśćmy, że w (6) mamy $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $F = (F_1, \ldots, F_n)$ oraz

a) F jest ciągła na $\Delta_a \times D_\alpha$, gdzie $\Delta_a = [a, +\infty)$, $D_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\| < \alpha\}$ i $\| \cdot \|$ jest normą w $\mathbb{R}^n$,

b) $F(t, 0_{[n]}) = 0_{[n]}$ dla $t \in \Delta_a$, $0_{[n]} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$, oraz $\langle x, F(t,x) \rangle \leqslant 0$ na $\Delta_a \times D_\alpha$ gdzie $\langle \, , \, \rangle$ jest iloczynem skalarnym w $\mathbb{R}^n$,

c) dla każdego $\bar{x} \in D_\alpha$, $\bar{x} \neq 0_{[n]}$, mamy

$$\lim \sup_{\substack{t \to +\infty \\ x \to \bar{x}}} \langle x, F(t,x) \rangle = \delta(\bar{x}), \ \delta(\bar{x}) < 0,$$

d) spełniona jes nierówność

$$\langle x, F(t+h, x) \rangle \leqslant \langle x, F(t,x) \rangle, \ (t,x) \in \Delta_a \times D_\alpha, \ h > 0.$$

Wówczas rozwiązanie zerowe układu (6) jest asymptotycznie stabilne jedostajnie względem warunków początkowych.

Do badania stabilności rozwiązań stosuje się w tych pracach metody nierówności różniczkowych. Rozszerzenie niektórych z powyższych rezultatów na równania różniczkowo funkcyjne znajduje się w pracach S. Zacharka.

Równania i nierówności o pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu

Głównym kierunkiem badań prowadzonych przez Wacława Pawelskiego w latach 1962 - 1973 były nierówności mieszane dla równań cząstkowych pierwszego rzędu

$$\partial_t z(t,x) = F(t, x, z(t,x), \partial_x z(t,x)), \tag{7}$$

gdzie $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\partial_x z = (\partial_{x_1} z, \ldots, \partial_{x_n} z)$.

Zapoczątkowana przez A. Haara i M. Nagumo teoria nierówności różniczkowych o pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu została w istotny sposób rozwinięta w drugiej połowie lat czterdziestych i w latach pięćdziesiątych. Obok prac J. Sawarienskiego i G. Żdanowa dotyczących metod Chaplygina, wymienić tu należy niezwykle ważne wyniki J. Szarskiego zawarte w pracach opublikowanych w Annales Polonici Mathematici oraz w znanej monografii *Differential Inequalities*.

Jednym z istotnych rezultatów tej teorii jest następujący wynik.

Twierdzenie 2. *Załóżmy, że*

1) *funkcja rzeczywista F zmiennych (t,x,p,q), $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $q=(q_1,\ldots,q_n)$, jest ciągła dla $(t,x)\in E$, $p\in\mathbb{R}$, $q\in\mathbb{R}^n$, gdzie*

$$E=\{(t,x):\, t\in[t_0,t_0+a),\ -b+M(t-t_0)\leqslant x-x_0\leqslant b-M(t-t_0)\}$$

oraz $b=(b_1,\ldots,b_n)\in\mathbb{R}^n$, $M=(M_1,\ldots M_n)\in\mathbb{R}^n_+$, $\mathbb{R}_+=[0,+\infty)$, $Ma<b$ i nierówności dla wektorów oznaczają analogiczne nierówności dla odpowiednich współrzędnych,

2) *istnieje funkcja $\sigma:[0,a)\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ taka, że spełnione jest oszacowanie*

$$|F(t,x,p,q)-F(t,x,\tilde p,\tilde q)|\leqslant\sigma(t-t_0,|p-\tilde p|)+\sum_{i=1}^n M_i|q_i-\tilde q_i|$$

oraz

(i) *σ jest ciągła i $\sigma(t,0)=0$ dla $t\in[0,a)$,*

(ii) *jedynym rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego*

$$\omega'(t)=\sigma(t,\omega(t)),\ \ \omega(0)=0,$$

jest $\tilde\omega(t)=0$ dla $t\in[0,a)$,

3) *u, $v:E\to\mathbb{R}$ mają pochodne cząstkowe na E i są różniczkowalne na $\partial E\cap((t_0,t_0+a)\times\mathbb{R}^n)$, gdzie ∂E jest brzegiem zbioru E,*

