dr Ewa Kozłowska-Walania
Zakład Algebry IM UG

Elementy kombinatorycznej teorii grup

Seminarium licencjackie 2021/2022

Kombinatorycza teoria grup jest dziedziną matematyki pozwalającą na opisywanie, konstruowanie i badanie własności grup. Łączy ona metody kombinatoryczne, geometryczne i topologiczne a kluczowe dla niej pojęcia *grupy wolnej, przedstawienia, generatorów i relacji* stanowią ważną część wspólnego języka głównego nurtu matematyki, stosowanego w wielu jej dziedzinach. Można więc powiedzieć, że podstawy kombinatorycznej teorii grup są niezbędnym elementem wykształcenia każdego matematyka, a jej zastosowania znajdziemy w topologii, logice, teorii liczb i oczywiście w teorii grup.

Rozważmy grupę liczb całkowitych z działaniem dodawania. Po wykładzie z Algebry wiemy, że każdą liczbę całkowitą można uzyskać za pomocą dodawania pewnej ilości 1 lub -1. Zwykle mówimy więc, że liczba 1 jest *generatorem* grupy liczb całkowitych. W grupie tej nie ma żadnej relacji, ponieważ element 1 ma nieskończony rząd. O grupie tej powiemy, że jest ona *grupą wolną* rangi 1 i w języku kombinatorycznej teorii grup możemy napisać jej *przedstawienie*

$$\mathbb{Z} \cong \langle x \mid \; \rangle,$$

gdzie x jest jedynym generatorem. Okazuje się, że teoria grup pojawia się w naturalny sposób przy badaniu obiektów topologicznych - rozważmy na przykład okrąg i popatrzmy na niego jak na zamkniętą krzywą bez samoprzecięć. Jak możemy opisać taką krzywą? Można na przykład zauważyć, że możemy okrążać go w jedną lub drugą stronę nieskończoną ilość razy (ustalając pewien punkt początkowy). Widzimy więc, że grupa wyznaczona przez podróżowanie po okręgu jest izomorficzna z grupą liczb całkowitych - liczbie całkowitej odpowiada odpowiednia ilość okrążeń, przy czym znak liczby mówi, w którą stronę robione były okrążenia. Tym samym, z przestrzenią topologiczną stowarzyszyliśmy grupę i własności tej grupy opisują pewne własności topologiczne naszej przestrzeni. Grupę tę nazywamy *grupą podstawową przestrzeni* i jest ona bardzo ważna w matematyce.

Jeśli chodzi o logikę, to wspomnijmy tu bardzo ważne tzw. problemy decyzyjne Dehna (problem sprzężenia, problem słowa, problem izomorfizmu). Problemy te dotyczą ustalenia, czy istnieją algorytmy (np. programy komputerowe), które mogą odpowiedzieć na pytanie czy dwa elementy danej grupy są sprzężone lub czy dwa przedstawienia opisują tę samą grupę. Przyjrzyjmy się przez chwilę temu drugiemu pytaniu. Jak wiadomo, grupy $\mathbb{Z}_6$ oraz $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ są izomorficzne. Jednak pierwsza z nich jest opisana przez jeden generator i jedną relację, podczas gdy druga - przez dwa generatory i trzy relacje:

$$\mathbb{Z}_6 \cong \langle x \mid x^6 = 1 \rangle, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \cong \langle a, b \mid a^2 = 1, b^3 = 1, ab = ba \rangle.$$

Znając tylko te dwa przedstawienia, jak możemy rozstrzygnąć, czy opisują one tę samą grupę? Z pomocą przychodzi nam twierdzenie Tietze'a, które również poznamy podczas seminarium.

Podsumowując, na seminarium omówimy m. in. takie zagadnienia jak: definicja i konstrukcja grup wolnych, lemat o ping-pongu i przykłady podgrup wolnych, transformacje Nielsena, przedstawienia grup, transformacje i twierdzenie Tietze'a, ilorazy grup zadanych przedstawieniem, produkt wolny, produkt wolny z amalgamacją, postać normalna elementów dla produktu wolnego z amalgamacją, HNN-rozszerzenie, grupa podstawowa grafu, nakrycia grafów, 2-kompleksy i ich grupa podstawowa, twierdzenie Kurosha, metoda Stallingsa - rdzeń grafu nakrywającego. Przydatna będzie znajomość języka angielskiego w stopniu wystarczającym do czytania tekstów matematycznych.

Serdecznie zapraszam!

Literatura:

1. M.I. Kargapołow, J.I. Mierzlakow, *Podstawy Teorii Grup*, PWN 1989;
2. S. Lang, *Algebra*, PWN 1973;
3. D. L. Johnson, *Presentations of groups*, Cambridge University Press 1997;
4. W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar, *Combinatorial group theory*, Wiley 1966;
5. C. Milller, *Combinatorial group theory*, skrypt dostępny w Internecie;
6. G. Baumslag, *Topics in combinatorial group theory*, skrypt dostępny w Internecie;
7. J. Rotman, *The theory of groups, an introduction*, 4th edition, Allyn and Bacon.