dr Ewa Kozłowska-Walania
Zakład Algebry IM UG

Wprowadzenie do algebry homologicznej

Wykład fakultatywny 2021/2022

W swojej słynnej monografii „Algebra", w ćwiczeniach do rodziału 4., Serge Lang umieścił następujące ćwiczenie:

> *Wziąć dowolny podręcznik algebry homologicznej i udowodnić wszystkie twierdzenia, nie zaglądając do dowodów podanych w tej książce.*

Dodajmy, że zaraz po ćwiczeniu następuje uwaga *Należy pominąć to ćwiczenie przy pierwszym czytaniu.* Zamieszczenie tego ćwiczenia nie oznacza, że algebra homologiczna jest przedmiotem łatwym, ale wskazuje na pewną naturalność jej metod, którą obserwujemy przy dowodzeniu twierdzeń.

Proponowany wykład stanowi wprowadzenie do algebry homologicznej i jej zastosowań do algebry, geometrii i topologii. Algebra homologiczna zawdzięcza swoje istnienie rozwojowi topologii algebraicznej w XX wieku i powstała jako język służący do opisu topologicznych własności obiektów geometrycznych, a powstanie i sukces nowego języka jest zawsze w matematyce dużym wydarzeniem. Dziedzina ta szybko rozszerzyła swój zasięg i zaczęła być stosowana do opisu obiektów spoza zakresu, do którego została początkowo stworzona. W szczególności, okazało się, że zasięg metod stosowanych pierwotnie w topologii jest znacznie większy niż można było sądzić i obejmuje wiele działów algebry nie mających bezpośredniego związku z topologią algebraiczną, jak np. teoria grup i pierścieni czy teoria Galois. Za początek algebry homologicznej można uważać klasyczne prace Eilenberga i Maclane'a z lat czterdziestych ubiegłego wieku i przede wszystkim słynną monografię „Homological Algebra" autorstwa Cartana i Eilenberga z 1956 roku. Książka ta zawiera wszystkie podstawowe konstrukcje algebry homologicznej oraz aksjomatyczną definicję funktorów pochodnych dla funktorów addytywnych na kategorii modułów nad pierścieniem.

Orientacyjny zakres wykładu:
1. Podstawowe własności teorii modułów, moduły wolne, projektywne, injektywne, nakrycie modułu;
2. Produkty tensorowe i grupy homomorfizmów;
3. Grupy homologii i kohomologii kompleksów symplicjalnych i uwagi o grupach (ko)homologii dla przestrzeni topologicznych;
4. Rezolwenty projektywne, injektywne i łańcuchowa równoważność rezolwent;
5. Funktory produktów torsyjnych i funktory rozszerzeń Tor_n^R oraz Ext_R^n i ich własności, interpretacja grupy $\mathrm{Ext}_R^1(M,N)$, twierdzenie o współczynnikach uniwersalnych;
6. Teoria homologii i kohomologii grup, związek drugiej grupy kohomologii z klasyfikacją rozszerzeń grupy.

Śledzenie wykładu nie wymaga od Słuchaczy wiadomości wykraczających poza kursowy wykład Algebry.

Serdecznie zapraszam!

Literatura:
1. S. Balcerzyk, *Wstęp do algebry homologicznej*, PWN 1970;
2. D. Johnson, *Topics in Theory of Group Presentations*, London Mathematical Society Lecture Notes, 1980;
3. C. Weibel, *An introduction to homological algebra, volume 38 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994;