4) *spełnione są nierówności różniczkowe*

$$\partial_t u(t,x)\leqslant F(t,x,u(t,x),\partial_x u(t,x))$$

oraz

$$\partial_t v(t,x)\geqslant F(t,x,v(t,x),\partial_x v(t,x))$$

gdzie $t_0<t<t_0+a$, $(t,x)\in E$, oraz prawdziwa jest nierówność początkowa

$$u(t_0,x)\leqslant v(t_0,x),\ x\in[x_0-b,\ x_0+b].$$

Przy tych założeniach mamy

$$u(t,x)\leqslant v(t,x)\ \text{ dla }\ (t,x)\in E. \tag{8}$$

Zbiór E nazywamy piramidą Haara. Jest to naturalna dziedzina rozwiązań nieliniowych równań cząstkowych pierwszego rzędu z warunkiem początkowym podanym na $[x_0 - b,\, x_0 + b]$.

Twierdzenie to zastosowane do rozwiązań u i v równania różniczkowego (7) orzeka, że rozwiązania są monotoniczne względem warunków początkowych.

Interesujący i ważny przypadek monotoniczności rozwiązań równania (7) względem warunków początkowych badany był przez J. Szarskiego. Rozważane było następujące zadanie: należy podać warunki wystarczające na to, by nierówność początkowa

$$u(t_0, x) < v(t_0, x) \ \text{ gdzie } \ -b \leqslant x - x_0 \leqslant b \tag{9}$$

dla rozwiązań u i v równanie (7) implikowała nierówność

$$u(x, y) < v(x, y) \ \text{ dla } \ (x, y) \in E, \tag{10}$$

gdzie E jest piramidą Haara. Odpowiedź na to pytanie jest podana w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 3. *Załóżmy, że*

1) funkcja $F : E \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zmiennych (t, x, p, q) jest ciągła i istnieją pochodne

$$\partial_x F = (\partial_{x_1} F, \dots, \partial_{x_n} F), \ \ \partial_p F,\ \partial_q F = (\partial_{q_1} F, \dots, \partial_{q_n} F),$$

i $\partial_x F,\ \partial_q \in C(E \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\partial_p \in C(E \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$,

2) pochodne $\partial_x F$, $\partial_p F$, $\partial_q F$ spełniają na $E \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ warunek Lipschitza względem (x, p, q) oraz

$$\Big(|\partial_{q_1} F(P)|, \dots, \partial_{q_n} F(P)|\Big) \leqslant M$$

gdzie $P = (t, x, p, q) \in E \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$,

3) u i v są klasycznymi rozwiązaniami na E równania różniczkowego (7) i są one różniczkowalne na $\partial E \cap ((t_0, t_0 + a) \times \mathbb{R}^n)$,

4) rozwiązania u i v są utworzone przez charakterystyki i spełniona jest nierówność początkowa (9).

Przy tych założeniach prawdziwa jest nierówność (10).

Teoria charakterystyk odgrywa ważną rolę w dowodzie tego twierdzenia. Istotne uogólnienie tego wyniku podał w latach siedemdziesiątych P. Besala. Dotyczy ono zmniejszenia wymagań o regularności funkcji F i regularności rozwiązań u, v równania (7). Wykorzystuje się wtedy dość specjalne twierdzenie o nierównościach różniczkowych.

