Seminarium licencjackie

Algorytmy w rzeczywistej geometrii algebraicznej

dr Aleksandra Nowel

Rzeczywista geometria algebraiczna zajmuje się studiowaniem własności rzeczywistych rozwiązań układów równań (zbiory algebraiczne) oraz równań i nierówności (zbiory semialgebraiczne) wielomianowych.

Głównymi narzędziami algebraicznymi w geometrii algebraicznej są funkcje wielomianowe, regularne i semialgebraiczne. W badaniu odwzorowań stosuje się więc własności pierścieni, szczególnie pierścieni funkcyjnych.

Struktura topologiczna rzeczywistych zbiorów algebraicznych i semialgebraicznych może wydawać się skomplikowana. Zbiór algebraiczny nierozkładalny może mieć np. wiele składowych spójności w topologii euklidesowej, zbiór punktów regularnych zbioru algebraicznego nie musi być w nim gęsty. Specyficzną dla rzeczywistej (w odróżnieniu od zespolonej) geometrii algebraicznej klasą zbiorów jest klasa zbiorów semialgebraicznych z jej charakterystyczną własnością zamkniętości względem rzutów. Okazuje się, że dzięki tzw. rozkładowi komórkowemu zbiory te mają tak dobre własności topologiczne jak istnienie skończonych stratyfikacji, triangulowalność czy struktura lokalnie stożkowa.

Natura obiektów, których badaniem zajmuje się rzeczywista geometria algebraiczna, umożliwia ich opis przez tzw. formuły pierwszego rzędu, dzięki czemu dziedzina ta znajduje zastosowania w teorii algorytmów. Wykorzystuje się ją m. in. przy określaniu złożoności i praktycznych możliwości stosowania danego algorytmu. Dostępne jest także oprogramowanie, które pozwala wykonywać obliczenia oraz konstruować przykłady przy pomocy komputera.

Teoria algorytmów rzeczywistej geometrii algebraicznej stale się rozwija, poczynając od pierwszej efektywnej procedury usuwania kwantyfikatorów pochodzącej od Tarskiego i Seidenberga, przez jej bardziej współczesne wersje, aż do algorytmów obliczania topologicznych niezmienników zbiorów semialgebraicznych (jak na przykład charakterytyka Eulera–Poincaré).

Problemy algorytmiczne w geometrii semialgebraicznej zazwyczaj na wejściu mają zadaną skończoną rodzinę wielomianów. Dzielą się one na dwie główne klasy. Pierwsza (problemy logiczne) zawiera m. in. eliminację kwantyfikatorów z formuły logicznej pierwszego rzędu, ogólny problem decyzyjny wartości formuły logicznej bez zmiennych wolnych, czy jego węższy wariant tylko z kwantyfikatorami szczegółowymi. Druga (problemy geometryczne i/lub topologiczne) obejmuje np. rozstrzyganie, czy dany zbiór semialgebraiczny jest pusty, semialgebraiczny opis składowych semialgebraicznej spójności zbioru, decydowanie, czy dwa punkty leżą w w tej samej składowej spójości, obliczanie triangulacji i stratyfikacji zbioru semialgebraicznego i niezmienników topologicznych z nim związanych.

Literatura

1. S. Basu: *Algorithms in real algebraic geometry: a survey.* Conference Real Algebraic Geometry, Rennes 2011, dostępne: http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/60/96/87/PDF/RAG2011-Rennes.pdf
2. S. Balcerzyk, T. Józefiak: *Pierścienie przemienne*, Biblioteka Matematyczna 58, Państwowe Wydawnictwo Naukowe (PWN), Warszawa, 1985
3. R. Benedetti, J.–J. Risler: *Real Algebraic and Semi-algebraic Sets.* Hermann 1990
4. J. Browkin: *Teoria ciał*, Biblioteka Matematyczna 49, Państwowe Wydawnictwo Naukowe (PWN), Warszawa, 1977
5. M. Coste: *Real Algebraic Sets*, Lecture notes for Summer School and Conference on Real Algebraic Geometry and its Applications, dostępne: https://perso.univ-rennes1.fr/michel.coste/polyens/RASroot.pdf
6. M. Coste: *An Introduction to Semialgebraic Geometry.* Dottorato di Ricerca in Matematica, Dip. Mat. Univ. Pisa. Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali, Pisa 2000, dostępne: http://perso.univ-rennes1.fr/michel.coste/polyens/SAG.pdf
7. D. Cox, J. Little, D. O'Shea: *Ideals, varieties, and algorithms. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1997
8. S. Lang: *Algebra*, tłum. Ryszard Bittner, Państwowe Wydawnictwo Naukowe (PWN), Warszawa, 1984