Algebra liniowa z geometrią

prof. dr hab. Andrzej Szczepański

Wydział MFI UG
Instytut Matematyki
(2024/2025)

Definicja 1.1

Działanie dwuargumentowe $d : X \times X \to X$ nazywamy łącznym, o ile:

$$\forall_{a,b,c \in X} \; d(a, d(b, c)) = d(d(a, b), c).$$

Przykład 1.2

Niech $X = \mathbb{N}$, $d-$ dowolne $+$,

$$\forall_{u_1,u_2,u_3 \in \mathbb{N}} \; u_1 + (u_2 + u_3) = (u_1 + u_2) + u_3.$$

Definicja 1.3

$(G, e, \circ)$ nazywamy grupą, o ile:

- $\forall_{a,b,c \in G} \; (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ - łączność
- $\exists_{e \in G} \; \forall_{a \in G} \; e \circ a = a \circ e = a$ - element neutralny
- $\forall_{a \in G} \; \exists_{b \in G} \; a \circ b = b \circ a = e$ - element odwrotny

Przykład 1.4

Liczby rzeczywiste $\mathbb{R}$ i wymierne $\mathbb{Q}$ są przykładami grup $(\mathbb{R}, 0, +), (\mathbb{Q}, 0, +)$.

Definicja 1.5

$(G, \circ)$ jest półgrupą, o ile działanie $\circ$ jest łączne.
(Jest półgrupą z jedynką, o ile istnieje element $e \in G$ taki, że $g \circ e = e \circ g = g$).
Np. $\mathbb{N}$ ze względu na mnożenie $(\mathbb{N}, 1, \cdot)$.

Definicja 1.6

Grupa $(G, e, \circ)$ jest abelowa (przemienna), o ile:

$$\forall_{a,b \in G} \; a \circ b = b \circ a.$$

Definicja 1.7

Pierścieniem $(R, +, \cdot, 0, e)$ nazywamy zbiór R z elementami neutralnymi $0, e \in R$ oraz z działaniami:

- $+ : R \times R \to R$
- $\cdot : R \times R \to R$

spełniający warunki:

- $(R, 0, +)$ jest grupą abelową
- $(R, e, \cdot)$ jest półgrupą.

Ponadto $\forall_{a,b,c \in R}\ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
oraz $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.
Jeżeli mnożenie jest przemienne tzn. $a \cdot b = b \cdot a$, to pierścień R nazywamy przemiennym.
Pierścień nazywamy pierścieniem z jedynką, jeżeli istnieje element neutralny mnożenia, tzn. $\exists_{1 \in R} \forall_{a \in R}\ a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Przykład 1.8

- $(\mathbb{Z}, 1, 0, \cdot, +)$
- $C[0,1]$ - pierścień funkcji ciągłych na odcinku $[0,1]$.
  $\forall_{f,g \in C[0,1]}\ (f+g)(x) = f(x) + g(x), (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
  $\forall_x\ f(x) = 1,\ \forall_x\ f(x) = 0$
  $C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ciągła}\}$

Definicja 1.9

Ciałem nazywamy pierścień przemienny z jedynką, gdzie $0 \neq 1$ i taki, że $\forall_{x \in R \setminus \{0\}}$ istnieje $x^{-1} \in R \setminus \{0\}$.

Przykład

- $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$,
- $\{0, 1\}$

$$\left.\begin{array}{c|c|c} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} * & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array} \right\} \text{tabelka modulo}$$

- $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

*	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Jest to ciało.

Przykład c.d.

- $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

  To nie jest ciało, a tylko pierścień (dla elementu 2 nie istnieje element odwrotny).

- $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \cdots, n-1\}$ z działaniami: dodawanie i mnożenie modulu n.

  Jeżeli n-pierwsze, to Z_n ciało.