Rozważmy teraz sytuację bardziej złożoną niż w twierdzeniu 3. Przypuśćmy, że rozwiązania u i v równania (7) spełniają na zbiorze początkowym następujące warunki:

$$u(t_0, x) = v(t_0, x) \ \text{ dla } \ x \in \overline{A}, \tag{11}$$

$$u(t_0, x) < v(t_0, x) \ \text{ dla } \ x \in E_0 \setminus \overline{A} \tag{12}$$

gdzie $E_0 = [x_0 - b,\, x_0 + b]$, $A \subset E_0$ jest obszarem i $\overline{A}$ jest domknięciem zbioru A.

Prace W. Pawelskiego [5], [8], [9] dotyczą badania wzajemnego położenia rozwiązań u i v spełniających warunki początkowe (11), (12). W [5] rozważa się równanie różniczkwe liniowe z funkcją niewiadomą dwu zmiennych

$$P(t, x)\partial_t z(t, x) + Q(t, x)\partial_x z(t, x) = 0$$

oraz równanie z funkcją niewiadomą zależną od (t, x), gdzie $x = (x_1, \ldots, x_n)$:

$$P_0(t, x)\partial_t z(t, x) + \sum_{i=1}^{n} P_i(t, x)\, \partial_{x_i} z(t, x) = R(t, x, z(t, x)).$$

Prace [8], [9] dotyczą równań nieliniowych. O rozwiązaniach u i v zakłada się między innymi, że są utworzone przez charakterystyki. Podane są tam warunki wystarczające na to, by istniał zbiór $\Delta \subset E$ taki, że

$$u(t, x) = v(t, x) \ \text{ dla } \ (t, x) \in \Delta$$

oraz

$$u(t, x) < v(t, x) \text{ dla } (t, x) \in E \setminus \Delta.$$

Zbiór Δ jest utworzony przez rzuty na przestrzeń (t, x) charakterystyk położonych na rozwiązaniach u i v i przechodzących przez punkty $(t_0, x, u(t_0, x))$, $x \in \overline{A}$.

Przypuśćmy, że rozwiązania u i v równania (7) są określone na piramidzie Haara E i spełniają na zbiorze początkowym E_0 następujące nierówności mieszane

$$u(t_0, x) < v(t_0, x) \text{ dla } x \in B, \tag{13}$$

$$u(t_0, x) = v(t_0, x) \text{ dla } x \in \overline{A} \setminus B, \tag{14}$$

$$u(t_0, x) > v(t_0, x) \text{ dla } x \in E_0 \setminus \overline{A}, \tag{15}$$

gdzie A i B są obszarami zawartymi w E_0 i $B \subset A$.

W pracach [5], [8] - [10] badane są wzajemne związki między rozwiązaniami u i v równania (7) spełniającymi powyższe relacje początkowe. Podane są tam warunki wystarczające na to, by istniały zbiory Δ i Δ_0, $\Delta_0 \subset \Delta$, otworzone przez rzuty na przestrzeń (t, x) charakterystyk położonych na rozwiązaniach u i v i takie, że

$$u(t, x) < v(t, x) \text{ dla } (t, x) \in \Delta_0,$$

$$u(t,x) = v(t,x) \text{ dla } (t,x) \in \overline{\Delta} \setminus \Delta_0,$$

$$u(t,x) > v(t,x) \text{ dla } (t,x) \in E \setminus \overline{\Delta}.$$

Szczególnie interesujący przypadek otrzymuje się wtedy, gdy w (13) - (15) zakładamy, że $B = A$. Prace [9], [10] dotyczą takiej sytuacji.

W [7] rozważa się nadokreślony układ dwu równań różniczkowych

$$\partial_{t_1} z(t,x) = F_1(t,x,z(t,x),\partial_x z(t,x)),$$

$$\partial_{t_2} z(t,x) = F_2(t,x,z(t,x),\partial_x z(t,x)),$$

gdzie $t = (t_1,t_2)$ i x jest zmienną jednowymiarową. Bada się nierówności między rozwiązaniami u i v tego układu zakładając, że

