dr Ewa Kozłowska-Walania
Zakład Algebry IM UG

Grupy i pewne ich zastosowania

Seminarium licencjackie 2023/2024

Jednym z najbardziej podstawowych zjawisk, jakie napotykamy niemal na każdym kroku jest *symetria* a o pewnym obiekcie mówimy, że jest *symetryczny*, w najbardziej ogólnym ujęciu, jeśli „nie zmienia się" przy pewnych przekształceniach. Prawie każdy z nas miał w życiu okazję spróbować ułożyć kostkę Rubika - mistrzowie potrafią poradzić sobie z tym zadaniem w zaledwie kilka sekund. Jak to możliwe? Okazuje się, że odpowiedź na to pytanie niesie matematyka, a konkretnie jej dziedzina zwaną teorią grup, którą bardzo ogólnie można określić jako „badania nad symetrią". Okazuje się bowiem, że ułożenie kostki Rubika sprowadza się do znajomości zbioru tzw. *ruchów* i pewnych zależności między nimi - wykonując ruchy w optymalnej kolejności, uporamy się z zadaniem naprawdę szybko, bo z dowolnego stanu początkowego kostki wystarczy co najwyżej 20 ruchów.

Spróbujmy teraz przyjrzeć się tej sytuacji z matematycznego punktu widzenia: kolejne ruchy kostki Rubika możemy składać ze sobą, uzyskując nowe stany tej samej kostki. Każdy z ruchów możemy odwrócić, przywracając kostkę do stanu poprzedniego, a możemy też nie wykonać żadnego ruchu i zostawić stan kostki bez zmian. Zatem oprócz samego zbioru ruchów, mamy również tutaj pewną strukturę, która spełnia definicję *grupy*.

Grupa ta ma

$$2^{27} \cdot 3^{14} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 = 43\,252\,003\,274\,489\,856\,000$$

elementów. Jest to rzecz jasna zawrotna liczba... Niemniej jednak każdy ruch w tym ogromnym zbiorze powstaje jako pewne złożenie tzw. *ruchów podstawowych*, które stanowią niejako *litery* w alfabecie wszystkich ruchów. Okazuje się, że wystarczy zaledwie 6 takich ruchów podstawowych, aby uzyskać wszystkie możliwe ruchy kostki Rubika. W teorii grup, o takich elementach mówimy, że *generują* one całą grupę a analogia z literami alfabetu nie jest tutaj przypadkowa i ma głęboko sięgające konsekwencje, czym zajmuje się tzw. *kombinatoryczna teoria grup*. Te proste rozważania pozwoliły nam więc uzyskać model dla zagadnienia kostki Rubika w języku teorii grup.

Podczas seminarium poznamy podstawy teorii grup i różne jej ciekawe zastosowania, tak matematyce jak i poza nią. W zależności od indywidualnych zainteresowań poszczególnych Uczestników seminarium, możemy poruszyć następujące tematy:

(1) Grupy permutacji - jedne z najważniejszych przykładów grup, ponieważ dowolna grupa może być widziana jako podgrupa pewnej grupy permutacji, np. grupa kostki Rubika jest podgrupą grupy permutacji zbioru 48-elementowego.
(2) Elementy kombinatorycznej teorii grup - przedstawienie grup za pomocą generatorów i relacji.
(3) Elementy teorii reprezentacji - jak wykorzystać macierze i przekształcenia liniowe do badania grup.
(4) Grupy w geometrii - tapety, kafelki, desenie, kryształy.
(5) Podstawy kryptografii - jak wykorzystać algebrę do szyfrowania danych.
(6) Elementy kodowania algebraicznego - kody korygujące błędy.

Podczas seminarium będziemy również korzystać z tekstów w języku angielskim, ale jego zaawansowana znajomość nie jest wymagana.

Serdecznie zapraszam!

Przykładowa literatura:

1. A. Białynicki-Birula, Algebra, PWN, 2022.
2. W. Ledermann, Introduction to group theory, 1973.
3. J. Browkin, Teoria reprezentacji grup skonczonych, PWN, 2010.
4. D. L. Johnson, *Presentations of groups*, Cambridge University Press, 1997;
5. N. Koblitz, Algebraiczne aspekty kryptografii, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 2000.
6. W. J. Gilbert, W. K. Nicholson, Algebra współczesna z zastosowaniami, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 2008.