Definicja 1.10

Strukturą algebraiczną nazywamy zbiór X z działaniami:

$$k_i : X^{n_i} \to X, i = 1, 2, \ldots, l.$$

Podstrukturą algebraiczną struktury $(X, k_1, k_2, \cdots, k_l)$ nazywamy podzbiór $Y \subseteq X$ taki, że:

$$\forall_i \; k_i : Y^{n_i} \to Y.$$

Przykład 1.11

$\mathbb{Z} = \{\mathbb{Z}, 1, 0, \cdot, +\}$
$2\mathbb{Z}$ nie jest podpierścieniem, ale jest podgrupą ze względu na dodawanie.

Uwaga

Strukturę algebraiczną z działaniem $+$ nazywamy strukturą addytywną, natomiast strukturę z działaniem $\cdot$ nazywamy strukturą multiplikatywną.

Uwagi wstępne

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
$x^2 + 1 = 0$
$x^2 = -1$
$i = \sqrt{-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow i^2 = -1$

Definicja 2.1

Zbiór $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ wraz z działaniami:

- $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$
- $(a, b) \odot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

nazywamy zbiorem liczb zespolonych. W tym zbiorze równanie $x^2 + 1 = 0$ ma rozwiązanie.

Definicja 2.2

Dowolną liczbę zespoloną $z \in \mathbb{C}$ zapisujemy w postaci

$$z = a + bi,$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$,
a - część rzeczywista liczby zespolonej z - $\Re(z)$ (lub $Re(z)$)
b - część urojona liczby zespolonej z - $\Im(z)$ (lub $Im(z)$)

Stwierdzenie 2.3

Zbiór liczb zespolonych z działaniami $\oplus, \odot$ jest ciałem.

Dowód

Zauważmy, że:
$(a, b) + (0, 0) = (a, b) \Rightarrow 0 = (0, 0)$
$(a, b) \cdot (1, 0) = (a, b) \Rightarrow 1 = (1, 0)$
Poza tym:
$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -(1, 0)$,
czyli $(0, 1)^2 = -1$. Zauważmy ponadto, że działania w $\mathbb{C}$ są zwykłymi działaniami na wielomianach stopnia jeden ze zmienną i, gdzie $i^2 = -1$. Zatem wszystkie aksjomaty ciała, poza istnieniem elementu odwrotnego, wynikają wprost z definicji oraz z własności dodawania i mnożenia wielomianów.
Sprawdźmy zatem, czy $\frac{1}{a+bi} \in \mathbb{C}$?
Tak, $\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2-b^2i^2} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2} i \in \mathbb{C}, \; a^2 + b^2 \neq 0$.

Definicja 2.4

Sprzężeniem liczby zespolonej nazywamy funkcję $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zdefiniowaną wzorem $\overline{a+bi} = a - bi$.

Własności sprzężenia

1. $\forall_{r\in\mathbb{R}}\ \overline{r} = r$
2. $\forall_{z_1,z_2\in\mathbb{C}}\ \overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
3. $\forall_{z_1,z_2\in\mathbb{C}}\ \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$
4. $\forall_{z\in\mathbb{C}}\ \overline{\overline{z}} = z$
5. $\forall_{z\in\mathbb{C}}\ z\overline{z} = |z|^2$

Definicja 2.5

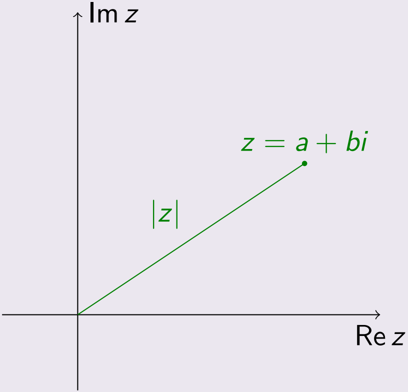
Modułem liczby zespolonej $z = a + bi$ nazywamy liczbę rzeczywistą $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Definicja 2.6

Zapis liczby zespolonej $z \neq 0$ w postaci $z = |z|(cos\alpha + isin\alpha)$ nazywamy postacią trygonometryczną liczby liczby z. Kąt α (kąt między osią Ox, a prostą łączącą 0 z liczbą z w kierunku przeciwnym do wskazówek zegara) nazywamy argumentem liczby z.