$$u(t_0,x) > v(t_0,x) \text{ dla } x \in [x_0 - b, x_1),$$

$$y(t_0,x) = v(t_0,x) \text{ dla } x \in [x_1,x_2],$$

$$u(t_0,x) < v(t_0,x) \text{ dla } x \in (x_2, x_0 + b],$$

gdzie $x_0 - b < x_1 \leqslant x_2 < x_0 + b$. Istnieje wówczas powierzchnia $S \subset D$, gdzie

$$D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^3 : \ t \in (t_0 - a, t_0 + a), \ |x - x_0| \leqslant b - M\|t - t_0\|\}$$

gdzie $a, b, M > 0$, $2Ma < b$, i taka, że $u(t,x) = v(t,x)$ dla $(t,x) \in S$ i nierówności początkowe przenoszą się na nierówności między rozwiązaniami na $D \setminus S$. Badane są własności krzywych, wzdłuż których powierzchnia S przecina się z brzegiem ∂D zbioru D.

Prace W. Pawelskiego [5], [7] - [10] należą do klasycznej teorii równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu. Byly one inspiracją do podjęcia badań dotyczących nierówności między rowiązaniami równań różniczkowo funkcyjnych typu Volterry

$$\partial_t z(t,x) = F(t,x,z(t,x),z(\,\cdot\,),\partial_x z(t,x)).$$

Równania różniczkowe z odchylonym argumentem oraz równania różniczkowo całkowe są tu podstawowymi przykładami.

Geometryczna teoria układów słabo sprzężonych

Problematyka nierówności mieszanych została w istotny sposób rozwinięta w latach siedemdziesiątych. Została rozszerzona na układy równań różniczkowych typu

$$\partial_t z_i(t,x) = F_i(t,x,z(t,x),\partial_x z_i(t,x)), \ \ i = 1,\ldots,m, \tag{16}$$

z warunkami początkowymi

$$z(t_0,x) = \omega(x), \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{17}$$

gdzie $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $z = (z_1, \ldots, z_m)$ i $\partial_x z_i = (\partial_{x_1} z_i, \ldots, \partial_{x_n} z_i)$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Jest to układ słabo sprzężony w tym sensie, że równanie różniczkowe o numerze i zawiera wektorową funkcję niewiadomą $(z_1, \ldots, z_m)$ i pochodne cząstkowe tylko jednej funkcji skalarnej: $\partial_t z_i$, $\partial_x z_i$.

Podstawową rolę w twierdzeniach o nierównościach mieszanych dla rozwiązań układu (16) odgrywają charakterystyki. W pracy [20] podana jest konstrukcja charakterystyk dla pewnej klasy układów typu (16).

Konstrukcja charakterystyki dla układu (16) przechodzącej przez punkt $(t_0, \eta, \vartheta, \theta)$, gdzie $\eta \in \mathbb{R}^n$, $\vartheta \in \mathbb{R}^m$ oraz

$$\theta = \Big[\theta_{ij}\Big]_{i=1,\ldots,m,j=1,\ldots n}, \ \theta_{[i]} = (\theta_{i1}, \ldots, \theta_{in}) \in \mathbb{R}^n, \ 1 \leqslant i \leqslant m,$$

jest oparta na następującej idei. Przypuśćmy, że $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest funkcją zmiennych $(x_1, \ldots, x_n) = x$. Zakładamy, że ω klasy C^2 na $\mathbb{R}^n$ i $\vartheta = \omega(\eta)$, $\theta_{[i]} = \partial_x \omega_i(\eta)$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Przypuśćmy, że

$$F = (F_1, \ldots, F_m) : [t_0, t_0 + a) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

jest funkcją klasy C^2. Określamy nieskończony ciąg funkcji $\{z^{(k)}\}$, $z^{(k)} = (z_1^{(k)}, \ldots, z_m^{(k)})$, w następujący sposób:

(i) $z^{(0)}(t, x) = \omega(x)$ dla $(t, x) \in [t_0, t_0 + a) \times \mathbb{R}^n$,

(ii) jeśli znamy funkcję $z^{(k-1)}$, to $z_i^{(k)}$ jest rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego

$$\partial_t u(t, x) = F_i(t, x, z^{(k-1)}(t, x), \partial_x u(t, x)),$$

$$u(t_0, x) = \omega_i(x), \ x \in \mathbb{R}^n,$$

gdzie $1 \leqslant i \leqslant m$.

