SEMINARIUM Z TEORII FUNKCJI RZECZYWISTYCH W GDAŃSKU

JOANNA CZARNOWSKA, RAFAŁ FILIPÓW, ADAM KWELA, GRAŻYNA KWIECIŃSKA, JAN LIPIŃSKI, TOMASZ NATKANIEC, AND PIOTR SZUCA

Spis treści

Wstęp

Początki systematycznych badań nad teorią funkcji rzeczywistych w Gdańsku związane są z przyjazdem nad morze profesora Jana Lipińskiego. Profesor Lipiński kierował Zakładem Funkcji Rzeczywistych i Rachunku Prawdopodobieństwa UG oraz prowadził seminarium z teorii funkcji rzeczywistych od 1970 roku, początkowo w Instytucie Matematycznym PAN, później w Instytucie Matematyki UG. Pierwsza część tego opracowania, zawierająca opis wyników z lat siedemdziesiątych, jest fragmentem wspomnień Profesora o jego uczniach i seminarium prowadzonym w zakładzie. Opis wyników samego Profesora można znaleźć w rozdziale „A modest review of a great deal of work” autorstwa Paula Humke [49] zamieszczonego w monografii [32] wydanej z okazji jubileuszu 90-lecia Profesora.

W 1996 roku, po przejściu profesora Lipińskiego na emeryturę, działalność seminarium była kontynuowana pod kierunkiem Tomasza Natkańca oraz Ireneusza Recława. Tomasz Natkaniec przeniósł się na Uniwersytet Gdański z WSP w Bydgoszczy, w tym samym czasie Ireneusz Recław przeszedł do Zakładu Funkcji Rzeczywistych z Zakładu Teorii Mnogości. Oprócz pracowników Zakładu Funkcji Rzeczywistych w seminarium często uczestniczyli pracownicy Zakładu Teorii Mnogości, których zainteresowania naukowe były zbieżne z tematyką seminarium: Kazimierz Wiśniewski, Andrzej Nowik, Krzysztof Płotka, Marcin Szyszkowski i Marta Frankowska. Tematyka seminarium obejmowała w tym czasie głównie zagadnienia związane z zastosowaniami teorii mnogości w analizie rzeczywistej i topologii, takie jak: teoria „małych podzbiorów" prostej rzeczywistej (w Gdańsku tematyka ta została wprowadzona przez Edwarda Grzegorka po jego przeprowadzce z Wrocławia); mierzalność odwzorowań wielowartościowych oraz osobliwe własności funkcji, na przykład: quasi-ciągłość w sensie Kempistego i jej uogólnienia, własności typu Darboux, funkcje Sierpińskiego-Zygmunda czy nieciągłe funkcje addytywne. W 2004 roku, po powrocie Ireneusza Recława z rocznego pobytu na Uniwersytecie w Scranton, tematyka seminarium wzbogaciła się o problemy związane z własnościami ideałów na zbiorze liczb naturalnych i zbieżnością ideałową.

Uzupełnieniem działalności seminarium były trzy konferencje pod wspólną nazwą Workshop on Set Theory and Applications to Topology and Real Analysis, zorganizowane w Wieżycy w latach 1998 i 1999 oraz w Gdańsku w roku 2013. Ostatnia konferencja poświęcona była pamięci przedwcześnie zmarłego w 2012 roku Ireneusza Recława.

1. Lata siedemdziesiąte

Seminarium z teorii funkcji rzeczywistych powstało w Trójmieście po przeniesieniu prof. Jana Lipińskiego z Uniwersytetu Łódzkiego w roku 1969 do Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Gdańsku. Prócz zainteresowanych nim młodych absolwentów WSP (później Uniwersytetu) uczestniczyli w nim doktoranci z Łodzi, Częstochowy i Słupska. Początkowo na seminarium kontynuowano badania łódzkiej szkoły funkcji rzeczywistych opisane w obszernym artykule S. Hartmana „Osiągnięcia naukowe XX-lecia matematyki" [48] opracowanym na podstawie materiałów dostarczonych przez E. Marczewskiego, J. Oderfelda, T. Ważewskiego i wielu innych.

> W zakresie funkcji rzeczywistych jednej zmiennej rzeczywistej pracowała głównie szkoła łódzka (Z. Zahorski, J. Lipiński i ich uczniowie). Tematyka tych prac obejmowała mnogościową charakteryzację różnych klas funkcji rzeczywistych zmiennej rzeczywistej, charakteryzację zbiorów, w których funkcje lub ciągi funkcji określonego typu mają określoną własność itd.

Charakteryzacja zbioru punktów, w których funkcja skoków ma pochodną nieskończoną jest tematem pierwszej pracy doktorskiej, promowanej przez profesora Lipińskiego na Uniwersytecie Gdańskim. Jej autorem jest Mieczysław Gutowski, wówczas asystent Politechniki Częstochowskiej, później — po emigracji do Stanów Zjednoczonych — wymieniany jako pracownik Michigan State University. Niech $f(x)$ będzie funkcją niemalejącą na przedziale $[a, b]$. Skokiem lewostronnym (odpowiednio: prawostronnym) funkcji f w punkcie x nazywamy różnicę $f(x) - f(x^-)$ (odpowiednio: $f(x^+) - f(x)$), gdzie $f(x^-)$ i $f(x^+)$ oznaczają lewostronną i prawostronną granicę funkcji f w punkcie x. Wartość $f(x^+) - f(x^-)$ nazywamy skokiem w punkcie x. Wiadomo, że zbiór punktów w których choć jeden z tych jednostronnych skoków jest dodatni jest przeliczalny, a suma wszystkich skoków nie przewyższa przyrostu funkcji f na $[a, b]$. Gdy f jest równa temu przyrostowi, f nazywamy niemalejącą funkcją skoków. Funkcja skoków to różnica dwóch niemalejących funkcji skoków. Wielu autorów zajmowało się zbiorami punktów nieciągłości i nieróżniczkowalności tych funkcji. E. Marczewski ([83]) zapytał, czy dla każdego zbioru miary zero istnieje niemalejąca funkcja skoków, której pochodna jest równa $+\infty$ w każdym punkcie tego zbioru. Okazało się, że odpowiedź jest negatywna. Trzeba o danym zbiorze założyć więcej. Mianowicie, że jest podzbiorem zbioru typu F_σ miary zero, i to już wystarcza ([71]). Problem charakteryzacji zbioru punktów w których pochodna funkcji skoków jest nieskończona stał się tematem referowanym na seminarium. Częściowe wyniki uzyskał i przedstawił w swojej pracy doktorskiej M. Gutowski [47].

Tematem badań prowadzonych pod kierunkiem prof. Lipińskiego stały się też równania funkcyjne. Pierwsza związana z nimi praca wykonana na seminarium to „On problems of B. Choczewski and M. Kuczma concerning an integral equation" ([46]) autorstwa A. i L. Gulgowskich. Równanie o którym mowa w tytule pracy miało pierwotnie pod znakiem całki złożenie funkcji niewiadomej z funkcjami, wśród których był sinus ograniczony do przedziału $[0, \pi/2]$. E. J. Mc Shane wykazał ([5]), że w tym przypadku jedynym rozwiązaniem tego równania jest funkcja stała równa zero. S. Gołąb opublikował w roku 1948 w pierwszym tomie Colloqium Mathematicum pytanie, czy wynik Mc Shane'a utrzyma się, gdy sinus zastąpimy dowolną funkcją rosnącą ϕ o takiej samej dziedzinie i przeciwdziedzinie jak sinus u Mc Shane'a. Okazało się ([72]), że tak, gdy ϕ jest analityczna lub wypukła, ale dla pewnej ϕ ciągłej równanie posiada też rozwiązania inne niż funkcja stała równa zeru. Na pytanie J. Lipińskiego, czy prawostronna różniczkowalność ϕ w punkcie zero zapewnia, że jedynym rozwiązaniem równania będzie stała zero odpowiedzieli przecząco B. Choczewski i M. Kuczma ([15]). Skonstruowali oni dla dowolnie zadanego naturalnego r funkcję ϕ, taką, że równanie całkowe posiada rozwiązanie niezerowe klasy C^r. Zadali pytanie, czy istnieją ϕ o zadanych przez prof. Gołąba własnościach, takie, że wymienione tu równanie całkowe posiada niezerowe rozwiązania klasy C^∞ (lub inne własności, których tu nie wymieniono). Odpowiedź pozytywna uzyskana przez p. Gulgowskich, pokazuje, że nawet przy dużej regularności funkcji ϕ równanie Mc Shane'a posiada rozwiązania niezerowe.

Ważne miejsce w opisie własności funkcji rzeczywistych zajmują zbiory punktów, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie lub — w przypadku, gdy funkcja jest pochodną określoną na przedziale otwartym — wartości większe (mniejsze) od dowolnie zadanej liczby. Zajmowali się nimi Z. Zahorski ([114]) i inni. Przyjmując coraz mocniejsze założenia o pochodnych Zahorski znajdował coraz mocniejsze warunki topologiczne i miarowe konieczne dla tych zbiorów. Klasy zbiorów posiadających te coraz mocniejsze własności oznaczał symbolami M_i $(i = 1, 2, \ldots, 5)$. Funkcje, dla których wszystkie przeciwobrazy półprostych otwartych należą do zbioru M_i tworzą klasę $\mathcal{M}_i$ Zahorskiego. Odgrywają one znaczną rolę w badaniu własności pochodnych (zob. rozdział „The Zahorski Classes" w monografii A. M. Brucknera [10]). Węgierscy matematycy M. Laczkovich i G. Petruska badali transformanty różnych klas pochodnych (czyli homeomorfizmy), których złożenia wewnętrzne z elementami tych klas pozostają w tej samej klasie ([69])). G. Krzykowski w swojej rozprawie doktorskiej ([60]) zajmował się zbiorami transformat dla wszystkich klas Zahorskiego i relacjami między tymi zbiorami. Między innymi wykazał, że zbiór transformat zbioru pochodnych ograniczonych jest podzbiorem właściwym zbioru transformat klasy $\mathcal{M}_4$ Zahorskiego.