Uwaga

$\cos\alpha = \frac{a}{|z|} \Rightarrow$
$a = |z| \cos\alpha$
$\sin\alpha = \frac{b}{|z|} \Rightarrow$
$b = |z| \sin\alpha$



Mnożenie i dzielenie liczb zespolonych

- $z_1 z_2 = |z_1|(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)|z_2|(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2) =$
  $|z_1||z_2|(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + i\cos\alpha_1\sin\alpha_2 +$
  $i\sin\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2) =$
  $|z_1||z_2|((\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2) + i(\cos\alpha_1\sin\alpha_2 +$
  $\sin\alpha_1\cos\alpha_2)) = |z_1||z_2|\big(\cos(\alpha_1+\alpha_2) + i\sin(\alpha_1+\alpha_2)\big)$
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}\big(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)\big) = \frac{1}{|z|}(\cos\alpha - i\sin\alpha)$,
  Rzeczywiście tak jest, bo:
  $z \cdot \frac{1}{z} = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)\frac{1}{|z|}(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)) =$
  $|z|\frac{1}{|z|}\big(cos(\alpha-\alpha) + i\sin(\alpha-\alpha)\big) = \cos 0 + i\sin 0 = 1$
- $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = |z_1|(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)\frac{1}{|z_2|}\big(\cos(-\alpha_2) + i\sin(-\alpha_2)\big) =$
  $\frac{|z_1|}{|z_2|}\big(\cos(\alpha_1-\alpha_2) + i\sin(\alpha_1-\alpha_2)\big)$

Przykłady

- $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$
  $|i| = 1$
  $i^2 = -1$
  $i^4 = (-1)^2 = 1$
  $i^4 = (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})^4 = \cos\frac{4\pi}{2} + i\sin\frac{4\pi}{2} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$
- $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$
  $\frac{1}{i} = \frac{1}{|i|}(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}) = -i$
  $\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$
- $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$
  $\frac{1}{i} = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}$
  $1 = i \cdot \frac{1}{i} = (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}) =$
  $= (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2})) = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) =$
  $= \cos 0 + \sin 0 = 1 + 0 = 1$

Wzór de Moivre'a

Niech $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Wtedy:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad z^n = |z|^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$$

Dowód

Dowód indukcyjny.
Dla $n = 1$ oczywiste.
Krok indukcyjny $n \longmapsto (n+1)$.

$$\begin{gathered}
(|z|(\cos\alpha + i\sin\alpha))^{n+1} = (|z|(\cos\alpha + i\sin\alpha))^n \cdot |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \\
= |z|^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) \cdot |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \\
= |z|^{n+1}\big(\cos(n+1)\alpha + i\sin(n+1)\alpha\big)
\end{gathered}$$

Uwaga

Wzór de Moivre'a prawdziwy jest także dla $n \in \mathbb{Z}$.

Uwaga

$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$
$(S^1, \cdot)$ jest grupą

Wzór Eulera

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

Dowód: Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ i $f(\alpha) = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $f'(\alpha) = if(\alpha)$. Podobnie niech $g(\alpha) = e^{-i\alpha}f(\alpha)$. Wtedy $g'(\alpha) = 0$ i g jest stała. Ponieważ $g(0) = 1$, więc $f(\alpha) = e^{i\alpha}g(\alpha) = e^{i\alpha}$.

Stwierdzenie 2.7

Ciało liczb zespolonych jest algebraicznie domknięte, tzn. dowolny wielomian o współczynnikach w liczbach zespolonych ma pierwiastek.

Przykład

- $ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$
  $\Delta = b^2 - 4ac$
  Jeżeli $\Delta \geqslant 0$, to istnieje pierwiastek rzeczywisty.
  Jeżeli $\Delta < 0$, to rozwiązanie jest zespolone.
  $ax^2 + bx + c = a\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$
  Gdy $\Delta < 0$, to $\sqrt{\Delta} = \sqrt{(-1)\cdot\tilde{\Delta}} = i\sqrt{\tilde{\Delta}}$,
  gdzie $\tilde{\Delta} > 0$. Zatem:
  $a\left(x - \frac{-b-i\sqrt{\tilde{\Delta}}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b+i\sqrt{\tilde{\Delta}}}{2a}\right)$.
- $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$
- $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

Wykład 3.