Zauważmy, że w tym układzie równań mamy niezależne równania różniczkowe. Istnieje $b > 0$, takie, że funkcje $z^{(k)}$, $k \geqslant 0$, istnieją i są klasy C^2 na $[t_0, t_0 + b) \times \mathbb{R}^n$ oraz

$$\lim_{k\to\infty} z^{(k)}(t, x) = \tilde{z}(t, x), \ \tilde{z} = (\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_m),$$

$$\lim_{k\to\infty} \partial_t z_i^{(k)}(t, x) = \partial_t \tilde{z}_i(t, x), \ \ \lim_{k\to\infty} \partial_x z_i^{(k)}(t, x) = \partial_x \tilde{z}(t, x),$$

gdzie $1 \leqslant i \leqslant m$ i zbieżność jest jednostajna na $[t_0, t_0 + b) \times \mathbb{R}^n$. Funkcja $\tilde{z}$ jest rozwiązaniem układu (16) spełniającym warunek początkowy (17). Dla każdego $1 \leqslant i \leqslant m$ rozważamy układ charakterystyczny dla równania o numerze i. Niech $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, ζ, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ będą funkcjami niewiadomymi w tym układzie. Ma on postać

$$\xi'(t) = -\partial_q F_i(S^{(k)}),$$

$$\zeta'(t) = F_i(S^{(k)}) - \lambda(t) \circ \partial_q F_i(S^{(k)}),$$
$$\lambda'(t) = \partial_x F_i(S^{(k)}) + \partial_p F_i((S^{(k)})\, \partial_x z^{(k-1)}(t, \xi(t)),$$

gdzie $S^{(k)} = (t, \xi(t), z^{(k-1)}(t, \xi(t)), \lambda(t))$ i " $\circ$ " jest iloczynem skalarnym w $\mathbb{R}^n$. Niech $C^{(k.i)} = \left(\tilde{\xi}^{(k.i)}, \tilde{\zeta}^{(k.i)}, \tilde{\lambda}^{(k.i)}\right)$ będzie charakterystyką przechodzącą przez punkt $(t_0, \eta, \vartheta_i, \theta_{[i]})$. Otrzymaliśmy nieskończony ciąg charakterystyk $\{C^{k.i}\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Dla każdego $1 \leqslant i \leqslant m$ istnieją granice

$$\tilde{\xi}^{(i)}(t) = \lim_{k\to\infty} \tilde{\xi}^{(k.i)}(t), \quad \tilde{\zeta}^{(i)}(t) = \lim_{k\to\infty} \tilde{\zeta}^{(k.i)}(t), \quad \tilde{\lambda}^{(i)}(t) = \lim_{k\to\infty} \tilde{\lambda}^{(k.i)}(t)$$

i zbieżność jest jednostajna na $[t_0, t_0 + a)$. Funkcje $\left(\tilde{\xi}^{(i)}, \tilde{\zeta}^{(i)}, \tilde{\lambda}^{(i)}\right)$ spełniają układ równań różniczkowych

$$\xi'(t) = -\partial_q F_i(S),$$
$$\zeta'(t) = F_i(S) - \lambda(t) \circ \partial_q F_i(S)$$
$$\lambda'(t) = \partial_x F_i(S) + \partial_p F_i(S)\, \partial_x \tilde{z}(t, \xi(t))$$

gdzie $S = (t, \xi(t), \tilde{z}(t, \xi(t)), \lambda(t))$. Tak skonstruowany układ funkcji $\left(\tilde{\xi}^{(i)}, \tilde{\zeta}^{(i)}, \tilde{\lambda}^{(i)}\right)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, zależy jednak od wyboru funkcji ω. Ponadto, funkcje te nie mogą być wyznaczone z powyższego układu równań różniczkowych, jeśli nie jest znane rozwiązanie $\tilde{z}$ wyjściowego zagadnienia. Potrzebne są tu dodatkowe ograniczenia dotyczące układu równań różniczkowych cząstkowych i jego rozwiązań. Są one następujące. Przypuśćmy, że dla rozwiązania $\tilde{z}$ układu słabo sprzężonego spełniony jest warunek