Granice jednostajnie zbieżnych ciągów funkcji zajmują ważne miejsce w analizie matematycznej. Tematem wielu prac są własności tych granic, przy różnych założeniach o wyrazach ciągów. A. Bruckner i M. Rosenfeld ([9]) znaleźli warunek konieczny i dostateczny, by funkcja rzeczywista jednej zmiennej rzeczywistej była taką granicą w przypadku, gdy wyrazy ciągu są funkcjami otwartymi pierwszej klasy Baire'a. Matematyk łódzki M. Filipczak wykrył błąd w dowodzie dostateczności tego warunku, a dokładniej w dowodzie jednego z lematów w wymienionej pracy. S. Wojtan w swojej pracy doktorskiej ([113]) opublikował poprawny dowód dostateczności nie korzystając z wymienionego lematu. Problem, czy wspomniany lemat jest prawdziwy pozostaje otwarty. W następnej publikacji ([112]) przedstawił uogólnienia wyników Brucknera, Rosenfelda i swoich, zakładając, że wyrazy ciągów są funkcjami rzeczywistymi określonymi na różnych przestrzeniach o niezbędnych własnościach: zupełności, ośrodkowości i innych.

2. „Małe podzbiory” prostej rzeczywistej

Tematyka „małych zbiorów” została zapoczątkowana w pierwszych latach XX wieku i rozwijała się żywo do czasów II wojny światowej. Ważny wkład w jej rozwój wnieśli matematycy lwowscy i warszawscy, m.in. Stefan Banach, Kazimierz Kuratowski, Wacław Sierpiński, Stanisław Ulam i Edward Marczewski. W Gdańsku tematyka ta była rozwijana przez Edwarda Grzegorka i jego uczniów, w tym Kubę Jasińskiego oraz Ireneusza Recława. Ten ostatni uzyskał wiele wyników dotyczących małych zbiorów, z których najbardziej znane jest twierdzenie z jego doktoratu, które mówi, że przy założeniu hipotezy continuum iloczyn kartezjański dwóch zbiorów zawsze pierwszej kategorii nie musi mieć tej własności[1]. Wynik ten stanowi rozwiązanie problemu E. Marczewskiego z 1935 roku. Innym szeroko cytowanym wynikiem I. Recława (zamieszczonym w jego habilitacji) jest twierdzenie, że każdy zbiór Łuzina jest niezdeterminowany w grze punktowo-otwartej[2]. Wynik ten stanowi rozwiązanie problemu F. Galvina. Wśród wielu innych wyników prof. Recława dotyczących małych zbiorów należy również wspomnieć:

- konstrukcję (przy założeniu Aksjomatu Martina) podzbioru prostej mocy continuum, którego każdy borelowski obraz w prostą jest miary Lebesgue'a zero i pierwszej kategorii (wynik ten stanowi rozwiązanie problemu Grzegorka) [101];
- konstrukcję γ-zbioru[3], który może być odwzorowany na cały odcinek jednostkowy przy użyciu funkcji borelowskiej [101];
- sformułowanie (wspólnie z Andrzejem Nowikiem) nowej charakteryzacji zbiorów silnie miary zero[4] w języku cięć zbiorów [2].

2.1. Zbieżność punktowa implikująca QN-zbieżność ciągów funkcji.

Jednym z przykładów małego zbioru jest QN-przestrzeń, czyli taka przestrzeń topologiczna X, dla której zbieżność quasi-normalna[5] i zbieżność punktowa ciągów funkcji rzeczywistych określonych na X są równoważne. Własność ta została wprowadzona i była badana przez L. Bukovsky'ego, I. Recława i M. Repicky'ego ([11], [12]) podczas pobytu drugiego z wymienionych na stażu na uniwersytecie w Koszycach. W podobny sposób można zdefiniować własność słabej QN przestrzeni — przestrzeń X ma własność wQN, jeżeli każdy ciąg funkcji rzeczywistych określonych na X, zbieżny punktowo do funkcji zerowej zawiera podciąg, który jest quasi-normalnie zbieżny. Każda QN-przestrzeń jest wQN-przestrzenią. Wiadomo, że wszystkie przestrzenie przeliczalne są QN-przestrzeniami. Jak udowodnił I. Recław, istnieją nieprzeliczalne podzbiory prostej, które są wQN-przestrzeniami, ale jest niesprzeczne z powszechnie przyjmowanymi aksjomatami teorii mnogości, że każda metryczna QN-przestrzeń jest przeliczalna ([102]).

2.2. Parametryczny diagram Cichonia.

Zależności pomiędzy współczynnikami kardynalnymi związanymi z ideałami zbiorów miary Lebesgue'a zero oraz zbiorów pierwszej kategorii na

---

[1] Zbiór jest zawsze pierwszej kategorii, jeżeli jego przekrój z dowolnym zbiorem doskonałym P jest zbiorem pierwszej kategorii w P.

[2] Gra punktowo-otwarta $G(X)$ jest rozgrywana w przestrzeni topologicznej X, bierze w niej udział dwóch graczy: Czarny i Biały. W n-tym ruchu gracz Czarny wybiera punkt x_n, a następnie Biały wybiera otoczenie otwarte U_n punktu x_n. Gracz Czarny wygrywa, jeżeli suma wszystkich zbiorów U_n jest równa X, w przeciwnym przypadku wygrywa Biały. Zbiór X jest niezdeterminowany w grze punktowo-otwartej, jeżeli żaden z graczy nie posiada strategii wygrywającej w grze $G(X)$.

[3] Zbiór X jest γ-zbiorem, gdy dla dowolnego ciągu $(\mathcal{G}_n)_n$, gdzie każdy $\mathcal{G}_n$ jest przeliczalnym pokryciem X, istnieje ciąg $G_n \in \mathcal{G}_n$ taki, że $X \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geqslant k} G_n$.

[4] Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest silnie miary zero, gdy dla dowolnego ciągu $\varepsilon_n \in \mathbb{R}_+$ istnieje ciąg przedziałów otwartych $I_n \subset \mathbb{R}$ takich, że długość I_n jest mniejsza od ε_n i $A \subset \bigcup_n I_n$.

[5] Ciąg funkcji $f_n : X \to \mathbb{R}$ jest zbieżny quasi-normalnie do funkcji $f : X \to \mathbb{R}$, jeżeli istnieje ciąg $\varepsilon_n \to 0$ taki, że dla dowolnego $x \in X$ prawie wszystkie wyrazy ciągu $f_n(x)$ spełniają warunek: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n$.

prostej są opisane w tzw. diagramie Cichonia. J. Pawlikowski i I. Recław ([99]) badali związki pomiędzy niezmiennikami kardynalnymi występującymi w diagramie Cichonia a klasami „małych" zbiorów na prostej (definiowanymi w parametryczny sposób). Tematyka ta była kontynuowana w pracy H. Judaha, A. Liora i I. Recława ([54]).

2.3. **Małe podzbiory przestrzeni produktowych.** Twierdzenie Fubiniego stało się punktem wyjścia do wprowadzenia i badania przez I. Recława i P. Zakrzewskiego własności Fubiniego dla σ-ideałów podzbiorów $\mathbb{R}$. Przypomnijmy, że para σ-ideałów $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ ma własność Fubiniego, jeżeli dla dowolnego zbioru borelowskiego E w $\mathbb{R}^2$, z faktu, że $\mathcal{I}$-prawie wszystkie cięcia E_x należą do ideału $\mathcal{J}$ wynika, że $\mathcal{J}$-prawie wszystkie cięcia E^y należą do $\mathcal{I}$ ([104], [105]).

Twierdzenie Kuratowskiego-Ulama to kategoryjny odpowiednik twierdzenia Fubiniego. Głosi ono, że jeżeli E jest zbiorem pierwszej kategorii w produkcie dwóch przestrzeni topologicznych $X \times Y$, a X ma π-bazę przeliczalną, to prawie wszystkie cięcia E_x zbioru E są pierwszej kategorii w Y. Twierdzenie to zostało uogólnione przez D. Fremlina, T. Natkańca i I. Recława z przestrzeni z π-bazą przeliczalną na klasę przestrzeni diadycznych ([42]).

3. Funkcje typu Darboux

Funkcje rzeczywiste przyjmujące wartości pośrednie były przedmiotem zainteresowania matematyków w latach 60. ubiegłego wieku. Badano związki z różniczkowalnością (każda funkcja pochodna ma własność Darboux) oraz hierarchią funkcji borelowskich (każda funkcja pochodna jest pierwszej klasy Baire'a, zob. np. monografię „Differentiation of Real Function" A. Brucknera [10]). Tematyka ta zyskała ponownie na znaczeniu w latach 90., gdy intensywnie zaczęto rozważać własności funkcji implikujące istnienie punktów stałych, m.in. prawie ciągłość[6], spójnościowość[7] czy rozszerzalność[8]. Dla funkcji określonych na $\mathbb{R}$ prawdziwy jest następujący diagram:

$$\text{rozszerzalność} \Longrightarrow \text{prawie ciągłość} \Longrightarrow \text{spójnościowość} \Longrightarrow \text{własność Darboux},$$

przy czym wiadomo, że w pierwszej klasie Baire'a wszystkie te własności są równoważne, a w wyższych klasach Baire'a powyższe implikacje nie odwracają się. Jan Jastrzębski podał przykład funkcji drugiej klasy Baire'a z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$, która jest spójnościowa ale nie jest prawie ciągła ([53]). Relacje pomiędzy własnościami typu Darboux zmieniają się, jeżeli zamiast funkcji jednej zmiennej rozpatrujemy funkcje wielu zmiennych [18]. Pierwszy przykład rozróżniający własności typu Darboux dla funkcji dwóch zmiennych w klasie B_1 został skonstruowany przez J. Lipińskiego, który tak opisuje to w swoich wspomnieniach [78].

> Funkcję nazywamy prawie ciągłą, jeżeli każdy zbiór otwarty, zawierający jej wykres, zawiera też wykres jakiejś funkcji ciągłej. J. B. Brown [8] udowodnił, że każda funkcja jednej zmiennej pierwszej klasy Baire'a o własności Darboux jest prawie ciągła. R. G. Gibson i K. R. Kellum w pierwotnej wersji pracy [43] zadali pytanie, czy twierdzenie Browna można uogólnić na funkcje dwóch zmiennych. W pracy [75] pokazałem, że nie. Niech g będzie funkcją rzeczywistą zadaną na całej prostej, a $\hat{g}$ funkcją dwóch zmiennych określoną na całej płaszczyźnie wzorem $\hat{g}(x, y) = g(x)$. Okazało się, że gdy g jest funkcją pierwszej klasy Baire'a o własności Darboux (a więc jest prawie ciągła), to $\hat{g}$ choć oczywiście ma te dwie własności, może nie być prawie ciągła. W kolejnej pracy [77] wykazałem, że $\hat{g}$ jest prawie ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągła, co oczywiście jest równoważne

[6] Funkcja $f \colon X \to \mathbb{R}$ jest prawie ciągła (w sensie Stallingsa), jeżeli dla dowolnego otwartego otoczenia $A \subset X \times \mathbb{R}$ wykresu funkcji f, istnieje funkcja ciągła $f \colon X \to \mathbb{R}$, której wykres jest również zawarty w A.

