

POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA I – rok szkolny 2015/2016

poziom: ponadgimnazjalny

PÓŁFINAŁ

1. Rozwiąż w liczbach całkowitych układ równań

$$\begin{cases} ab + cd = -1 \\ ac + bd = -1 \\ ad + bc = -1 \end{cases}$$

2. Oblicz długości promienia r sfery wpisanej i R sfery opisanej na ostrosłupie prawidłowym czworokątnym o krawędzi podstawy 1 i wysokości h .
3. Rozstrzygnij, czy istnieją funkcje f i g określone na zbiorze liczb rzeczywistych, takie że dla dowolnych x i y zachodzi równość $f(x) \cdot g(y) = x + y + 1$.
4. Siedemnastokąt opisany na okręgu ma wszystkie boki równej długości. Pokaż, że jest on foremny.
5. Rozwiąż równanie $x = \sqrt{a - \sqrt{a + x}}$ z niewiadomą x i parametrem a .
6. Pokaż, że $(n - 1)n(n + 1)(n + 2) + 1$ jest kwadratem liczby całkowitej dla dowolnej liczby całkowitej n .
7. Dane są kolejne liczby naturalne od 1 do 2016. Określić, ile wynosi największa liczba m o tej własności, że jeśli spośród tych liczb usuniemy dowolne m liczb, to i tak wśród pozostałych znajdziemy dwie takie, że jedna z nich jest podzielna przez drugą.
8. Czy trójmian kwadratowy $ax^2 + bx + c$ o współczynnikach całkowitych a , b i c może mieć wyróżnik równy 23?
9. Znaleźć wszystkie pary liczb naturalnych dodatnich (x, y) takie, że $x + y = a^n$ oraz $x^2 + y^2 = a^m$ dla pewnych liczb naturalnych a , n , m .
10. W jakim trójkącie środki wszystkich trzech wysokości leżą na jednej prostej?