$$\partial_q F_1(t, x, \tilde{z}(t, x), \partial_x \tilde{z}_1(t, x)) = \partial_q F_2(t, x, \tilde{z}(t, x), \partial_x \tilde{z}_2(t, x)) = \dots$$
$$= \partial_q F_m(t, x, \tilde{z}(t, x), \partial_x \tilde{z}_m(t, x)),$$

gdzie $(t, x) \in [t_0, t_0 + b) \times \mathbb{R}^n$. Oznaczmy przez $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_m)$, $\lambda = \left[\lambda_{ij}\right]_{i=1,\dots,m,\, j=1,\dots,n}$, $\lambda_{[i]} = (\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{in})$, $1 \leqslant i \leqslant m$, funkcje niewiadome w układzie charakterystycznym dla (16). Otrzymujemy dla nich następujący układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\xi'(t) = -\partial_q F_i(P^{(i)}(t))$$
$$\zeta_i'(t) = F_i(P^{(i)}(t)) - \lambda_{[i]}(t) \circ \partial_q F_i(P^{(i)}(t)),$$
$$\lambda_{[i]}'(t) = \partial_x F_i(P^{(i)}(t)) + \partial_p F_i(P^{(i)}(t))\, \lambda(t),$$

gdzie $1 \leqslant i \leqslant m$ oraz $P^{(i)}(t) = (t, \xi(t), \zeta(t), \lambda_{[i]}(t))$. Rozwiązania tego układu nazywamy charakterystykami. Mają one zastosowania w teorii klasycznych rozwiązań dla (16), (17). Teoria ta ma następujące ograniczenia. Oznaczmy przez

$$\tilde{\xi}(\,\cdot\,, \eta),\ \tilde{\zeta}(\,\cdot\,, \eta),\ \tilde{\lambda}(\,\cdot\,, \eta), \tag{18}$$

oraz

$$\tilde{\lambda}_{[i]}(\,\cdot\,,\eta) = (\tilde{\lambda}_{i1}(\,\cdot\,,\eta), \ldots, \tilde{\lambda}_{in})(\,\cdot\,,\eta),\ 1 \leqslant i \leqslant m,$$

rozwiązanie układu charakterystycznego wyznaczone przez warunek początkowy

$$\xi(t_0) = \eta, \zeta(t_0) = \omega(\eta), \lambda(t_0) = \partial_x \omega(\eta),\ \eta \in \mathbb{R}^n. \tag{19}$$

Zakładamy, że

$$\partial_q F_1\Big(t, \tilde{\xi}(t,\eta), \tilde{\zeta}(t,\eta), \tilde{\lambda}_{[1]}(t,\eta)\Big) = \partial_q F_2\Big(t, \tilde{\xi}(t,\eta), \tilde{\zeta}(t,\eta), \tilde{\lambda}_{[2]}(t,\eta)\Big)$$
$$= \partial_q F_m\Big(t, \tilde{\xi}(t,\eta), \tilde{\zeta}(t,\eta), \tilde{\lambda}_{[m]}(t,\eta)\Big).$$

Ten warunek występuje w twierdzeniach o zagadnieniu początkowym (16), (17) wykorzystujących charakterystki.