[7] Funkcja $f \colon X \to \mathbb{R}$ jest spójnościowa, jeżeli wykres f po obcięciu do dowolnego zbioru spójnego w X jest zbiorem spójnym w $X \times \mathbb{R}$. Jeżeli $X = \mathbb{R}$, to definicja ta jest równoważna spójności wykresu f.

[8] Funkcja $f \colon X \to \mathbb{R}$ jest rozszerzalna, jeżeli istnieje funkcja spójnościowa $F \colon X \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ taka, że $F(x, 0) = f(x)$ dla każdego $x \in X$.

ciągłości funkcji g. Podobnie $\hat{g} \restriction E$ ma dla każdego spójnego zbioru E wykres spójny, wtedy i tylko wtedy, gdy g jest ciągła[9].

Badano również własności typu Darboux w innych klasach funkcji: funkcjach Sierpińskiego-Zygmunda, funkcjach addytywnych i funkcjach Hamela (T. Natkaniec, J. Jastrzębski, K. Ciesielski, H. Rosen, K. Płotka). W ramach tych badań szczególny nacisk kładziono na istotność założeń teoriomnogościowych w uzyskanych wynikach. Przykładowo, w pracy M. Balcerzaka, K. Ciesielskiego i T. Natkańca [3] udowodniono, że w pewnych modelach teorii mnogości nie istnieją funkcje Sierpińskiego-Zygmunda[10] z własnością Darboux — problem istnienia takich modeli został sformułowany przez U. Darjiego (który skonstruował przykład funkcji Sierpińskiego-Zygmunda z własnością Darboux przy założeniu hipotezy continuum).

3.1. **Struktury algebraiczne w klasie funkcji z własnością Darboux.** Program badania struktur algebraicznych generowanych przez rodziny funkcji rzeczywistych został sformułowany w zespole prof. Z. Grandego w Bydgoszczy (prof. Grande jest doktorantem prof. Lipińskiego). T. Natkaniec udowodnił, że każdą funkcję rzeczywistą ograniczoną można przedstawić jako sumę trzech funkcji rozszerzalnych ([91]). Wynik ten został wzmocniony przez K. Ciesielskiego i I. Recława ([19]) oraz niezależnie przez H. Rosena. Udowodnili oni, że dowolną funkcję rzeczywistą można przedstawić jako sumę dwóch funkcji rozszerzalnych. W ramach tego nurtu badań T. Natkaniec ([87], [92]) zdefiniował powiązane z operacjami algebraicznymi funkcje kardynalne na rodzinach funkcji rzeczywistych. Przykładem takiej funkcji jest addytywność klasy $\mathcal{F}$, czyli moc najmniejszej rodziny $\mathcal{G}$ funkcji, której nie można wsunąć przy pomocy wspólnego składnika w klasę $\mathcal{F}$. Funkcje te były w latach 1997–99 tematem badań polsko-amerykańskiego projektu „Problemy Analizy Teoriomnogościowej"[11]. Okazało się, że addytywność rodzin funkcji może być różna w różnych modelach teorii mnogości. Kombinatoryczną charakteryzację addytywności rodzin funkcji typu Darboux podali K. Ciesielski i A. Miller, analogiczną charakteryzację dla rodziny funkcji Sierpińskiego-Zygmunda znaleźli K. Ciesielski i T. Natkaniec ([17]). J. Gamez-Merino, A. Munoz-Fernandez i J.B. Seoane-Sepulveda udowodnili w 2010 roku, że addytywność ma bezpośredni związek z badaniami nad algebraizowalnością rodzin funkcji. T. Natkaniec udowodnił ([88]), że rodziny funkcji typu Darboux są maksymalnie algebraizowalne, to znaczy zawierają algebrę wymiaru $2^{\mathfrak{c}}$.

T. Natkaniec i I. Recław ([94]) badali również istnienie uniwersalnych składników sumowania dla rodzin funkcji typu Darboux w klasie funkcji borelowskich. Udowodnili, że dla dowolnej liczby porządkowej α istnieje funkcja borelowska f klasy $\alpha + 2$ taka, że suma dowolnej funkcji α klasy Baire'a i funkcji f jest prawie ciągła. Nieco później S. Solecki wzmocnił to twierdzenie, dowodząc, że funkcja f może być wybrana w $\alpha + 1$ klasie Baire'a, co jest najlepszym możliwym wynikiem.

3.2. **Złożenia funkcji typu Darboux.** Wiadomo, że złożenie funkcji z własnością Darboux, których dziedzina i zbiór wartości są równe odcinkowi $[0, 1]$, ma własność Darboux. Złożenie funkcji spójnościowych (nawet funkcji prawie ciągłych) niekoniecznie jest spójnościowe; nawet nie musi mieć punktu stałego (chociaż każda funkcja spójnościowa posiada punkt stały). Otwarte jest cały czas pytanie, czy złożenie funkcji Darboux pierwszej klasy Baire'a — a nawet mocniej: pochodnych — jest spójnościowe. Jako łatwiejszy wariant tego problemu K. Ciesielski postawił

[9]Wyniki te zostały później uogólnione przez A. Maliszewskiego i T. Natkańca na funkcje określone na produktach przestrzeni topologicznych [82].

[10]Funkcja jest Sierpińskiego-Zygmunda, jeżeli jej obcięcie do dowolnego zbioru mocy continuum nie jest ciągłe. (Tw. Blumberga mówi, że dla dowolnej funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ istnieje zbiór A gęsty w $\mathbb{R}$ taki, że f obcięta do zbioru A jest ciągła, zob. też rozdział 4.3).

[11]Efekty projektu badawczego „Problemy Analizy Teoriomnogościowej" zostały opisane w pracy przeglądowej K. Ciesielskiego [16].

pytanie o istnienie punktu stałego złożenia dwóch funkcji pochodnych. Pozytywnej odpowiedzi dla funkcji pierwszej klasy Baire'a z własnością Darboux udzielili niezależnie w 2001 roku M. Csörnyei, T. O'Neil i D. Preiss [22] oraz M. Elekes, T. Keleti i V. Prokaj [28]. W pierwszej z prac postawiono problem istnienia punktów stałych złożeń dowolnej skończonej liczby funkcji pochodnych z odcinka $[0,1]$ w odcinek $[0,1]$.

Rozwiązanie powyższego problemu zawarł w doktoracie P. Szuca ([110]). Pokazał, że złożenie dowolnej skończonej liczby funkcji spójnościowych, których wykres jest zbiorem typu G_δ na płaszczyźnie (każda funkcja pochodna jest spójnościowa i ma wykres typu G_δ) ma punkt stały. Odpowiedział też pozytywnie na pytanie K. Kelluma z końca lat osiemdziesiątych ([56]), dowodząc, że twierdzenie Szarkowskiego o punktach okresowych może być uogólnione na klasę funkcji pochodnych. Wyniki te wpisały się w schemat badań kombinatorycznych układów dynamicznych: dla jakich przestrzeni i dla jakich klas odwzorowań obowiązuje tzw. porządek Szarkowskiego punktów okresowych. Część z powyższych wyników została uogólniona na odwzorowania wielowartościowe w pracy [1] napisanej przez Andresa, Šnyrychovą i Szucę. Kolejne uogólnienie tw. Szarkowskiego na przestrzeń operatorów mierzalnych podał Paweł Barbarski (doktorant P. Szucy) w pracy [4].

Tematyka układów dynamicznych generowanych przez funkcje typu Darboux była kontynuowana przez M. Čiklovą z Opavy, która uogólniła w [20] charakteryzację Misiurewicza funkcji z zerową entropią — funkcja ma zerową entropię wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jej punkt okresowy ma okres zasadniczy będący potęgą liczby 2 — z przestrzeni funkcji ciągłych na przestrzeń funkcji spójnych G_δ. Tematyka ta jest obecnie intensywnie rozwijana w zespole prof. Ryszarda Pawlaka z Łodzi — zapytał się on m.in. w pracy [98] czy analogiczne twierdzenie jest prawdziwe w klasie funkcji prawie ciągłych. T. Natkaniec i P. Szuca pokazali, że dowolna funkcja o własności Darboux i punkcie o okresie zasadniczym różnym od 2^n ma dodatnią entropię. Z drugiej strony, istnieją funkcje prawie ciągłe o prawie dowolnym, arbitralnie zadanym zbiorze okresów zasadniczych punktów okresowych ([95]).

4. Zbiory punktów zbieżności ciągów funkcyjnych

Temat własności zbiorów punktów zbieżności ciągów funkcji rzeczywistych należących do ustalonej klasy pojawił się w badaniach profesora Lipińskiego w trakcie jego pracy w Łodzi i był kontynuowany przez matematyków w Gdańsku. Profesor Lipiński tak opisywał początek swoich zainteresowań tym zagadnieniem ([78]):

> Różne zbiory występujące w analizie matematycznej, lub ich zestawy, są tematem kilku prac. Do ciekawszych należy para (A, B), gdzie A to zbiór punktów prostej, w których ciąg funkcji ciągłych jest rozbieżny do $+\infty$, a B, w których ten ciąg jest rozbieżny do $-\infty$. Gdy w roku 1960 byłem po habilitacji na półrocznym stażu na Uniwersytecie Moskiewskim, P. Ł. Ulianow powiedział mi, że do tego czasu pary tej nie udało się scharakteryzować. Wiadomo było, że na mocy twierdzenia Hahna-Sierpińskiego A i B muszą być zbiorami $F_{\sigma\delta}$. I. P. Kornfeld [58] zauważył, że A i B muszą być rozdzielone zbiorami F_σ. Problem, czy te wszystkie warunki konieczne tworzą łącznie warunek wystarczający, pozostawał otwarty. Kornfeld znalazł warunki wystarczające, ale znacznie mocniejsze. Praca [74] zawiera streszczenie mojej pozytywnej odpowiedzi, a praca [73] jej pełny tekst.

