

Propozycje zadań meczowych poziom: szkoła ponadgimnazjalna

1. Wśród liczb trzycyfrowych jest x liczb o iloczynie cyfr równym zero oraz y liczb o iloczynie cyfr równym cztery. Ile wynosi $\frac{x}{y}$?
2. Ile cyfr ma dziesiętny zapis wyrażenia
$$\frac{10^{10} \cdot 1000^{1000}}{100^{100}}?$$
3. Ile jest liczb naturalnych n , takich, że miara kąta wewnętrznego n -kąta foremnego wyraża się całkowitą liczbą stopni?
4. W kwadracie o boku 2 pole wyraża się tą samą liczbą co połowa obwodu. Czy istnieją inne prostokąty o tej własności, których boki mają długości będące liczbami całkowitymi?
5. Oznaczmy przez M środek boku CD danego prostokąta $ABCD$. Jakie założenia dotyczące wymiarów tego prostokąta trzeba przyjąć, aby zachodziło $BD \perp AM$?
6. Piszemy kolejne liczby naturalne jedna za drugą, poczynając od jedynki według schematu: wypisujemy wszystkie liczby jednocyfrowe i po ich wypisaniu piszemy 0 (jedno zero), następnie wypisujemy wszystkie liczby dwucyfrowe i po ich wypisaniu dopisujemy 00 (dwa zera), dalej piszemy wszystkie liczby trzycyfrowe i po ich wypisaniu dopisujemy 000 (trzy zera) itd. Ile zer jest wśród pierwszych 2015 cyfr napisanych w ten sposób?
7. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, a środek okręgu opisanego O leży wewnątrz czworokąta. Wykaż, że jeśli $\angle BAO = \angle DAC$, to przekątne czworokąta są prostopadłe.
8. Ile liczb naturalnych od 1 do 2015 jest podzielnych przez 20 ale nie jest podzielnych przez 15?
9. Adam i Basia grają w następującą grę. Na stole leży 10 kamieni. Gracze na zmianę zabierają ze stołu 1, 2 lub 3 kamienie. Obowiązuje jednak reguła, że żaden z graczy nie może w danym ruchu wziąć tyle kamieni, ile przed chwilą zabrał przeciwnik, chyba, że został na stole tylko jeden kamień, który gracz musi już zabrać. Grę zaczyna Basia. Ile kamieni powinna wziąć w pierwszym ruchu, aby zapewnić sobie zwycięstwo? A może bez względu na to, jaki ruch wykona, zawsze przegra?
10. Programista, w programie obliczającym objętość prostopadłościanu omyłkowo wpisał $S + h$, gdzie S oznacza pole podstawy prostopadłościanu a h jego wysokość. Z tej przyczyny dla pewnego prostopadłościanu, którego długości wszystkich krawędzi są liczbami całkowitymi, program podał aż trzy różne wyniki, w zależności od ustawienia prostopadłościanu: 304, 416, 169. Jaka jest naprawdę objętość tego prostopadłościanu?