prof. dr hab. Grzegorz Gromadzki
dr Ewa Kozłowska-Walania
Zakład Algebry IM UG

Grupy i ich zastosowania w geometrii, analizie topologii i kombinatoryce

Seminarium magisterskie 2020/2021

Przedstawiany projekt seminarium jest pięciowątkowy. Cztery wątki, związane z geometrią, analizą, topologią i kombinatoryką, zamierzamy traktować z algebraicznego punktu widzenia. W ten sposób algebra, głównie w zakresie związanym z teorią grup, będzie w prezentowanym projekcie stanowić to, co te cztery pozornie odległe obszary matematyczne łączy, co stanowi źródło metodologii i co samo w sobie stanowi piąty wątek projektu. Dokładniej mówiąc, tematyka seminarium porusza następujące wątki:

- algebra: kombinatoryczna teoria grup a w szczególności przedstawienia grup Fuchsa i nieeuklidesowych grup krystalograficznych (NEC), będących dyskretnymi i kozwartymi grupami izometrii płaszczyzny hiperbolicznej;
- geometria: krzywe algebraiczne zespolone i ich równania rzeczywiste;
- analiza: automorfizmy powierzchni Kleina i Riemanna i ich przestrzenie modułów (ang. moduli spaces)
- topologia: grupa klas odwzorowań (ang. mapping class group);
- kombinatoryka: zagadnienia kryptograficzne w zakresie związanym z fundamentalnymi problemami Dehna w kombinatorycznej teorii grup oraz rolą krzywych eliptycznych i hypereliptycznych.

Powyższe cztery wątki tematyczne łączy nie tylko wspólne teoriogrupowe pochodzenie, ale również wzajemne powiązania w zakresie opisanym przez następujący schemat, który zwięźle skomentujemy poniżej.

$$\begin{tikzcd}
\text{Analiza} & & \text{Geometria} \arrow[ll] \arrow[dd] \\
& \text{Grupy} \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr] & \\
\text{Topologia} \arrow[uu] & & \text{Kombinatoryka}
\end{tikzcd}$$

Tak więc, u podstaw naszego projektu są powierzchnie Kleina i Riemanna, będące zwartymi powierzchniami *topologicznymi* wyposażonymi w strukturę *analityczną*. Z *geometrycznego* punktu widzenia powierzchnie te są po prostu zespolonymi krzywymi algebraicznymi, jednak badanie ich jako takich jest trudne, a wtedy z pomocą przychodzi *teoria grup*. Powierzchnie takie powstają bowiem jako przestrzenie orbit działań pewnych grup na sferze, płaszczyźnie zespolonej lub płaszczyźnie hiperbolicznej, będących modelami uniwersalnymi trzech płaskich geometrii: sferycznej, eliptycznej i hiperbolicznej. Badając te grupy uzyskujemy informacje o symetrii takich powierzchni. W projekcie zajmujemy się głównie powierzchniami hiperbolicznymi. Tu badać będziemy, przy pomocy pojęcia nerwu, przestrzenie modułów tych powierzchni z ciekawymi i ważnymi obszarami zwanymi miejscami rzeczywistymi i osobliwymi (z ang. real and singular loci). Rola grupy klas odwzorowań polega na tym, że działając na tzw. przestrzeni Teichmüllera, będącej przestrzenią homeomorficzną z pewną skończenie wymiarową rzeczywistą przestrzenią Euklidesa, uniformizuje ona przestrzeń modułów i w ten sposób kontroluje w znacznej mierze jej własności. Najmniej związany z wyżej opisanymi wątkami (jak to widać w schematycznym ujęciu) jest wątek kombinatoryczny opisany wyżej.

Tematy przyszłych prac magisterskich, ich stopień trudności i przestrzeń na ewentualne twórcze zaangażowanie zostaną dostosowane do indywidualnych preferencji, możliwości i chęci każdego z Uczestników. Raczej nieodzowna będzie przynajmniej bierna znajomość języka angielskiego, w stopniu wystarczającym do czytania oryginalnych prac matematycznych, choć posiadamy również spory zasób literatury w języku polskim w postaci szeregu prac magisterskich i doktorskich powstałych w Zakładzie Algebry.

Literatura

[1] I. Blake, G. Seroussi, N. Smart, *Krzywe eliptyczne w kryptografii*, WNT, Warszawa 2004.

[2] E. Bujalance, F.J. Cirre, J.M. Gamboa, G. Gromadzki, *Symmetries of compact Riemann surfaces*, Springer-Verlag (2010).

[3] D.L. Johnson, *Presentations of Groups*, Cambridge University Press 1997.

[4] M.I. Kargapołow, J.I. Mierzlakow, *Podstawy Teorii Grup*, PWN 1989.

[5] R. Lyndon, *Groups and Geometry*, London Mathematical Society, Lecture Notes Series 1985.

[6] Oryginalne publikacje w czasopismach naukowych.