Na zakończenie odnotujmy niektóre własności i zastosowania charakterystyk

1. Jeśli $\tilde{z} = (\tilde{z}_1, \ldots \tilde{z}_m)$ jest rozwiązaniem układu (16), $\tilde{z}$ jet klasy C^1 na piramidzie Haara E i pochodne $\partial_x \tilde{z} = \Big[\partial_{x_i x_j} \tilde{z}\Big]_{i=1,\ldots m,\, j=1,\ldots,n}$ spełniają warunek Lipschitza na E względem zmiennych przestrzennych, to rozwiązanie $\tilde{z}$ jest generowane przez charakterystyki w tym sensie, że dla każdego punktu $(\tilde{t}, \tilde{x})$ istnieje rozwiązanie $(\bar{\xi}, \bar{\zeta}, \bar{\lambda})$ układu charakterystycznego takie, że $\bar{\xi}(\tilde{t}) = \tilde{x}$ oraz

$$\tilde{z}(t, \tilde{\xi}(t)) = \tilde{\zeta}(t),\ \partial_x \tilde{z}(t, \tilde{\xi}(t)) = \tilde{\lambda}(t) \text{ w pewnym otoczeniu } \bar{t}.$$

2. Załóżmy, że rozwiązania $\tilde{z}$ i $\bar{z}$ układu (16) są utworzone przez charakterystyki i rozwiązania układu charakterystycznego są wyznaczone jednoznacznie przez warunek początkowy. Jeśli istnieje punkt $(\bar{t}, \bar{x}) \in E$ taki, że $\tilde{z}(\bar{t}, \bar{x}) = \bar{z}(\bar{t}, \bar{x})$ i $\partial_x \tilde{z}(\bar{t}, \bar{x}) = \partial_x \bar{z}(\bar{t}, \bar{x})$, to rozwiązania $\tilde{z}$ i $\tilde{u}$ mają wspólną charakterystykę przechodzącą przez punkt $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{z}(\bar{t}, \bar{x}), \partial_x \bar{z}(\bar{t}, \bar{x}))$. Na tej własności charakterystyk opierają się twierdzenia o nierównościach mieszanych dla układów typu (16).

3. Rozważmy zagadnienie Cauchyego (16), (17) i rodzinę charakterystyk (18) wyznaczoną przez warunek początkowy (19).

Wówczas, przy naturalnych założeniach o danych funkcjach, równanie $x = \tilde{\xi}(t,\eta)$ można rozwiązać jednoznacznie względem η. Jeśli $\eta = \chi(t,x)$ jest tym rozwiązaniem, to χ jest klasy C^1 i funkcja $\tilde{z}$ dana wzorem $\tilde{z}(t,x) = \tilde{\zeta}(t, \chi(t,x))$ jest rozwiązaniem zagadnienia (16), (17). Ponadto $\partial_x \tilde{z}(t,x) = \tilde{\lambda}(t, \chi(t,x))$. Jest to więc naturalne rozszerzenie geometrycznej teorii zaproponowanej przez A. Plisia dla jednego równania.

Konstrukcja ta upraszcza się znacznie, gdy rozważany układ (16) jest quasiliniowy. Jest ona opisana w pracy [18].

4. Teoria charakterystyk dla układów równań pozwala na dowodzenie twierdzeń o nierównościach mieszanych między rozwiązaniami tych układów. Zagadnieniom tym są poświęcone prace [19], [21].

Aktywność naukowa Profesora Wacława Pawelskiego trwała ponad trzydzieści lat. Był moim nauczycielem od 1965 roku. Profesor zmarł w 1980 roku.

[1] Appréciation du domaine d' existence de l'intégrales d'un systémé involutif d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, Ann. Polon. Math. 2, 1955, 29 - 36.

[2] Appréciation du domaine d'existence de l'intégrale d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre dans le case de variables complexes, Ann. Polon. Math. 2, 1955, 37 - 55.

[3] Estimation du domaine d'existence de l'intégrale d'un systéme en involution d'équations aux dérivées partielles du premier ordre dans le cas de variables complexes, Ann. Polon. Math. 5, 1958, 25 - 32.

[4] Sur l'existence et l'unicité des solutions du certaines équations differentielle du type $z_{xyz} = f(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z, u_{xy}, u_{xz}, u_{yz})$, Ann. Polon. Math. 11, 1961, 75 - 106, współautorzy: M. Kwapisz, B. Palczewski.

