Ogólne informacje dotyczące zadań meczowych

Wspólny komentarz do poniższych zadań: Poniżej przedstawiono różne zadania meczowe, a każde w dwóch wariantach: łatwiejszym (Ł) i trudniejszym (T). Choć nigdzie nie jest to *explicite* napisane, za każdym razem należy podać pełne uzasadnienie odpowiedzi, tzn. szczegółowo opowiedzieć tok rozumowania. Aby odpowiedź była kompletna, musi zawierać wszystkie możliwe wyniki. Jeśli treść zadania wydaje się zawodnikowi w jakimś miejscu niedoprecyzowana, to powinien on rozważyć wszystkie przypadki (tak jest np. jeśli jest mowa o liczbach naturalnych i nie jest jasne, czy chodzi o zbiór z zerem, czy bez zera lub w sytuacji, gdy zawodnik nie wie, czy użyte słowo "para" oznacza w zadaniu "parę uporządkowaną" czy po prostu "dwie liczby").

Mecz będzie prowadzony według regulaminu Pomorskich Meczów Matematycznych:
https://mat.ug.edu.pl/rm2015//pdf/PMM-RegulaminMeczu.pdf

Zespół układający zestaw dba o to, aby w zestawie znalazły się zarówno zadania łatwiejsze, jak i trudniejsze. Tak, aby warto było przemyśleć strategię gry, w szczególności, że zgodnie z cytowanym wyżej Regulaminem, losowanie drużyny rozpoczynającej mecz odbywa się na samym początku, przed rozejściem się drużyn do rozwiązywania zadań.

Zadania meczowe – przykłady różnych trudności

1Ł. Podaj wszystkie pary liczb naturalnych, których największy wspólny dzielnik wynosi 31, a najmniejsza wspólna wielokrotność to 2015.

1T. Ile jest wszystkich par liczb naturalnych, których największy wspólny dzielnik jest większy niż 1, a najmniejsza wspólna wielokrotność to 2015.

2Ł. Jeżeli liczbę dwucyfrową podzielimy przez sumę jej cyfr, to uzyskamy 8 i resztę 4. Jeżeli natomiast podzielimy tę liczbę przez sumę jej cyfr zmniejszoną o dwa, to otrzymamy 10 i resztę 2. Co to za liczba?

2T. Jaką największą resztę można uzyskać dzieląc liczbę dwucyfrową przez sumę jej cyfr?

3Ł. Na każdej z dwóch prostych równoległych obrano pięć różnych punktów. Jaka jest maksymalna liczba trójkątów, których wierzchołkami są te punkty?

3T. Na jednej z dwóch prostych równoległych obrano n, zaś na drugiej k różnych punktów. Wiadomo, że maksymalna liczba trójkątów, których wierzchołkami są te punkty wynosi 45. Podaj, ile wynosi $|n - k|$.

4Ł Dwa wielokąty foremne mają w sumie 109 przekątnych. Ile w sumie mają boków?

4T. Wykaż, że jeżeli liczba boków wielokąta wypukłego jest podzielna przez 3, to liczba jego przekątnych jest podzielna przez 9.

5Ł. Wykaż, że dla trzech danych liczb naturalnych niepodzielnych przez 3 albo suma ich wszystkich, albo suma pewnych dwóch z nich dzieli się przez 3.

5T. Wykaż, że spośród danych 7 liczb naturalnych zawsze można wybrać trzy z nich tak, aby suma tych trzech liczb była podzielna przez 3

6Ł. Wiadomo, że dla pewnej liczby naturalnej n, liczba $\frac{3n+1}{n+2}$ jest całkowita. Ile wynosi n?

6T. Czy można tak dobrać liczbę naturalną n, aby ułamek $\frac{14n+3}{21n+4}$ był skracalny?

7Ł. Czy można trójkąt równoboczny podzielić na trzy przystające trapezy?

7T. Jakie trójkąty można rozciąć prostą na dwie takie części, z których można ułożyć prostokąt?

8Ł. Wszystkie kąty ośmiokąta mają równe miary, a jego boki mają długość na przemian 1 i $\sqrt{2}$. Oblicz pole tego ośmiokąta.

8T. Wszystkie kąty ośmiokąta mają równe miary, a jego boki mają długość na przemian 2 i $\sqrt{2}$. Czy ośmiokąt ten można rozciąć na siedem trójkątów tak, aby z tych trójkątów dało się ułożyć kwadrat, którego długość boku wyraża się liczbą całkowitą?

9Ł. Uzasadnij, że dla każdej liczby nieparzystej n liczba $n^3 + 3n^2 - n - 3$ dzieli się przez 8.

9T. Uzasadnij, że dla każdej liczby nieparzystej n liczba $n^3 + 3n^2 - n - 3$ dzieli się przez 48.

10Ł. Adaś ma trzy pudełka oznaczone kolejno: BN, BB, NN oraz zestaw sześciu piłeczek: trzech białych i trzech niebieskich. Adaś poprosił Basię, aby do każdego pudełka włożyła po dwie piłeczki tak, aby napis na pudełku był adekwatny do zawartości. Niestety, stało się wręcz odwrotnie. Basia co prawda włożyła do każdego z pudełek po dwie piłeczki, ale tak, że żaden z napisów nie odpowiada zawartości. Widząc o tym, Adam chciałby ustalić, jakie zestawy piłeczek są w poszczególnych pudełkach. Może w tym celu wykonywać następujące próby: sięga ręką do wybranego pudełka, wyciąga jedną piłeczkę, ogląda ją i odkłada na miejsce (nie widzi wtedy pozostałych piłeczek). Jak powinien postąpić Adaś, aby ustalić zawartość poszczególnych pudełek, wykonując możliwie najmniej prób?

10T. Gra polega na wypisywaniu na przemian cyfr liczby sześciocyfrowej. Jeśli otrzymana liczba okaże się być podzielna przez 3, to wygrywa gracz rozpoczynajacy grę, w przeciwnym przypadku wygrywa drugi gracz. Każdy z graczy musi dopisać cyfrę większą od cyfry ostatnio napisanej przez przeciwnika, no, chyba że przeciwnik napisał dziewiątkę – wtedy wolno napisać dowolną cyfrę. Gracz rozpoczynający nie może napisać zera. Od jakiej cyfry powinien zacząć pierwszy gracz, aby zapewnić sobie wygraną? A może to drugi z graczy ma strategię wygrywającą?