Problem charakteryzacji zbioru punktów zbieżności ciągu funkcji rozważany był w dwóch wymiarach: dla różnych rodzajów zbieżności (punktowej, dyskretnej, pozaskończonej i ideałowej);

oraz dla różnych klas funkcji (ciągłych, klasy B_α, quasi-ciągłych[12], klikowych[13], aproksymatywnie ciągłych[14], itp.)

Zbiory punktów zbieżności punktowej i dyskretnej dla wielu klas funkcji, w tym typu Darboux, klasy B_α, pochodnych, quasi-ciągłych i klikowych zostały scharakteryzowane przez Jolantę Wesołowską w rozprawie doktorskiej ([111]). Analogiczne wyniki dla zbieżności pozaskończonej uzyskali T. Natkaniec i J. Wesołowska ([89]).

Układy 7-Łuniny, czyli układy siedmiu typów zbieżności bądź rozbieżności ciągu funkcji z danej klasy zostały scharakteryzowane przez M. A. Łuninę w 1975 dla funkcji ciągłych ([81]), a dla klasy funkcji quasi-ciągłych przez T. Natkańca i J. Wesołowską ([97]). Wersję twierdzenia Łuniny dla zbieżności ideałowej ciągów funkcji ciągłych względem ideałów typu F_σ podali D. Borzestowski i I. Recław ([6]), a dla ciągów funkcji quasi-ciągłych T. Natkaniec i J. Wesołowska [97]. Pewien szczególny wariant twierdzenia Łuniny dla ideałów borelowskich (odpowiednik wspomnianego powyżej twierdzenia Lipińskiego) został podany przez I. Recława w jego ostatniej pracy [103].

4.1. **Zbiory punktów ciągłości funkcji rzeczywistych.** Od dawna wiadomo, że zbiór punktów ciągłości funkcji rzeczywistej jest zbiorem typu F_σ, i na odwrót, każdy zbiór typu F_σ na prostej jest zbiorem punktów ciągłości pewnej funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Fakt ten był uogólniany przez Z. Grande, który scharakteryzował pary zbiorów: punktów ciągłości i punktów półciągłości z góry funkcji rzeczywistych [45]. Wynik prof. Grande został następnie rozszerzony w doktoracie (napisanym pod jego opieką) przez T. Natkańca na układy trójek zbiorów punktów ciągłości, półciągłości z góry oraz półciągłości z dołu [90].

Prof. Lipiński wspólnie z T. Šalatem scharakteryzowali zbiory punktów quasi-ciągłości oraz (oddzielnie) zbiory punktów klikowości funkcji pomiędzy przestrzeniami metrycznymi [80]. Następnie, J. Lipiński wspólnie z J. Ewert scharakteryzowali trójki zbiorów (C, Q, K), dla których istnieje funkcja rzeczywista określona na zbiorze $\mathbb{R}^k$ taka, że zbiory C, Q, K są odpowiednio zbiorami jej punktów ciągłości, quasi-ciągłości i klikowości [31]. W kolejnych pracach [29] i [30] rozwiązują analogiczny problem przy słabszych założeniach o dziedzinie i przeciwdziedzinie funkcji.

Prof. Lipiński badał również pary zbiorów punktów ciągłości i punktów Darboux funkcji. Tak opisuje swoje wyniki w [78]:

> Para (C_f, D_f), gdzie C_f jest zbiorem punktów ciągłości, a D_f zbiorem punktów Darboux funkcji rzeczywistej jednej zmiennej f, jest opisana w pracy [76]. Punkt Darboux określił A. Császár [21] i pokazał, że f ma własność Darboux wtedy i tylko wtedy gdy $D_f = \mathbb{R}$. Oczywiście zbiór C_f jest G_δ. Prócz tego C_f jest zawarty w D_f, który, jak wykazał H. Rosen [106], też jest G_δ. J. C. Ceder [14] pytał, czy te konieczne warunki są też wystarczające. Przy zadanej parze zbiorów G_δ, spełniającej te i dodatkowo inne warunki, potrafił dobrać do nich funkcję f drugiej klasy Baire'a, taką, że para ta stawała się parą (C_f, D_f). Pokazałem w odpowiedzi, że jego dodatkowe warunki są zbyteczne.

4.2. **Zbiory liczb granicznych.** J. Jastrzębski w swojej rozprawie doktorskiej, napisanej pod kierunkiem prof. Wilczyńskiego z Uniwersytetu Łódzkiego, rozważał zbiory liczb granicznych dla

[12]Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest quasi-ciągła (w sensie Kempistego), jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$, każdej liczby rzeczywistej x i jej otwartego otoczenia U istnieje taki otwarty i niepusty podzbiór V zbioru U, że $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ dla wszystkich y należących do V. Wszystkie funkcje ciągłe, jak również wszystkie funkcje lewo- i prawostronnie ciągłe są quasi-ciągłe.

[13]Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest klikowa, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$, każdej liczby rzeczywistej x i jej otwartego otoczenia U istnieje taki otwarty i niepusty podzbiór V zbioru U, że $|f(y_1) - f(y_2)| < \varepsilon$ dla wszystkich y_1, y_2 należących do V. Wszystkie funkcje quasi-ciągłe są klikowe.

[14]Funkcja jest aproksymatywnie ciągła, jeżeli przeciwobraz dowolnego zbioru otwartego względem tej funkcji jest zbiorem otwartym w topologii gęstości.

specjalnych klas funkcji określonych na górnej półpłaszczyźnie ([51], [52]). Badano również zbiory liczb granicznych funkcji względem kategoryjnej topologii gęstości wprowadzonej przez W. Wilczyńskiego. M. Strześniewski w swoim doktoracie (napisanym pod opieką prof. Wilczyńskiego) badał zbiory punktów kategoryjnej asymetrii funkcji rzeczywistych, to znaczy zbiory takich punktów x, w których których zbiory lewo- i prawostronnych kategoryjnie aproksymatywnych liczb granicznych są różne. W szczególności udowodniono, że dla dowolnej funkcji f takie zbiory są σ-porowate typu $F_{\sigma\delta\sigma}$, a więc małe [108]. Z drugiej strony, M. Strześniewski skonstruował przykład funkcji, dla której taki zbiór ma moc continuum [109].

4.3. **Uogólnienia klasycznych twierdzeń.** W 1922 roku H. Blumberg udowodnił, że dla dowolnej funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ istnieje zbiór A gęsty w $\mathbb{R}$ i taki, że obcięcie f do A jest funkcją ciągłą. Sierpiński i Zygmund udowodnili w 1923 roku, że istnieją funkcje, dla których każde obcięcie do zbioru mocy continuum jest nieciągłe. J. Brown udowodnił, że dla dowolnej funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ istnieje zbiór A mocy continuum, taki, że obcięcie f do A jest funkcją punktowo nieciągłą[15]. A. Katafiasz i T. Natkaniec w pracy o wariantach twierdzenia Blumberga [55] wzmocnili twierdzenie Browna, zastępując w tezie punktową nieciągłość przez quasi-ciągłość. W tym samym czasie J. Jasiński i I. Recław rozważali twierdzenia typu Blumberga i Browna w klasie funkcji mierzalnych względem ustalonego σ-ciała zbiorów ([50]).

5. Funkcje addytywne

Jak wiadomo, każda ciągła funkcja addytywna jest liniowa. Istnieją funkcje addytywne, które nie są liniowe, ale każda taka funkcja jest niemierzalna w sensie Lebesgue'a i nie ma własności Baire'a.

W pracy [27] F. G. Dorais, R. Filipów i T. Natkaniec udowodnili, że jest niesprzeczne z powszechnie przyjmowanymi aksjomatami teorii mnogości, że istnieje nieciągła — a zatem nieliniowa — funkcja addytywna, która jest (s)-mierzalna[16][17] (a nawet istnieje nieciągły, ale (s)-mierzalny izomorfizm liniowy między przestrzeniami $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^k$ nad ciałem liczb wymiernych). Funkcje takie zostały skonstruowane przy dwóch różnych założeniach teoriomnogościowych. W pierwszej konstrukcji autorzy używają założenia, że $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$, a w drugiej wykorzystują aksjomat CPA (Covering Property Axiom) wprowadzony przez K. Ciesielskiego i J. Pawlikowskiego. W obu konstrukcjach najistotniejszym składnikiem jest istnienie pewnej „ładnej" bazy Hamela[18]. Istotnym składnikiem konstrukcji „ładnych" baz Hamela jest udowodnione przez autorów uogólnienie twierdzenia J. Mycielskiego o zbiorach niezależnych w systemach relacyjnych.

5.1. **Funkcje Hamela.** Związki funkcji addytywnych z bazami Hamela stały się motywacją do wprowadzenia przez K. Płotkę[19] definicji funkcji Hamela. Funkcję nazywamy funkcją Hamela, gdy jej wykres jest bazą Hamela w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ (tj. wykres funkcji jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^2$ nad ciałem liczb wymiernych).

K. Płotka pokazał, że każda funkcja, której wykres jest podzbiorem $\mathbb{R}^2$ jest sumą dwóch funkcji Hamela, a co za tym idzie istnieją funkcje Hamela, które są niemierzalne w sensie Lebesgue'a, nie mają własności Baire'a, nie są (s)-mierzalne. Pojawia się jednak pytanie, jak bardzo regularne mogą być funkcje Hamela. Sierpiński udowodnił, że baza Hamela nie może być zbiorem

[15] Funkcja jest punktowo nieciągła jeżeli ma gęsty zbiór punktów ciągłości.

[16] Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest (s)-mierzalna, jeżeli dla dowolnego zbioru doskonałego $P \subset \mathbb{R}$ istnieje taki zbiór doskonały $Q \subset P$, że obcięcie f do zbioru Q jest funkcją ciągłą.

[17] Pierwsze rozdziały tej pracy powstały w trakcie pobytu R. Filipowa w The Fields Institute for Research in Mathematical Sciences w Toronto, gdzie odbywał się w 2002 roku Thematic Program on Set Theory and Analysis.

[18] Bazą Hamela nazywamy bazę przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^n$ nad ciałem liczb wymiernych.

