

# OSOBLIWE WŁASNOŚCI FUNKCJI RZECZYWISTYCH

SEMINARIUM MAGISTERSKIE

PROWADZĄCY: PROF. DR HAB. TOMASZ NATKANIEC

Nie tylko funkcje różniczkowalne mogą być interesujące. Równo sto lat temu matematyk amerykański Henry Blumberg udowodnił, że dla każdej funkcji  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  istnieje zbiór gęsty  $D \subset \mathbb{R}$  taki, że  $f|_D$  jest ciągła. Zbiór  $D$  w dowodzie twierdzenia Blumberga jest przeliczalny (a więc mały). W odpowiedzi na pytanie Blumberga, w 1921 roku polscy matematycy Waław Sierpiński i Antoni Zygmund skonstruowali przykład funkcji  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takiej, że  $f|_X$  jest nieciągła dla każdego podzbioru  $X \subset \mathbb{R}$  mocy continuum. Funkcje o tej własności nazywamy funkcjami Sierpińskiego-Zygmunda. Na seminarium będziemy omawiać wyniki dotyczące takich i innych zaskakujących własności funkcji rzeczywistych. Będziemy badać wpływ teorii mnogości (w szczególności deskryptywnej i kombinatorycznej teorii mnogości) na istnienie funkcji posiadających takie własności. Interesować nas będą m.in. funkcje addytywne, funkcje mierzalne względem różnych  $\sigma$ -ciał, funkcje quasi-ciągłe w sensie Kempistego oraz funkcje mierzalne względem różnych  $\sigma$ -ciał.

## Literatura

1. A. Błaszczyk, S. Turek „*Teoria mnogości*”
2. A. Bruckner „*Differentiation of real functions*”
3. K. Ciesielski „*Set Theory for the Working Mathematician*”
4. A. Kharazishvili „*Strange functions in real analysis*”
5. A. Kharazishvili „*Applications of point set theory in real analysis*”