Wykład fakultatywny (jeden semestr)

Geometria semialgebraiczna

dr Aleksandra Nowel

Geometria semialgebraiczna zajmuje się studiowaniem własności zbiorów rozwiązań układów równań i nierówności wielomianowych.

Zbiór $X \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy *zbiorem algebraicznym*, jeśli jest on postaci

$$X = \bigcap_{i=1}^{k} \{x \mid P_i(x) = 0\},$$

gdzie $P_i \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ dla $i = 1, \ldots, k$.

Szersza klasa ważnych obiektów geometrycznych (należą do niej np. kwadrat na płaszczyźnie, składowa spójności zbioru algebraicznego) pojawia się, jeśli w definicji oprócz równań będziemy rozważać również nierówności.

Zbiór $X \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy *zbiorem semialgebraicznym*, jeśli jest on postaci

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} \left(\{x \mid P_i(x) = 0\} \cap \bigcap_{j=1}^{k_i} \{x \mid Q_{ij}(x) > 0\} \right),$$

gdzie $P_i, Q_{ij} \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ dla $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, k_i$.

Rzeczywista geometria algebraiczna i semialgebraiczna ze względu na naturę swoich obiektów i możliwości ich opisu przez tzw. formuły pierwszego rzędu znajduje wiele zastosowań w tworzeniu i badaniu komputerowych algorytmów obliczeniowych. Wykorzystuje się ją m. in. przy określaniu złożoności i praktycznych możliwości stosowania danego algorytmu. Przykładem może być znany w algebraicznej teorii złożoności model BSS (Blum, Shub, Smale), w którym podzbiorami $\mathbb{R}^n$, dla których przy dowolnej danej $x \in \mathbb{R}^n$ program komputerowy się zatrzyma i zwróci na wyjściu 1, jeśli x należy do zbioru, lub 0 w przeciwnym wypadku (tzw. *problem decyzyjny*), są rozłączne sumy zbiorów semialgebraicznych. Ograniczenie górne liczby składowych spójności zbioru semialgebraicznego daje ograniczenie dolne głębokości drzewa opisującego problem decyzyjny, czyli dolne ograniczenie złożoności obliczeniowej algorytmu.

Na wykładzie zaprezentuję podstawowe wyniki geometrii semialgebraicznej i wspomnę o związanych z nimi algorytmach. Wśród treści wykładowych pojawi się między innymi zliczanie rzeczywistych pierwiastków wielomianych (swego rodzaju „zero–wymiarowa” geometria semialgebraiczna) i twierdzenie Tarskiego–Seidenberga. Przedstawione zostaną podstawowe własności semialgebraicznych podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}^n$, zdefiniowanych za pomocą boolowskich kombinacji równań i nierówności wielomianowych, wraz z podstawowym narzędziem ich dowodzenia, jakim jest istnienie komórkowego rozkładu algebraicznego tych zbiorów. Pojawi się twierdzenie o triangulacji, ukazujące prostą strukturę topologiczną zbiorów semialgebraicznych. Wykład zakończy się prezentacją wyników o skończoności i wspólnych ograniczeniach dla rodzin semialgebraicznych. W szczególności przedstawione zostanie ograniczenie na liczbę składowych spójności rzeczywistego zbioru algebraicznego jako funkcja stopnia wielomianów definiujących zbiór i wymiaru przestrzeni.

Plan wykładu:

1. Wyznaczanie liczby rzeczywistych pierwiastków wielomianu.
2. Rzeczywiste rozwiązania układu równań i nierówności wielomianowych.
3. Twierdzenie Tarskiego-Seidenberga.
4. Rzeczywiste zbiory algebraiczne. Domknięcie Zariskiego.
5. Definicja i przykłady zbiorów semialgebraicznych.
6. Własności zbiorów semialgebraicznych:
   (a) Nierówność Łojasiewicza.
   (b) Rozkład komórkowy.
   (c) Składowe semialgebraicznej spójności.
   (d) Triangulacja.
   (e) Wymiar zbioru semialgebraicznego.
   (f) Struktura lokalnie stożkowa.
   (g) Wspólne ograniczenie liczby składowych spójności.
7. Zastosowania. Głębokość drzewa decyzyjnego.

Literatura

1. R. Benedetti, J-J. Risler: *Real Algebraic and Semi-algebraic Sets.* Hermann 1990
2. **J. Bochnak, M. Coste, M-F. Roy: *Real Algebraic Geometry.* Springer 1998**
3. **M. Coste: *An Introduction to Semialgebraic Geometry.* Dottorato di Ricerca in Matematica, Dip. Mat. Univ. Pisa. Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali, 2000,** dostępne: http://perso.univ-rennes1.fr/michel.coste/polyens/SAG.pdf
4. **M. Coste: *Real Algebraic Sets.* Lecture notes from a mini–course Real Algebraic and Analytic Geometry, Aussois, France, 2003,** dostępne: http://perso.univ-rennes1.fr/michel.coste/polyens/RASroot.pdf
5. M. Shiota: *Geometry of subanalytic and semialgebraic sets.* Progress in Mathematics, 150. Birkhäuser Boston, MA, 1997