Definicja 3.1

Przestrzeń liniowa to struktura $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$, w której $(V, +, 0)-$ grupa abelowa, $\mathbb{K}-$ ciało i, na której określone jest:
$+ : V \times V \to V$

- $\forall_{a,b,c\in V}\ (a+b)+c = a+(b+c)$ (łączność)
- $\exists_{0\in V}\forall_{a\in V}\ a+0 = 0+a = a$ (element neutralny)
- $\forall_a\exists_b\ a+b = b+a = 0$ (element odwrotny)
- $\forall_{a,b\in V}\ a+b = b+a$ (przemienność) $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$
- $\forall_{\alpha\in\mathbb{K}}\forall_{a,b\in V}\ \alpha\cdot(a+b) = \alpha\cdot a + \alpha\cdot b$ (rozdzielność)
- $\forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{K}}\forall_{a\in V}\ (\alpha+\beta)\cdot a = \alpha\cdot a + \beta\cdot a$ (rozdzielność)
- $\forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{K}}\forall_{a\in V}\ \alpha\cdot(\beta\cdot a) = (\alpha\cdot\beta)\cdot a$
- $\forall_{a\in V}\ 1\cdot a = a$

Przykład

1. $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$
$(x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1)$
$(x, y) + (0, 0) = (x, y)$
$(x, y) + (-x, -y) = (0, 0)$
2. $(\mathbb{K}, \mathbb{K}, +, \cdot)$ - przestrzeń liniowa nad ciałem $\mathbb{K}$
3. X - przestrzeń $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$
$C(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid \text{f - funkcja ciągła}\}$
$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$
$(\alpha f(x)) = \alpha f(x)$
$\forall_{x \in X}\ 0 f(x) = 0$

Definicja 3.2

Niech $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$ i niech $V_1 \subseteq V$. Wówczas V_1 nazywamy podprzestrzenią liniową, o ile $(V_1, \mathbb{K} +_{V_1}, \cdot_{V_1})$ jest przestrzenią liniową.

$+_{V_1} : V_1 \times V_1 \to V_1$

$\forall_{a,b \in V_1} \; a + b \in V_1$

$\cdot_{V_1} : \mathbb{K} \times V_1 \to V_1$

$\forall_{\alpha \in \mathbb{K}} \forall_{a \in V_1} \; \alpha \cdot a \in V_1$

Powyższe dwa warunki można zastąpić jednym:

$\forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{K}} \forall a, b \in V_1 \; \alpha a + \beta b \in V_1$

Przykład

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}$ - podprzestrzeń liniowa

$(0, x) + (0, y) = (0, x + y)$

Kontrprzykład

$\mathbb{R}^{\geqslant 0} \subseteq \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^{\geqslant 0}$ nie jest podprzestrzenią liniową, bo nie jest grupą ze względu na dodawanie.

Definicja 3.3

1. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$. Niech $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Mówimy, że $v_1, v_2, \ldots, v_n$ są liniowo niezależne, kiedy kombinacja liniowa $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$ jest możliwa jedynie, gdy $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.
2. Mówimy, że $v_1, v_2, \ldots, v_n$ są liniowo zależne, o ile istnieją skalary $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nie wszystkie równe 0, że $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$

Przykłady

- Układ $v_1, v_2, \ldots, v_n$, taki, że $\exists_{1 \leqslant i \leqslant n}\ v_i = 0$ jest zawsze liniowo zależny.
- $\{(1,0),(0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$ jest liniowo niezależny.
  $\alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) = (\alpha_1, 0) + (0, \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2) =$
  $= (0,0) \iff \alpha_1 = \alpha_2 = 0$
- $\{(1,0),(5,0)\} \subset \mathbb{R}^2$ jest liniowo zależny
  Niech $\alpha_1 = -5, \alpha_2 = 1$ $-5(1,0) + 1(5,0) = (-5,0) + (5,0) = (0,0)$

Definicja 3.4

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$. Układ wektorów $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ stanowi zbiór generatorów, o ile:
$\forall_{v \in V} \exists_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}}\ v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$

Definicja 3.5

Liniowo niezależny zbiór generatorów przestrzeni liniowej V nazywamy bazą.