[5] Remarques sur des inégalités mixtes entre les intégralles des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Ann. Polon. Math. 13, 1963, 309 - 326.

[6] Some remarks on the uniqueness of solutions of the Darboux problem with conditions of the Krasnosielski - Krein type, Ann. Polon. Math. 14, 1964, 97 - 100, współautor B. Palczewski.

[7] O pewnej własności krzywych związanych z charakterystykami równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu, Zesz. Nauk. Polit. Gd., Matematyka II, 1964, 25 - 34.

[8] Sur les inégalités mixtes entre les intégrales du l' équation aux dérivées partiallles $z_x = f(x, y, z, z_y)$, Ann. Polon. Math. 19, 1967, 235 - 247.

[9] Remarques sur des inégalités entre les intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Ann. Polon. Math. 19, 1967, 249 - 255.

[10] On a case of mixed inequalities between solutions of first order partial differential equations, Ann. Polon. Math. 20, 1968, 95 - 102.

[11] O pewnym warunku wystarczającym asymptotycznej stabilności całki $y = ax$ równania różniczkowego $y' = f(yx^{-1})$, Zesz. Nauk. Polit. Gd., Matematyka V, 1969, współautor Z. Kamont.

[12] O nierównościach mieszanych zachodzących pomiędzy całkami równania różniczkowego cząstkowego $z_x = f(x, y_1, y_2, z, z_{y_1}, z_{y_2})$, Zesz. Nauk. WSP w Gdańsku, Matematyka, Fizyka, Chemia, 10, 1970, 23 - 58, współautor Z. Kamont.

[13] On the simple case of asymptotic stability, Comm. Math. 13, 1970, 233 - 239.

[14] O własnościach powierzchni oddzielającej zbiory, w których zachodzą nierówności mieszane między całkami układu dwóch równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu z jedną funkcją niewiadomą, Zesz. Nauk. Polit. Gd., Matematyka VI, 1971, 57 - 79.

[15] O nierównościach mieszanych zachodzących między całkami równania różniczkowego cząstkowego $z_x = f(x, y, z, z_y)$, Zesz. Nauk. Polit. Gd., Matematyka VII, 1973,

15 - 31, współautor Z. Kamont.

[16] On a certain case of asymptotic stability of the integral $y = 0$ of the differential equation $y' = g(yx^{-1})$, Comm. Math. 17, 1973, 229 - 235, współautor Z. Kamont.

[17] O pewnym przypadku nierówności mieszanych zachodzących między całkami układu dwóch równań różniczkowych cząstkowych, Zesz. Nauk. Polit. Gd., Matematyka VIII, 1973, 13 - 33, współautor Z. Kamont.

[18] O istnieniu całek układu równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu usłanych przez charakterystyki, Zesz. Nauk. Polit. Gd., Matematyka IX, 1974, 15 - 30, współautor Z. Kamont).

[19] O zastosowaniu charakterystyk do nierówności mieszanych zachodzących między całkami układu równań różniczkowych nieliniowych pierwszego rzędu, Zesz. Nauk. Polit. Gd., Matematyka IX, 1974, 31 - 44, współautor Z. Kamont.

[20] On the characteristics for a system of partial differential equations of the first order in a special case, Ann. Polon. Math. 29, 1974, 215 - 228, współautor Z. Kamont.

[21] O nierównościach mieszanych zachodzących między rozwiązaniami układu quasi - liniowego równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu, Zesz. Nauk. Polit. Gd, Matematyka X, 1976, 19 - 46.

[22] On a special case of asymptotic stability in a uniform manner with respect to initial conditions, Comm. Math. 19, 1976, 81 - 84, współautor Z. Kamont.

[23] On a certain case of asymptotic stability of the solution $y = 0$ of a system of ordinary differential equations $y' = F(x, y)$, Comm. Math. 20, 1977, 87 - 97, współautorzy: Z. Kamont, S. Zacharek.

Spis nie obejmuje wydawnictw o charakterze dydaktycznym.

Zdzisław Kamont

Gdańsk, 1 lutego 2012 r.