[19] K. Płotka pracę magisterską napisał na Uniwersytecie Gdańskim pod kierunkiem E. Grzegorka, obecnie pracuje na uniwerytecie w Scranton. Definicję funkcji Hamela wprowadził w doktoracie [100] napisanym pod kierunkiem K. Ciesielskiego na West Virginia University.

borelowskim, a zatem nie istnieje borelowska funkcja Hamela. W pracy [38] R. Filipów, A. Nowik i P. Szuca udowodnili, że istnieją funkcje Hamela, które są mierzalne w sensie Lebesgue'a, mają własność Baire'a, są (s)-mierzalne, a T. Natkaniec udowodnił, że funkcje Hamela mogą być quasi-ciągłe [93]. K. Płotka i I. Recław udowodnili, że istnieją funkcje Hamela, które można pokryć skończoną liczbą częściowych funkcji ciągłych. Struktury algebraiczne generowane przez rodzinę funkcji Hamela zostały opisane przez T. Natkańca i jego doktoranta Grzegorza Matusika ([84]).

5.2. **Własność różnicy w sensie de Bruijna.** Rodzina funkcji rzeczywistych $\mathcal{F}$ określonych na $\mathbb{R}$ ma własność różnicy w sensie de Bruijna (w skrócie: własności różnicy), gdy dla dowolnej funkcji f takiej, że $\Delta_h f \in \mathcal{F}$ dla każdego $h \in \mathbb{R}$ (gdzie $\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$) istnieje funkcja $g \in \mathcal{F}$ oraz funkcja addytywna $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że $f = g + A$. Pojęcie to zostało wprowadzone w 1951 roku przez N. G. de Bruijna, który zauważył, że funkcje ciągłe mają własność różnicy.

Na seminarium w Gdańsku tematyka ta pojawiła się po studenckim pobycie R. Filipowa na zajęciach Szkoły z Analizy Rzeczywistej i Widmowej we Wrocławiu w 1999 roku, gdzie odbył się cykl wykładów M. Laczkovicha [68]. Rozważania o własności różnicy funkcji borelowskich i mierzalnych w sensie Baire'a stanowiły treść pracy doktorskiej R. Filipowa, napisanej pod kierunkiem prof. I. Recława [34].

P. Erdös, zakładając hipotezę continuum, udowodnił, że zarówno rodzina funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a, jak i rodzina funkcji z własnością Baire'a nie mają własności różnicy. Z drugiej strony, M. Laczkovich pokazał, że jest niesprzeczne z powszechnie akceptowanymi aksjomatami teorii mnogości, że rodzina funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a ma własność różnicy i postawił problem, czy jest niesprzeczne z ZFC, że rodzina funkcji z własnością Baire'a ma własność różnicy. W pracy [33] R. Filipów udowodnił, że odpowiedź na to pytanie jest pozytywna[20]. W pracy [66] M. Laczkovich sformułował problem, czy z założenia, że wszystkie funkcje $\Delta_h f$ są borelowskie wynika, że są one ograniczonej klasy borelowskiej. R. Filipów i I. Recław udowodnili, że przy założeniu hipotezy continuum odpowiedź na to pytanie jest negatywna ([35]). Badania te były kontynuowane przez K. Ciesielskiego i J. Pawlikowskiego, którzy uzyskali taką samą odpowiedź przy założeniu aksjomatu CPA.

6. Mierzalność „po współrzędnych"

Mówimy, że funkcja $F\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ jest produktowo mierzalna, jeżeli przeciwobrazy zbiorów otwartych względem F są zbiorami mierzalnymi w $X \times Y$. Funkcja F jest złożeniowo mierzalna, jeżeli dla dowolnej funkcji mierzalnej $g\colon X \to Y$ odwzorowanie $f\colon X \to \mathbb{R}$ określone wzorem $f(x) = F(x, g(x))$ jest funkcją mierzalną — własność ta jest nazywana również sup-mierzalnością lub mierzalnością w sensie Carathéodory'ego.

Wiadomo, że jeżeli funkcja jest produktowo mierzalna, to jej prawie wszystkie cięcia poziome i prawie wszystkie cięcia pionowe są funkcjami mierzalnymi. Natomiast mierzalność wszystkich cięć nie zapewnia mierzalności produktowej. Podobnie, produktowa mierzalność nie zapewnia złożeniowej mierzalności funkcji (ani na odwrót). Powstaje więc problem sformułowania warunków na cięcia, które implikują produktową (złożeniową) mierzalność funkcji. W Polsce badania nad takimi problemami były prowadzone m.in. przez K. Kuratowskiego, E. Marczewskiego i Cz. Rylla-Nardzewskiego. W Gdańsku tematyka ta była rozwijana przez J. Lipińskiego, przez jego doktorantów i przez doktorantów jego doktorantów: Z. Grande i G. Kwiecińską. Poniższe dwa akapity zostały wybrane ze wspomnień profesora Lipińskiego [78].

> W roku 1970 przebywałem na zaproszenie Słowackiej Akademii Nauk na zamku w Smolenicach. W czasie tej wizyty L. Mišik zadał mi dwa pytania: Niech f będzie funkcją określoną na $\mathbb{R}^2$. Oznaczmy $f_x(y) = f(x, y)$ a $f_y(x) = f(x, y)$.

[20]Problem ten został niezależnie rozwiązany inną metodą przez matematyka węgierskiego T. Matraia.

Czy z założenia, że wszystkie funkcje f_x i f_y są pierwszej klasy Baire'a i mają własność Darboux wynika mierzalność funkcji f? Czy wynika ona z mocniejszego założenia, że funkcje te są aproksymatywnie ciągłe? Na pierwsze z tych pytań odpowiedziałem po chwili namysłu negatywnie. Odpowiedź opublikowałem w pracy [79] wraz z drugim, wtedy jeszcze otwartym pytaniem. Odpowiedział na nie pozytywnie R. O. Davies [25]. W tej sytuacji pozostawał otwarty problem mierzalności funkcji f przy pośrednim założeniu, że f_x i f_y są pochodnymi ograniczonymi. Został on rozstrzygnięty pozytywnie przez M. Laczkovicha [67].

Funkcja $f(x, y)$ nazywa się sup-mierzalna (superpozycyjnie mierzalna), jeżeli dla każdej funkcji mierzalnej $g(x)$ superpozycja $f(x, g(x))$ jest funkcją mierzalną. Pojęcie to pochodzi od C. Carathéodory [13], który pokazał, że wśród mierzalnych funkcji f istnieją funkcje nie sup-mierzalne. W pracy [44], wspólnej z Z. Grande, pokazałem, że z hipotezy continuum wynika istnienie niemierzalnej funkcji f, która jest sup-mierzalna. Pytanie, czy takie funkcje istnieją pochodziło od wymienionego współautora z jego — wtedy jeszcze nieopublikowanej — rozprawy habilitacyjnej. Znaleziona przeze mnie funkcja f jest w literaturze cytowana jako „polish monster". Pochodzi to stąd, że złożona z dowolną funkcją mierzalną g, „unicestwia" ją, dając w wyniku funkcję h prawie wszędzie równą zeru[21].

G. Kwiecińska rozważała w swoim doktoracie (którego promotorem był prof. Grande) funkcje określone na produkcie przestrzeni metrycznych z wyróżnioną bazą różniczkowania i udowodniła, że aproksymatywna półciągłość z dołu cięć jednego rodzaju oraz półciągłość z góry cięć drugiego rodzaju implikują produktową mierzalność, a produktowa mierzalność wraz z aproksymatywną mierzalnością cięć jednego rodzaju gwarantują złożeniową mierzalność funkcji.

6.1. **Odwzorowania wielowartościowe.** Problematyka mierzalności funkcji w przestrzeniach produktowych została przeniesiona przez G. Kwiecińską na grunt odwzorowań wielowartościowych. Odwzorowania wielowartościowe (tzw. multifunkcje) są narzędziem stosowanym między innymi w teorii inkluzji różniczkowych, analizie nieliniowej czy teorii sterowania. W pracy habilitacyjnej [65] G. Kwiecińska uzyskała szereg wyników dotyczących związków pomiędzy różnymi rodzajami mierzalności multifunkcji. W większości z nich zakłada się mierzalność cięć pionowych oraz pewien rodzaj regularności cięć poziomych. Wykorzystując idee Hukuhary dotyczące pojęć pochodnej i całki multifunkcji określonych na przedziale, wprowadziła pojęcie pochodnej multifunkcji. Zastosowała swoje wyniki dotyczące multifunkcji sub-mierzalnych w dowodzie istnienia rozwiązań inkluzji różniczkowych.

G. Kwiecińska wraz z J. Czarnowską wprowadziły nową definicję własności przyjmowania wartości pośrednich dla multifunkcji określonych na przedziale o wartościach będących podzbiorami prostej rzeczywistej ([24]). W odróżnieniu od poprzednio zdefiniowanej przez J. Ewert i J. S. Lipińskiego własności Darboux multifunkcji, własność przyjmowania wartości pośrednich posiadają wszystkie multifunkcje ciągłe (J. Czarnowska i G. Kwiecińska, [24]), a nawet ogólniej, wszystkie multifunkcje pochodne (G. Kwiecińska, [64]).

Joanna Czarnowska badała też zależności między lokalnie zdefiniowanymi własnościami odwzorowań wielowartościowych (jak własność Darboux w punkcie), a ich globalnymi definicjami. Poprzez wprowadzenie pojęcia F-spójności dla odwzorowań wielowartościowych uzyskała ogólną charakteryzację takich zależności dla odwzorowań, a wiele znanych wyników dla funkcji rzeczywistych uzyskano jako szczególne przypadki tej charakteryzacji [23].

---

[21] Niezależnie ten sam wynik uzyskał A. Kharazishvili w książce [57]. Problem, czy funkcja o takich własnościach może być skonstruowana bez dodatkowych założeń teoriomnogościowych pozostawał otwarty przez blisko trzydzieści lat i został roztrzygnięty (negatywnie) przez A. Rosłanowskiego i S. Shelaha w pracy [107].

7. Zbieżność ideałowa

Ideałem na zbiorze liczb naturalnych nazywamy dowolną rodzinę podzbiorów $\mathbb{N}$ zamkniętą ze względu na operacje wykonywania skończonych sum i brania podzbiorów; w tym kontekście słowo „ideał" można rozumieć jako „rodzina małych podzbiorów $\mathbb{N}$" — przykładem ideału jest rodzina wszystkich skończonych podzbiorów $\mathbb{N}$. Zwykle zakładamy, że do ideału należą wszystkie skończone podzbiory liczb naturalnych, ale nie należy zbiór wszystkich liczb naturalnych. Poniższe pojęcie zbieżności ideałowej zostało wprowadzone przez H. Cartana w 1937 roku. Jeśli $\mathcal{I}$ jest ideałem na $\mathbb{N}$, to mówimy, że ciąg liczb rzeczywistych (x_n) jest $\mathcal{I}$-zbieżny do liczby rzeczywistej x, gdy zbiór wszystkich n spełniających $|x_n - x| < \varepsilon$ należy do $\mathcal{I}$ dla dowolnego $\varepsilon > 0$.