Stwierdzenie 3.6

Zapis dowolnego elementu $v \in V$ jako kombinacji liniowej wektorów bazowych jest jednoznaczny.

Dowód

Niech $v_1, v_2, \ldots, v_n$ - baza $\Rightarrow \exists_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}}\ v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$.
Jednoznaczność oznacza, że istnieje tylko jeden wybór $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.
Przypuśćmy, że istnieją $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, takie że
$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n$.
Ale
$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n$.
Stąd: $0 = (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + (\alpha_2 - \beta_2) v_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) v_n$.
Ponieważ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ są liniowo niezależne, zatem powyższe równanie jest możliwe tylko gdy $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \ldots, \alpha_n = \beta_n$.

Stwierdzenie 3.7

Następujące warunki są równoważne:

1. *Zbiór* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *jest bazą przestrzeni liniowej* V *nad ciałem* K.
2. *Zbiór* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *jest maksymalnym zbiorem wektorów liniowo niezależnych (tzn., że jeśli do wektorów* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *dodamy inny wektor, to układ ten jest wtedy liniowo zależny).*

Dowód

(1) $\Rightarrow$ (2) Przypuśćmy, że istnieje $v \neq 0$, gdzie $v \neq v_1, v_2, \ldots, v_n$, taki, że układ $v_1, v_2, \ldots, v_n, v$ jest liniowo niezależny.
Ale:

$$\exists_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} \; v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$

$$\Rightarrow 0 = -1 \cdot v + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots \alpha_n v_n,$$

co jest sprzeczne z założeniem, że układ $v_1, v_2, \ldots, v_n, v$ jest liniowo niezależny.

Dowód c.d.

(2) $\Rightarrow$ (1) Musimy udowodnić, że $v_1, v_2, \ldots, v_n$ jest zbiorem generatorów takim, że:

$$\forall_{v \in V \neq 0,\ v \neq v_1, \ldots, v_n}\ v_1, v_2, \ldots, v_n, v$$

jest liniowo zależny.
Stąd:

$$\exists_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}}\ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n + \alpha_{n+1} v = 0$$

i nie wszystkie są równe zero.
Jeżeli $\alpha_{n+1} = 0$, to z liniowej niezależności $v_1, v_2, \ldots, v_n$ mamy, że $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Stąd: $\alpha_{n+1} \neq 0$. Zatem:

$$v = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}} v_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{n+1}} v_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} v_n.$$

Uwaga

Niech $V-$ przestrzeń liniowa nad ciałem $\mathbb{K}$ (u nas to $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$)
i niech $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ baza. Wówczas:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n \in V$$

i wszystkie tego typu kombinacje liniowe wektorów bazowych rozpinają przestrzeń liniową generowaną przez $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Przykład

- $v \in \mathbb{R}^3$ dowolny,
  Podprzestrzeń rozpięta na v to $\alpha v, \alpha \in \mathbb{K}$, czyli prosta.
- $\mathbb{R}^3$
  $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ - płaszczyzna przechodząca przez 0 rozpięta na trzech punktach $0, v_1, v_2$

Twierdzenie 4.1

Dowolne dwie bazy przestrzeni liniowej V nad ciałem $\mathbb{K}$ są równoliczne.

Dowód

Zacznijmy od sformułowania lematu:

Lemat 4.2

Niech wektory $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tworzą bazę przestrzeni V i niech $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n$, przy czym $\alpha_j \neq 0$. Wówczas wektory $a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, a, a_{j+1}, \ldots, a_n$ też tworzą bazę przestrzeni V.

Dowód lematu

Wiemy, że $a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$.

