

**Zakres tematyczny egzaminu wstępnego  
na Środowiskowe Studia Doktoranckie  
w dyscyplinie matematyka  
na Wydziale Mat. Fiz. Inf. UG**

**Poniżej przedstawiono spis zagadnień z podstawowej oraz rozszerzonej tematyki matematycznej dla kandydatów na studia doktoranckie na kierunku matematyka. Odzwierciedlają one zakres tematyki obowiązującej wszystkich kandydatów.**

**Kandydat**

- otrzymuje trzy pytania dotyczące tematyki ujętej w spisie zagadnień podstawowych i odpowiada na dwa z tych pytań, wybrane przez siebie
- wybiera dwa spośród pięciu zakresów tematycznych wskazanych w spisie zagadnień z rozszerzonej tematyki i otrzymuje jedno pytanie ze wskazanych przez siebie dwóch zakresów

**Spis Zagadnień z Podstawowej Tematyki Matematycznej**

1. Liczby rzeczywiste oraz zespolone i ich własności. Ciągi i ich granice. Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa. Warunek Cauchy'ego. Kryteria istnienia granicy.
2. Szeregi liczbowe rzeczywiste i zespolone. Kryteria zbieżności szeregów. Szeregi warunkowe i bezwzględnie zbieżne. Mnożenie szeregów.
3. Funkcje. Ciągłość i jednostajna ciągłość funkcji. Własności funkcji ciągłych określonych na zbiorze zwartym. Własność Darboux.
4. Rachunek różniczkowy funkcji rzeczywistych jednej zmiennej. Twierdzenie Rolle'a i Lagrange'a. Badanie przebiegu funkcji.
5. Szeregi funkcyjne. Zbieżność punktowa i jednostajna. Szeregi potęgowe. Promień i koło zbieżności. Rozwinięcie Taylora.
6. Całka nieoznaczona. Całka Riemanna. Całki niewłaściwe.
7. Pochodne cząstkowe i pochodna kierunkowa. Gradient. Jakobian. Ekstrema funkcji wielu zmiennych. Funkcje uwikłane.
8. Teoria miary i całki Lebesgue'a. Przechodzenie do granicy pod znakiem całki. Twierdzenie Fubiniego.
9. Całki krzywoliniowe i powierzchniowe. Twierdzenie Gaussa-Ostrogradzkiego, Greena i Stokes'a.
10. Funkcje analityczne. Równania Cauchy-Riemanna. Wzór całkowy Cauchy'ego. Zasada maksimum.
11. Przestrzeń Banacha. Funkcjonały i operatory liniowe. Przestrzeń sprzężona. Przestrzeń Hilberta. Przestrzenie  $L^p$ . Przestrzenie funkcji ciągłych.
12. Wyznaczniki i równania liniowe. Przestrzenie liniowe i afiniczne. Zbiory algebraiczne I i II stopnia i ich klasyfikacja.
13. Grupy. Grupy cykliczne. Grupy permutacji. Homomorfizmy grup. Jądro. Dzielnik normalny i grupa ilorazowa. Twierdzenie Lagrange'a o rządzie grupy.
14. Pierścienie przemienne. Ideał. Ideały maksymalne i pierwsze. Homomorfizmy pierścieni. Dzielniki zera. Elementy odwracalne. Ciało ułamków.
15. Ciała. Ciało proste. Charakterystyka ciała. Ciało algebraicznie domknięte, zasadnicze twierdzenie algebry. Pierwiastki z jedności.

16. Przestrzenie metryczne i topologiczne. Sposoby wprowadzania topologii. Operacje na przestrzeniach. Twierdzenie Tichonova.
17. Przekształcenia ciągłe. Twierdzenie Tietzego.
18. Przestrzenie ośrodkowe. Przestrzenie spójne. Przestrzenie zwarte.
19. Przestrzenie zupełne. Zbiór Cantora i jego własności.
20. Grupa podstawowa. Twierdzenie Jordana o rozcinianiu. Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym
21. Warunkowa wartość oczekiwana, definicja, własności, podstawowe charakterystyki i proste przykłady dla zmiennych losowych dyskretnych i ciągłych.
22. Rodzaje zbieżności ciągów zbieżnych losowych. Prawa wielkich liczb i centralne twierdzenie graniczne.
23. Liniowe równania różniczkowe zwyczajne o stałych współczynnikach.
24. Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych.

## **Spis Zagadnień z Rozszerzonej Tematyki Matematycznej**

### **1. Statystyka i metody obliczeniowe.**

Statystyki dostateczne, definicja i własności. Testowanie hipotez statystycznych; poziom istotności i moc testu. Teoria estymacji, nierówność Cramera-Rao. Metody numeryczne rozwiązywania układów równań liniowych i nieliniowych, numeryczna poprawność. Kwadratury numeryczne – proste i złożone; rząd i błąd kwadratury. Numeryczne rozwiązywanie zagadnień algebry liniowej. Aproksymacja różnicowa równań różniczkowych.

### **2. Równania różniczkowe.**

Układy liniowe równań różniczkowych zwyczajnych. Funkcja Greena dla zagadnień brzegowych. Dwupunktowe zagadnienia brzegowe dla nieliniowych równań różniczkowych. Geometryczna teoria równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu. Twierdzenie Cauchy'ego - Kowalewskiej. Zagadnienia brzegowe dla równań eliptycznych, zasada maksimum, istnienie rozwiązań, metoda Perrona. Zagadnienie Cauchy'ego dla równania falowego, wzory Kirchoffa i Poissona. Zagadnienie mieszane i metoda Fouriera. Zagadnienie Cauchy'ego dla równania przewodnictwa cieplnego.

### **3. Algebra i topologia.**

Twierdzenie Baire'a i metoda kategorii. Przestrzenie nakrywające, grupa podstawowa, nakrycia uniwersalne. Przestrzeń rzutowa. Wielościany. Rozmaitości topologiczne.

Ciała skończone. Mnożenie tensorowe. Teoria podzielności w pierścieniach bez dzielników zera. Moduły nad pierścieniami.

Elementy algebraiczne względem ciała. Stopień elementu algebraicznego. Ciało rozkładu wielomianu. Automorfizmy ciała. Zbiory algebraiczne.

#### **4. Analiza i geometria różniczkowa.**

Gładkie podrozmaitości w przestrzeni euklidesowej i ich odwzorowania. Krzywizna i skręcenie krzywej w przestrzeni 3-wymiarowej. Pierwsza i druga forma podstawowa rozmaitości. Kierunki i krzywizny główne. Krzywizna Gaussa i średnia. Symbole Christoffela i Twierdzenie Egregium. Przesunięcie równoległe. Krzywe geodezyjne.

Rozmaitości różniczkowe, mapy i atlasy. Rozmaitości Riemanna. Rozmaitość z brzegiem. Twierdzenie Stokesa na rozmaitościach. Odwzorowania konforemne.

Operatory zwarte na przestrzeniach Banacha.

#### **5. Teoria mnogości i funkcji rzeczywistych.**

Indukcja pozaskończona. Aksjomatyka ZFC. Hipoteza Continuum, Aksjomat Martina i ich zastosowania.

Hierarchia zbiorów borelowskich, klasyfikacja Baire'a funkcji borelowskich. Zbiory mierzalne i zbiory z własnością Baire'a.

Funkcje mierzalne względem różnych  $\sigma$ -ciał.