

Algebry Clifforda -seminarium licencjackie Ewa Tyszkowska

Teoria algebr Clifforda wiąże się z teorią algebr tensorowych, form kwadratowych, przekształceń ortogonalnych i ma ważne zastosowania np. w geometrii, teoretycznej fizyce i cyfrowym przetwarzaniu obrazu, a nazwa pochodzi od angielskiego uczonego Williama Kingdon Clifforda. Znajomość form kwadratowych na przestrzeniach wektorowych jest przydatna np. w badaniu tworów geometrycznych stopnia drugiego. Dwa dobrze znane przykłady form kwadratowych to metryka kartezjańska i pseudometryka Minkowskiego. Przestrzenie tensorowe, algebry tensorowe oraz algebry zewnętrzne odgrywają ważną rolę w rozmaitych działach matematyki i fizyki, np. w geometrii różniczkowej, teorii funkcji analitycznych, analizie globalnej, mechanice brył sztywnych i ośrodków ciągłych, elektrodynamice, ogólnej teorii względności czy teorii grawitacji.

Zdefiniujemy algebrę Clifforda jako iloraz algebry tensorowej przez pewien dwustronny ideał. Przedstawimy podstawowe pojęcia i fakty dotyczące algebr i grup Clifforda, w szczególności klasyfikację algebr Clifforda w niskich wymiarach. Podamy przykłady grup spinorowych w niskich wymiarach.

1. Przestrzenie i algebry tensorowe.
 - 1.1 Iloczyn tensorowy przestrzeni wektorowych.
 - 1.2 Iloczyn tensorowy homomorfizmów.
 - 1.3 Przestrzenie tensorowe.
 - 1.3 Algebra tensorowa.
 - 1.4 Algebra zewnętrzna. Orientacja.
2. Formy kwadratowe.
 - 2.1 Definicja formy kwadratowej.
 - 2.2 Baza kanoniczna. Twierdzenie Sylwestra o bezwładności.
 - 2.3 Formy kwadratowe dodatnie (ujemne).
 - 2.4 Odwzorowania ortogonalne. Grupy $O(Q)$ i $SO(Q)$.
 - 2.5 Rozkład Witt'a.
3. Algebry Clifforda
 - 3.1 Definicja Algebry Clifforda.
 - 3.2 Twierdzenie o uniwersalności Algebry Clifforda.
 - 3.3 Baza Algebry Clifforda.
 - 3.4 Centrum Algebr $C(Q)$ i $C(Q)_+$.
 - 3.5 Grupy Clifforda G i G^+ .

- 3.6 Grupy α -Clifforda Γ i Γ^+ .
- 3.7 Grupy Pin i Spin.
- 3.8 Reprezentacja spinorowa Algebry $C(Q)$; $\dim V = 2m$. Macierze Diraca.
- 3.9 Reprezentacja spinorowa Algebry $C(Q)^+$; $\dim V = 2m + 1$. Macierze Pauliego.

Literatura:

- 1 C.Chevalley, The algebraic theory of spinors, Columbia University Press, New York, 1954,
- 2 J. Gallier, Clifford algebras, Clifford groups, and generalizations of the quaternions, [http:// www.cis.appen.edu](http://www.cis.appen.edu),
- 3 J. Komorowski, Od liczb zespolonych do tensorów, spinorów, algebr Liego i kwadryk, PWN, Warszawa, 1978,