Ponieważ $\alpha_j \neq 0$, więc:

$$a_j \overset{(*)}{=} \frac{1}{\alpha_j} a - \frac{\alpha_1}{\alpha_j} a_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_j} a_2 - \ldots - \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j} a_{j-1} - \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j} a_{j+1} - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_j} a_n$$

Widzimy, że a_j jest kombinacją liniową wektorów $a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, a, a_{j+1}, \ldots, a_n$. Każdy wektor z V jest kombinacją liniową wektorów $a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, a, a_{j+1}, \ldots, a_n$, bo każdy wektor z V jest kombinacją liniową $a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots, a_n$ (to jest baza), czyli równość opisana $(*)$ pozwala nam zastąpić a_j i w konsekwencji zapisać każdy wektor jako kombinację liniową wektorów $a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, a, a_{j+1}, \ldots, a_n$.

Innymi słowy, wektory $a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, a, a_{j+1}, \ldots, a_n$ również generują V.

Pozostało pokazać, że te wektory są liniowo niezależne. Niech:

$$\beta a + \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \ldots + \beta_{j-1} a_{j-1} + \beta_{j+1} a_{j+1} + \ldots + \beta_n a_n = 0, \;\; \beta_i \in \mathbb{K}$$

Dowód lematu c.d.

Podstawiając za a sumę: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$ mamy:

$\beta(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i) + \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_{j-1} a_{j-1} + \beta_{j+1} a_{j+1} + \ldots + \beta_n a_n = 0$

$\beta(\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_{j-1} a_{j-1} + \alpha_j a_j + \alpha_{j+1} a_{j+1} + \ldots + \alpha_n a_n) + \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \ldots + \beta_{j-1} a_{j-1} + \beta_{j+1} a_{j+1} + \beta_n a_n = 0$

Ponieważ $(a_1, a_2, \ldots, a_n)-$ baza, więc $\beta\alpha_j = 0$,

i wiemy z założenia, że $\alpha_j \neq 0$, zatem $\beta = 0 \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = 0$.

Twierdzenie 4.3 (Steinitza o wymianie)

Jeśli wektory $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tworzą bazę przestrzeni V, a wektory $b_1, b_2, \ldots, b_s$ są liniowo niezależne, to:

1. $s \leqslant n$
2. *istnieje $(n - s)$ wektorów a_i, które łącznie z wektorami b_j tworzą bazę przestrzeni V.*

Dowód (indukcyjny)

Dla $s = 0$ oczywiste, bo $0 \leqslant n$.
Załóżmy, że twierdzenie to jest prawdziwe dla liczb mniejszych od s i dowodzimy względem s.
Rozpatrzmy s wektorów liniowo niezależnych $b_1, b_2, \dots, b_s$.
Wektory $b_1, b_2, \dots, b_{s-1}$ są liniowo niezależne.
Oznacza to, że $s - 1 \leqslant n$ oraz istnieje $n - s + 1$ wektorów spośród wektorów a_i, które łącznie z wektorami $b_1, b_2, \dots, b_{s-1}$ tworzą bazę V.
Dla uproszczenia zapisu przyjmijmy, że tymi wektorami są $a_1, a_2, \dots, a_{n-s+1}$. Wykażemy najpierw, że $s - 1 < n$. Gdyby było inaczej, oznaczałoby to, że $s - 1 = n$ (bo $s - 1 \leqslant n$). A zatem już wektory $b_1, b_2, \dots, b_{s-1}$ tworzyłyby bazę przestrzeni V. Stąd b_s byłby liniowo zależny od $b_1, b_2, \dots, b_{s-1}$, co daje sprzeczność. Zatem:

$$s - 1 < n \Rightarrow s \leqslant n,$$

co dowodzi części pierwszej.
Z założenia wektory $b_1, \dots, b_{s-1}, a_1, \dots, a_{n-s+1}$ są bazą V.

Dowód c.d.