Mówimy, że ciąg (f_n) funkcji rzeczywistych zdefiniowanych na zbiorze X jest $\mathcal{I}$-punktowo zbieżny do f, jeżeli $(f_n(x))$ jest $\mathcal{I}$-zbieżny do $f(x)$ dla wszystkich x należących do X. Dla ideału składającego się z wszystkich skończonych podzbiorów zbioru liczb naturalnych otrzymujemy zwykłą zbieżność ciągów liczbowych oraz punktową zbieżność ciągów funkcyjnych.

Zbieżność ideałowa zaczęła pojawiać się wśród tematów seminarium z teorii funkcji rzeczywistych po powrocie prof. I. Recława z rocznego pobytu na uniwersytecie w Scranton, gdzie powstały wspólne prace I. Recława i J. Jasińskiego dotyczące tego rodzaju zbieżności. Wprowadzili oni pojęcie IC-przestrzeni, czyli takiej przestrzeni X, dla której zbieżność ideałowa ciągu funkcji ciągłych do funkcji ciągłej implikuje istnienie zbioru $A \subset \mathbb{N}$ z filtra dualnego takiego, że ciąg funkcyjny jest zbieżny punktowo na zbiorze indeksów z A. IC-przestrzeń jest przykładem „małego zbioru", np. dla ideału zbiorów asymptotycznej gęstości zero każda IC-przestrzeń jest w σ-ideale zbiorów typu (s_0) (zob. też rozdział 2.1).

W pierwszej pracy z tej tematyki, która powstała w ramach seminarium R. Filipów, N. Mrożek, I. Recław i P. Szuca ([36]) rozważali pytanie o $\mathcal{I}$-zbieżność $\mathcal{I}$-podciągów ciągu liczb rzeczywistych — gdzie $\mathcal{I}$-podciąg ciągu (x_n) oznacza obcięcie ciągu (x_n) do zbioru indeksów spoza ideału $\mathcal{I}$. Wprowadzili pojęcie ideału Bolzano-Weierstrassa, tj. takiego ideału $\mathcal{I}$, że dla dowolnego ciągu ograniczonego istnieje jego $\mathcal{I}$-podciąg $\mathcal{I}$-zbieżny oraz pokazali, że nie wszystkie ideały są Bolzano-Weierstrassa. Scharakteryzowali tę własność przy pomocy klasycznych pojęć teoriomnogościowych: w języku rodzin rozcinających, a — dla podklasy P-ideałów analitycznych — w języku rozszerzeń do ideałów typu F_σ. Przy założeniu hipotezy continuum, w drugiej z przedstawionych powyżej charakteryzacji warunek rozszerzalności do ideału właściwego typu F_σ może zostać zastąpiony przez rozszerzalność do P-ideału maksymalnego[22].

Ci sami autorzy w [37] rozważali zbieżność ideałową ciągów funkcji ciągłych charakteryzując, lub częściowo charakteryzując, ideały dla których zachodzą funkcyjne odpowiedniki twierdzenia Bolzano-Weierstrassa: tw. Arzeli-Ascoliego, tw. Helly'ego i tw. Mazurkiewicza. Te i inne uogólnienia twierdzeń o klasycznej zbieżności ciągów funkcji na zbieżność ideałową były tematem pracy doktorskiej N. Mrożka [85] napisanej pod opieką prof. I. Recława. Twierdzenie Jegorowa mówi, że jeżeli ciąg funkcji mierzalnych jest punktowo zbieżny na zbiorze mierzalnym X, to jest też zbieżny jednostajnie na zbiorze $X \setminus A$ dla pewnego $A \subset X$ dowolnie małej miary. Naturalne uogólnienie na zbieżność ideałową poprzez zamianę zbieżności punktowej i jednostajnej odpowiednio na ideałową punktową i ideałową jednostajną nie działa dla większości rozpatrywanych w literaturze ideałów. N. Mrożek pokazał, że jeżeli zbieżność jednostajną zamienić na równo-ideałową zbieżność (zdefiniowaną dla P-ideałów analitycznych), to tak sformułowane słabe tw. Jegorowa jest prawdziwe dla wszystkich analitycznych P-ideałów ([86]).

[22]W literaturze w tym kontekście częściej używa się dualnego pojęcia ultrafiltru. Zbiór wszystkich ultrafiltrów określonych na zbiorze $\mathbb{N}$ z odpowiednio zdefiniowaną topologią stanowi uzwarcenie Čecha-Stone'a zbioru liczb naturalnych. Pojęcie P-ideału maksymalnego jest pojęciem dualnym do pojęcia P-punktu w uzwarceniu Čecha-Stone'a zbioru liczb naturalnych.

7.1. **Rodziny granic ideałowo zbieżnych ciągów funkcji.** Dla dowolnej rodziny funkcji rzeczywistych można rozpatrywać rodzinę wszystkich granic punktowo zbieżnych ciągów funkcji z takiej rodziny. Dla funkcji ciągłych rodzinę taką stanowią funkcje pierwszej klasy Baire'a. Analogiczne pytanie można postawić dla $\mathcal{I}$-zbieżności, zarówno dla różnych ideałów $\mathcal{I}$, jak i dla różnych klas funkcji. Najbardziej naturalne jest pytanie o granice ideałowo zbieżnych punktowo ciągów funkcji ciągłych określonych na $\mathbb{R}$. Dla ideału zbiorów asymptotycznej gęstości zero P. Kostyrko, T. Šalát i W. Wilczyński pokazali w pracy [59], że klasa granic ideałowo zbieżnych ciągów funkcji ciągłych jest tożsama z rodziną funkcji pierwszej klasy Baire'a. M. Laczkovich z I. Recławem w nieopublikowanej notatce uogólnili ten dowód na wszystkie P-ideały analityczne, a w pracy [70] podali charakteryzację ideałów borelowskich (używając pewnej własności rozdzielania ideału od filtra dualnego), dla których granice zbieżnych ideałowo ciągów funkcji ciągłych pokrywają się z pierwszą klasą Baire'a. Niezależnie ta sama charakteryzacja została udowodniona dla ideałów analitycznych przez G. Debsa i J. Saint Raymonda [26], a potem została ona uogólniona na wszystkie ideały przez A. Bouziada [7].

W pracy [70] znajdował się też wynik mówiący, że charakteryzacja podana dla pierwszej klasy Baire'a obowiązuje dla funkcji skończonych klas borelowskich, tj. rodzina wszystkich punktowych granic ideałowych funkcji z klasy borelowskiej $\alpha < \omega$ tworzy borelowską klasę $\alpha + 1$. Powyższy wynik został przeniesiony przez R. Filipowa i P. Szuca ([41]) na pozostałe klasy borelowskie, a także na inne rodzaje zbieżności — ideałową dyskretną i ideałową quasi-normalną. Badania ideałowej zbieżności quasi-normalnej kontynuowane były przez doktoranta M. Staniszewskiego ([39], [40]).

Dla punktowych granic ideałowych ciągów funkcji quasi-ciągłych charakteryzacja podana w pracach [70], [26] i [7] nie obowiązuje. T. Natkaniec i P. Szuca w pracy [96] podali kombinatoryczną charakteryzację ideałów borelowskich, dla których rodzina $\mathcal{I}$-granic ciągów quasi-ciągłych funkcji rzeczywistych określonych na X jest równa rodzinie klasycznych granic takich ciągów (dla dowolnej przestrzeni metrycznej Baire'a X). A. Kwela skonstruował ideał $\mathcal{WR}$, który jest ideałem krytycznym dla zbieżności ideałowej ciągów funkcji quasi-ciągłych: udowodnił, że ideał na $\mathbb{N}$ ma powyższą własność wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera kopii izomorficznej ideału $\mathcal{WR}$ [61].

We wspomnianej już pracy [26] G. Debs i J. Saint Raymond wprowadzili też pojęcie rangi ideału: ideał analityczny $\mathcal{I}$ ma rangę $\alpha < \omega_1$, jeśli dla każdej zerowymiarowej przestrzeni polskiej rodzina $\mathcal{I}$-granic ciągów ciągłych funkcji rzeczywistych jest równa rodzinie wszystkich funkcji rzeczywistych borelowskiej klasy α. A. Kwela z I. Recławem w pracy [62] pokazali, że przekrój ideałów może mieć rangę 1 nawet wtedy, gdy wyjściowe ideały mają dowolnie dużą rangę. Obliczyli oni również rangę produktu dwóch ideałów w przypadku, gdy pierwszy z nich jest ideałem koanalitycznym rangi 1. Wcześniej G. Debs i J. Saint Raymond udowodnili podobne twierdzenie jedynie dla ideału wszystkich skończonych podzbiorów zbioru liczb naturalnych.

7.2. **Kombinatoryczne i topologiczne własności ideałów.** Mówimy, że ideał $\mathcal{I}$ na $\mathbb{N}$ jest reprezentowany topologicznie, jeśli istnieją przestrzeń metryzowalna ośrodkowa X, σ-ideał $\mathcal{J}$ na X i bijekcja $f\colon \mathbb{N} \to D$ (gdzie D jest ośrodkiem X) takie, że $\mathcal{I}$ składa się dokładnie z tych podzbiorów A zbioru liczb naturalnych, dla których domknięcie zbioru $f[A]$ należy do $\mathcal{J}$. Powyższe pojęcie zostało wprowadzone przez M. Saboka i J. Zapletala w 2011 roku. Postawili oni pytanie o warunek konieczny i dostateczny na to, aby ideał był reprezentowany topologicznie. A. Kweli wspólnie z M. Sabokiem udało się scharakteryzować te ideały przy użyciu wyłącznie pojęć kombinatorycznych ([63]).