Stąd b_s jako wektor z V jest ich kombinacją liniową:

$$b_s = \gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_{s-1} b_{s-1} + \gamma_s a_1 + \ldots + \gamma_n a_{n-s+1}.$$

Ponieważ $b_1, \cdots, b_{s-1}, b_s$ liniowo niezależne, to co najmniej jeden ze współczynników przy $a_1, a_2, \ldots, a_{n-s+1}$ musi być różny od zera.
Przyjmujemy, że jest to np. γ_n tzn. $\neq 0$.
Z lematu możemy utworzyć nową bazę pomijając wektor a_{n-s+1} i wstawiając w jego miejsce b_s. Stąd $b_1, \ldots, b_s, a_1, \ldots, a_{n-s}$ jest szukaną bazą spełniającą twierdzenie Steinitza.

Definicja 4.4

Liczbę elementów dowolnej skończonej bazy przestrzeni liniowej V nad ciałem $\mathbb{K}$ nazywamy wymiarem przestrzeni V i oznaczamy przez $\dim_{\mathbb{K}} V$.
Jeżeli V nie ma skończonej bazy, to mówimy, że $\dim_k V = \infty$.
Jeżeli $V = \{0\}$ to mówimy, że $\dim_k V = 0$.

Przykład

- $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)-$ baza
  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$
- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$
  Liczba zespolona jest tu kombinacją liniową 1 oraz i nad $\mathbb{R}$.
- $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$
  Liczba zespolona jest tu kombinacją liniową 1 nad $\mathbb{C}$.
- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$
- $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$
- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = 1$
  $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K} = 1$ - bazę $\mathbb{K}$ nad $\mathbb{K}$ tworzy dowolny $\neq 0$ element z $\mathbb{K}$.

Przykłady

- $e_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0)$
  $e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0)$
  $\ldots$
  $e_n = (0, 0, 0, \cdots, 1)$
  Jest to baza standardowa, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$.
  Analogicznie taką samą bazę mamy nad ciałem $\mathbb{K}$ na $\mathbb{K}^n$. Stąd $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$.
- $C(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f - \text{funkcja ciągła}\}$
  $(f_1 \circ f_2)(x) = f_1(x) \circ f_2(x), x \in X$
  $(\alpha f)(x) = \alpha f(x), x \in X$
  Przestrzeń liniowa nad $\mathbb{R}$
  $\dim_{\mathbb{R}} C(X) = \infty$

Stwierdzenie 5.1

$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$

Dowód

Przypuśćmy, że $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = n$. Wówczas istniałaby taka baza $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}$, że każda liczba z $\mathbb{R}$ jest zapisywalna w postaci $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$, gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Q}$. A to z definicji liczb rzeczywistych jest niemożliwe.

Przykłady

- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$, baza: $1 = e_1 = (1,0), i = e_2 = (0,1)$
- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$
  Każda liczba zespolona jest kombinacją liniową nad $\mathbb{R}$ dwóch liczb zespolonych. Ponieważ $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$, więc dowolne dwa liniowo niezależne wektory stanowią bazę $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$.
- $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \infty$

Definicja 5.2

Niech V_1, V_2 przestrzenie liniowe nad ciałem $\mathbb{R}$. Funkcja $f : V_1 \to V_2$ jest homomorfizmem liniowym, o ile spełnia warunki:

1. $\forall_{x_1, x_2 \in V_1}\ f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$
2. $\forall_{x \in V_1} \forall_{\alpha \in \mathbb{R}}\ f(\alpha x) = \alpha f(x)$

Przykłady

$f : V_1 \to V_2$

- $\forall_{x \in V_1}\ f(x) = 0$ - jest odwzorowaniem liniowym
- $V_1 = V_2$
  $f(x) = x$ - jest odwzorowaniem liniowym

Definicja 5.3

Niech V_1, V_2 przestrzenie liniowe nad $\mathbb{R}$. Produktem kartezjańskim przestrzeni V_1, V_2 nazywamy przestrzeń
$V_1 \times V_2 = \{(v_1, v_2) \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ z działaniami:

- $\forall_{x_1, x_2 \in V_1} \forall_{y_1, y_2 \in V_2}\ (x_1, x_2) + (y_1, y_2) \stackrel{\mathrm{df}}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$
- $\forall_{\alpha \in \mathbb{R}}\ \alpha(x_1, x_2) \stackrel{\mathrm{df}}{=} (\alpha x_1, \alpha x_2)$

Przykład

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$
$\dots$
$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$

$$\Pi_1 : V_1 \times V_2 \to V_1$$

$(x, y) \to x-$ homomorfizm liniowy - rzutowanie na pierwszą składową

$$\Pi_2 : V_1 \times V_2 \to V_2$$

$(x, y) \to y-$ homomorfizm liniowy - rzutowanie na drugą składową.