Literatura

1. Jan Andres, Pavla Šnyrychová, and Piotr Szuca, *Sharkovskii's theorem for connectivity G_δ-relations*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **16** (2006), no. 8, 2377–2393. MR 2266021 (2007f:37062)

2. A. Andryszczak and I. Recław, *A note on strong measure zero sets.*, Acta Univ. Carol., Math. Phys. **34** (1993), no. 2, 7–9 (English).
3. Marek Balcerzak, Krzysztof Ciesielski, and Tomasz Natkaniec, *Sierpiński-Zygmund functions that are Darboux, almost continuous, or have a perfect road*, Arch. Math. Logic **37** (1997), no. 1, 29–35. MR 1485861 (98k:26005)
4. Paweł Barbarski, *The Sharkovskiĭ theorem for spaces of measurable functions*, J. Math. Anal. Appl. **373** (2011), no. 2, 414–421. MR 2720692 (2012a:37075)
5. T. Bonnesen and W. Fenchel, *Theorie der konvexen Körper*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974, Berichtigter Reprint. MR 0344997 (49 #9736)
6. Dariusz Borzestowski and Ireneusz Recław, *On Lunina's 7-tuples for ideal convergence*, Real Anal. Exchange **35** (2010), no. 2, 479–485. MR 2683612 (2011j:28005)
7. Ahmed Bouziad, *The point of continuity property, neighbourhood assignments and filter convergences*, Fund. Math. **218** (2012), no. 3, 225–242. MR 2982776
8. Jack B. Brown, *Almost continuous Darboux functions and Reed's pointwise convergence criteria*, Fund. Math. **86** (1974), 1–7. MR 0352358 (50 #4845)
9. A. M. Bruckner and M. Rosenfeld, *The uniform closure of certain classes of open functions*, Math. Z. **101** (1967), 245–254. MR 0217228 (36 #319)
10. Andrew Bruckner, *Differentiation of real functions*, second ed., CRM Monograph Series, vol. 5, American Mathematical Society, Providence, RI, 1994. MR 1274044 (94m:26001)
11. Lev Bukovský, Ireneusz Recław, and Miroslav Repický, *Spaces not distinguishing pointwise and quasinormal convergence of real functions*, Topology Appl. **41** (1991), no. 1-2, 25–40. MR 1129696 (93b:54037)
12. ______, *Spaces not distinguishing convergences of real-valued functions*, Topology Appl. **112** (2001), no. 1, 13–40. MR 1815270 (2002e:54010)
13. C. Carathéodory, *Vorlesungen über reelle Funktionen. 2. Aufl.*, X + 718 S. mit 47 Fig. (1927). Leipzig, B. G. Teubner (1927)., 1927.
14. J. Ceder, *On Darboux points of real functions*, Period. Math. Hungar. **11** (1980), no. 1, 69–80. MR 571138 (81c:26003)
15. B. Choczewski and M. Kuczma, *On a problem of Lipiński concerning an integral equation*, Colloq. Math. **25** (1972), 113–115, 164. MR 0306845 (46 #5967)
16. K. Ciesielski, *Set-theoretic real analysis*, J. Appl. Anal. **3** (1997), no. 2, 143–190. MR 1619547 (99k:03038)
17. Krzysztof Ciesielski and Tomasz Natkaniec, *Algebraic properties of the class of Sierpiński-Zygmund functions*, Topology Appl. **79** (1997), no. 1, 75–99. MR 1462608 (99c:04003)
18. Krzysztof Ciesielski, Tomasz Natkaniec, and Jerzy Wojciechowski, *Extending connectivity functions on $\mathbb{R}^n$.*, Topology Appl. **112** (2001), no. 2, 193–204 (English).
19. Krzysztof Ciesielski and Ireneusz Recław, *Cardinal invariants concerning extendable and peripherally continuous functions*, Real Anal. Exchange **21** (1995/96), no. 2, 459–472. MR 1407262 (97f:26003)
20. Michaela Čiklová, *Dynamical systems generated by functions with connected G_δ graphs*, Real Anal. Exchange **30** (2004/05), no. 2, 617–637. MR 2177423 (2006m:26005)
21. Ákos Császár, *Sur la propriété de Darboux*, Comptes Rendus du Premier Congrès des Mathématiciens Hongrois, 27 Août–2 Septembre 1950, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952, pp. 551–560. MR 0056676 (15,111a)
22. Marianna Csörnyei, Toby C. O'Neil, and David Preiss, *The composition of two derivatives has a fixed point*, Real Anal. Exchange **26** (2000/01), no. 2, 749–760. MR 1844391 (2002f:26004)
23. Joanna Czarnowska, *$\mathcal{F}$-connectivity and strong $\mathcal{F}$-connectivity of multivalued maps.*, Real Anal. Exchange **26** (2001), no. 2, 559–579 (English).
24. Joanna Czarnowska and Grażyna Kwiecińska, *On the Darboux property of multivalued functions*, Demonstratio Math. **25** (1992), no. 1-2, 193–199. MR 1170682 (93f:26016)
25. Roy O. Davies, *Separate approximate continuity implies measurability*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **73** (1973), 461–465. MR 0325870 (48 #4216)
26. Gabriel Debs and Jean Saint Raymond, *Filter descriptive classes of Borel functions*, Fund. Math. **204** (2009), no. 3, 189–213.
27. François G. Dorais, Rafał Filipów, and Tomasz Natkaniec, *On some properties of Hamel bases and their applications to Marczewski measurable functions*, Cent. Eur. J. Math. **11** (2013), no. 3, 487–508. MR 3016317
28. Márton Elekes, Tamás Keleti, and Vilmos Prokaj, *The composition of derivatives has a fixed point*, Real Anal. Exchange **27** (2001/02), no. 1, 131–140. MR 1887687 (2002k:26005)
29. J. Ewert and J.S. Lipiński, *On points of continuity, quasi-continuity and cliquishness of maps.*, Topology theory and applications, 5th Colloq., Eger/Hung. 1983, Colloq. Math. Soc. János Bolyai 41, 269-281 (1985)., 1985.

30. ——— , *On relations between continuity, quasi-continuity and cliquishness of maps.*, General topology and its relations to modern analysis and algebra VI, Proc. 6th Symp., Prague/Czech. 1986, Res. Expo. Math. 16, 177-185 (1988)., 1988.
31. Janina Ewert and J.S. Lipiński, *On points of continuity, quasicontinuity and cliquishness of real functions.*, Real Anal. Exchange **8** (1983), 473–478 (English).
32. Małgorzata Filipczak and Elżbieta Wagner-Bojakowska (eds.), *Traditional and present-day topics in real analysis. Dedicated to Professor Jan Stanisław Lipiński on the occasion of his 90th birthday.*, Łódź: Łódź University Press, University of Łódź, Faculty of Mathematics and Computer Science, 2013 (English).
33. R. Filipów, *On the difference property of the family of functions with the Baire property*, Acta Math. Hungar. **100** (2003), no. 1-2, 97–104. MR 1984862 (2004f:26007)
34. R. Filipów, *Własność różnicy w sensie de bruijna dla rodzin funkcji mierzalnych*, Ph.D. thesis, Instytut Matematyczny PAN, Warszawa, 2004.
35. R. Filipów and I. Recław, *On the difference property of Borel measurable and* (s)*-measurable functions*, Acta Math. Hungar. **96** (2002), no. 1-2, 21–25. MR 1912487 (2004c:26004)
36. Rafał Filipów, Nikodem Mrożek, Ireneusz Recław, and Piotr Szuca, *Ideal convergence of bounded sequences*, J. Symbolic Logic **72** (2007), no. 2, 501–512. MR 2320288
37. Rafał Filipów, Nikodem Mrożek, Ireneusz Recław, and Piotr Szuca, $\mathcal{I}$*-selection principles for sequences of functions*, J. Math. Anal. Appl. **396** (2012), no. 2, 680–688. MR 2961261
38. Rafał Filipów, Andrzej Nowik, and Piotr Szuca, *There are measurable Hamel functions*, Real Anal. Exchange **36** (2010/11), no. 1, 223–229. MR 3016414
39. Rafał Filipów and Marcin Staniszewski, *On ideal equal convergence.*, Cent. Eur. J. Math. **12** (2014), no. 6, 896–910 (English).
40. ——— , *Pointwise versus equal (quasi-normal) convergence via ideals.*, J. Math. Anal. Appl. **422** (2015), no. 2, 995–1006 (English).
41. Rafał Filipów and Piotr Szuca, *Three kinds of convergence and the associated* $\mathcal{I}$*-Baire classes*, J. Math. Anal. Appl. **391** (2012), no. 1, 1–9.
42. David Fremlin, Tomasz Natkaniec, and Ireneusz Recław, *Universally Kuratowski-Ulam spaces*, Fund. Math. **165** (2000), no. 3, 239–247. MR 1805426 (2002b:54006)
43. Richard G. Gibson and Kenneth R. Kellum, *Darboux* (B) *functions, connectivity* (B) *functions and functions of Baire class* 1, Colloq. Math. **35** (1976), no. 2, 247–251. MR 0410640 (53 #14388)
44. Z. Grande and J. S. Lipiński, *Un exemple d'une fonction sup-mesurable qui n'est pas mesurable*, Colloq. Math. **39** (1978), no. 1, 77–79. MR 507266 (80b:28006)
45. Zbigniew Grande, *Quelques remarques sur la semi-continuité supérieure. (Some remarks on upper semi-continuity).*, Fund. Math. **126** (1985), 1–13 (French).
46. A. Gulgowska and L. Gulgowski, *On problems of B. Choczewski and M. Kuczma concerning an integral equation*, Colloq. Math. **38** (1977), no. 1, 91–94. MR 0463846 (57 #3785)
47. Mieczysław Gutowski, *Sur la dérivée infinie d'une fonction de sauts*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **17** (1972), 1213–1222. MR 0318410 (47 #6957)
48. S. Hartman, *Osiągnięcia naukowe XX-lecia matematyki*, Wiadomości Matematyczne **8** (1965), 1–21.
49. Paul D. Humke, *A modest review of a great deal of work*, Traditional and present-day topics in real analysis, Faculty of Mathematics and Computer Science. University of Łódź, Łódź, 2013, pp. 11–26.
50. Jakub Jasiński and Ireneusz Recław, *Restrictions to continuous and pointwise discontinuous functions*, Real Anal. Exchange **23** (1997/98), no. 1, 161–174. MR 1609838 (99g:26005)
51. Jan Jastrzębski, *On directional cluster sets*, Fund. Math. **115** (1983), no. 3, 155–161. MR 708173 (84g:54022)
52. ——— , *On sums of directional essential cluster sets*, Bull. London Math. Soc. **20** (1988), no. 2, 145–150. MR 924243 (89c:30085)
53. ——— , *An answer to a question of R. G. Gibson and F. Roush*, Real Anal. Exchange **15** (1989/90), no. 1, 340–341. MR 1042551 (90m:26006)
54. Haim Judah, Amiran Lior, and Ireneusz Recław, *Very small sets*, Colloq. Math. **72** (1997), no. 2, 207–213. MR 1426696 (98a:04003)
55. Aleksandra Katafiasz and Tomasz Natkaniec, *A new variant of Blumberg's theorem*, Real Anal. Exchange **22** (1996/97), no. 2, 806–813. MR 1460992 (98d:54032)
56. Kenneth R. Kellum, *Iterates of almost continuous functions and Sarkovskiĭ's theorem*, Real Anal. Exchange **14** (1988/89), no. 2, 420–422. MR 995981 (90d:26008)
57. A. Kharazishvili, *Invariant extension of lebesgue measure*, Izd. Tbilis. Univ., Tbilisi, 1983.
58. I. P. Kornfel′d, *Sets of convergence and divergence of functional sequences*, Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika **1963** (1963), no. 4 (35), 79–88. MR 0158034 (28 #1262)
59. Pavel Kostyrko, Tibor Šalát, and Władysław Wilczyński, $\mathcal{I}$*-convergence*, Real Anal. Exchange **26** (2000/01), no. 2, 669–685.

60. Grzegorz Krzykowski, *On the transformers of the Zahorski classes of functions*, Fund. Math. **125** (1985), no. 1, 59–70. MR 813989 (87b:26009)
61. Adam Kwela, *A note on a new ideal.*, J. Math. Anal. Appl. **430** (2015), no. 2, 932–949 (English).
62. Adam Kwela and Ireneusz Recław, *Ranks of $\mathcal{F}$-limits of filter sequences.*, J. Math. Anal. Appl. **398** (2013), no. 2, 872–878 (English).
63. Adam Kwela and Marcin Sabok, *Topological representations.*, J. Math. Anal. Appl. **422** (2015), no. 2, 1434–1446 (English).
64. Grażyna Kwiecińska, *On the intermediate value property of multivalued functions.*, Real Anal. Exchange **26** (2001), no. 1, 245–260 (English).
65. Grażyna Kwiecińska, *Measurability of multifunctions of two variables*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) **452** (2008), 67. MR 2379509 (2009e:28045)
66. M. Laczkovich, *Functions with measurable differences*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **35** (1980), no. 1-2, 217–235. MR 588896 (82a:39002)
67. ———, *On the measurability of functions whose sections are derivatives*, Period. Math. Hungar. **12** (1981), no. 4, 243–254. MR 642636 (83f:28004)
68. ———, *The difference property*, Paul Erdős and his mathematics, I (Budapest, 1999), Bolyai Soc. Math. Stud., vol. 11, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2002, pp. 363–410. MR 1954704 (2004b:39003)
69. M. Laczkovich and G. Petruska, *On the transformers of derivatives*, Fund. Math. **100** (1978), no. 3, 179–199. MR 509545 (80b:26005)
70. Miklós Laczkovich and Ireneusz Recław, *Ideal limits of sequences of continuous functions*, Fund. Math. **203** (2009), no. 1, 39–46.
71. J. S. Lipiński, *Sur la dérivée d'une fonction de sauts*, Colloq. Math. **4** (1957), 197–205. MR 0087719 (19,399a)
72. ———, *Sur une intégrale*, Colloq. Math. **7** (1959), 67–74. MR 0123156 (23 #A485)
73. ———, *Sets of points of convergence to infinity of a sequence of continuous functions*, Fund. Math. **51** (1962/1963), 35–43. MR 0186756 (32 #4212)
74. Jan Lipiński, *Convergence to infinity of a sequence of continuous functions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **140** (1961), 752–754. MR 0131690 (24 #A1538)
75. Jan Stanisław Lipiński, *On a problem concerning the almost continuity*, Zeszyty Naukowe Wydz. Mat., Fiz. i Chem. U.G. **4** (1978), 61–63.
76. ———, *On Darboux points*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **26** (1978), no. 11, 869–873 (1979). MR 524916 (80e:26004)
77. ———, *On some extensions of almost continuous functions and of connectivity functions*, Tatra Mt. Math. Publ. **2** (1993), 15–18. MR 1251032 (94m:26008)
78. ———, *Moje prace naukowe*, (2001), Maszynopis.
79. J.S. Lipiński, *On measurability of functions of two variables.*, Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. Math. Astron. Phys. **20** (1972), 131–135 (English).
80. J.S. Lipiński and T. Šalát, *On the points of quasicontinuity and cliquishness of functions.*, Czech. Math. J. **21** (1971), 484–489 (English).
81. M.A. Lunina, *Convergence and divergence sets of sequences of real continuous functions on a metric space.*, Math. Notes **17** (1975), 120–126 (English).
82. Aleksander Maliszewski and Tomasz Natkaniec, *Almost continuous functions of two variables*, Rev. Real Acad. Cienc. Exact. Fís. Natur. Madrid **87** (1993), no. 2-3, 395–404.
83. E. Marczewski, *Remarks on sets of measure zero and the derivability of monotonic functions*, Prace Mat. **1** (1955), 141–144. MR 0071494 (17,136c)
84. G. Matusik and T. Natkaniec, *Algebraic properties of Hamel functions*, Acta Math. Hungar. **126** (2010), no. 3, 209–229. MR 2591764 (2010m:15003)
85. N. Mrożek, *Zbieżność ideałowa ciągów funkcyjnych*, Ph.D. thesis, Uniwersytet Gdański, 2010.
86. Nikodem Mrożek, *Ideal version of Egorov's theorem for analytic p-ideals*, J. Math. Anal. Appl. **349** (2009), 452–458.
87. T. Natkaniec, *Almost continuity*, Real Anal. Exchange **17** (1991/92), no. 2, 462–520. MR 1171393 (93e:54009)
88. T. Natkaniec, *Algebrability of some families of Darboux-like functions*, Linear Algebra Appl. **439** (2013), no. 10, 3256–3263.
89. T. Natkaniec and J. Wesołowska, *On the convergence of ω_1 sequences of real functions*, Acta Math. Hungar. **90** (2001), no. 4, 333–350. MR 1910717 (2003d:26002)
90. Tomasz Natkaniec, *On semicontinuity points.*, Real Anal. Exchange **9** (1984), 215–232 (English).
91. Tomasz Natkaniec, *Extendability and almost continuity*, Real Anal. Exchange **21** (1995/96), no. 1, 349–355. MR 1377548 (97g:26002)

92. ———, *New cardinal invariants in real analysis*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **44** (1996), no. 2, 251–256. MR 1416428 (98a:26007)
93. Tomasz Natkaniec, *An example of a quasi-continuous Hamel function.*, Real Anal. Exchange **36** (2011), no. 1, 231–236 (English).
94. Tomasz Natkaniec and Ireneusz Recław, *Universal summands for families of measurable functions*, Acta Sci. Math. (Szeged) **64** (1998), no. 3-4, 463–471. MR 1666018 (2000i:26004)
95. Tomasz Natkaniec and Piotr Szuca, *On Pawlak's problem concerning entropy of almost continuous functions.*, Colloq. Math. **121** (2010), no. 1, 107–111 (English).
96. Tomasz Natkaniec and Piotr Szuca, *On the ideal convergence of sequences of quasi-continuous functions*, Fund. Math. **232** (2016), no. 3, 269–280.
97. Tomasz Natkaniec and Jolanta Wesołowska, *Sets of ideal convergence of sequences of quasi-continuous functions.*, J. Math. Anal. Appl. **423** (2015), no. 2, 924–939 (English).
98. Ryszard J. Pawlak, *On the entropy of Darboux functions*, Colloq. Math. **116** (2009), no. 2, 227–241. MR 2520142 (2010i:37036)
99. Janusz Pawlikowski and Ireneusz Recław, *Parametrized Cichoń's diagram and small sets*, Fund. Math. **147** (1995), no. 2, 135–155. MR 1341727 (96m:04002)
100. Krzysztof Płotka, *Set-theoretic and algebraic properties of certain families of real functions*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2001, Thesis (Ph.D.)–West Virginia University. MR 2702380
101. Ireneusz Recław, *On small sets in the sense of measure and category.*, Fund. Math. **133** (1989), no. 3, 255–260 (English).
102. Ireneusz Recław, *Metric spaces not distinguishing pointwise and quasinormal convergence of real functions*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **45** (1997), no. 3, 287–289. MR 1477547 (98h:54006)
103. ———, *Sets of ideal convergence of sequences of quasi-continuous functions*, J. Math. Anal. Appl. **394** (2012), no. 2, 475–480.
104. Ireneusz Recław and Piotr Zakrzewski, *Strong Fubini properties of ideals*, Fund. Math. **159** (1999), no. 2, 135–152. MR 1670087 (2000b:03174)
105. ———, *Fubini properties of ideals*, Real Anal. Exchange **25** (1999/00), no. 2, 565–578. MR 1778511 (2001e:03086)
106. Harvey Rosen, *Connectivity points and Darboux points of real functions*, Fund. Math. **89** (1975), no. 3, 265–269. MR 0382560 (52 #3443)
107. A. Rosłanowski and S. Shelah, *Measure creatures*, Israel J. Math. **151** (2006), 61–110.
108. Mariusz Strze"sniewski, *A note on asymmetry sets.*, Real Anal. Exchange **14** (1989), no. 2, 469–473 (English).
109. Mariusz Strześniewski, *On $\mathcal{I}$-asymmetry.*, Real Anal. Exchange **26** (2001), no. 2, 593–602 (English).
110. Piotr Szuca, *Punkty stałe odwzorowań typu darboux*, Ph.D. thesis, Uniwersytet Gdański, 2004.
111. Jolanta Wesołowska, *Zbiory punktów zbieżności ciągów funkcji rzeczywistych*, Ph.D. thesis, Uniwersytet Gdański, 2001.
112. S. Wojtan, *Über die gleichmäßige Konvergenz einer Folge offener Funktionen.*, Zesz. Nauk. Wydz. Mat. Fiz. Chem., Mat. UG **2** (1974), 177–188 (Polish).
113. Stanisław Wojtan, *On the uniform convergence of sequences of open first Baire class functions.*, Math. Z. **140** (1974), 23–27 (English).
114. Z. Zahorski, *Sur la première dérivée*, Trans. Amer. Math. Soc. **69** (1950), 1–54. MR 0037338 (12,247c)