Stwierdzenie 5.4

Następujące warunki są równoważne:

1. $f : V_1 \to V_2$ *jest liniowe*
2. $\forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}} \forall_{x_1,x_2\in V_1}\ f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$

Dowód

$(1) \Rightarrow (2)$

$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \overset{1)}{=} f(\alpha x_1) + f(\beta x_2) \overset{2)}{=} \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$

$(2) \Rightarrow (1)$

1. $\alpha = \beta = 1,$
2. $\beta = 0$

Obserwacja

$f : V_1 \to V_2$ homomorfizm liniowy
$f(x - x) = f(x) - f(x) = f(0) = 0$

Definicja 5.5

Izomorfizmem liniowym przestrzeni V_1, V_2 nad ciałem $\mathbb{R}$ nazywamy homomorfizm liniowy, który jest różnowartościowy i "na".

Definicja 5.6

Niech $f : V_1 \to V_2$ homomorfizm liniowy. Wtedy:

- $\ker f = \{x \in V_1 \mid f(x) = 0\}$ nazywamy jądrem f;
- $\mathrm{im}\ f = \{y \in V_2 \mid \exists_{x \in V_1}\ f(x) = y\}$ nazywamy obrazem f.

Stwierdzenie 5.7

$\ker f$ *i* $\operatorname{im} f$ *są podprzestrzeniami liniowymi odpowiednio* V_1, V_2.

Dowód

Korzystamy z def. 3.2 podprzestrzeni liniowej:

V_1 podprzestrzeń liniowa przestrzeni liniowej V

$\iff \forall_{x,y\in V_1}\forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{K}}\ \alpha x+\beta y\in V_1$

$\ker f\subset V_1$

$0\in\ker f$

$\forall_{\alpha,\beta}\forall_{x,y\in\ker f}\ \alpha x+\beta y\in\ker f$

$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)=\alpha 0+\beta 0=0+0=0.$

$\mathrm{im} f\subset V_2$

$\forall_{\alpha,\beta}\forall_{x,y\in \mathrm{im} f}\ \alpha x+\beta y\in \mathrm{im} f$

$$\left.\begin{array}{l} x\in \mathrm{im} f \iff \exists_{x_1\in V_1}\ f(x_1)=x \\ y\in \mathrm{im} f \iff \exists_{y_1\in V_1}\ f(y_1)=y \end{array}\right\}\Rightarrow \alpha x+\beta y=$$

$=\alpha f(x_1)+\beta f(y_1)=f(\alpha x_1+\beta y_1)\Rightarrow \alpha x+\beta y\in \mathrm{im} f$

Wniosek

Zawierania $\ker f \subset V_1$ i $\mathrm{im} \subset V_2$ są homomorfizmami przestrzeni liniowych.

Definicja 5.8

Bycie podprzestrzenią jest tym samym co stwierdzenie, że inkluzja $V \subset W$ jest homomorfizmem liniowym.

Stwierdzenie 5.9

$f : V_1 \to V_2$ jest homomorfizmem liniowym różnowartościowym $\iff \ker f = 0$.

Dowód.

" $\Rightarrow$ "$\forall_{x,y\in V_1}\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
$0 \neq x \in \ker f$
$0 = f(x) = f(0) \Rightarrow x = 0$.
" $\Leftarrow$ " Niech $\ker f = 0$. Mamy udowodnić, że
$\forall_{x,y\in V_1}\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
Istotnie, z definicji $f(x-y) = f(x) - f(y) = 0$. Stąd $(x-y) \in \ker f$ i $x - y = 0$. Zatem $x = y$..

Definicja 6.1

Macierzą (prostokątną) wymiaru $n \times m$ nazywamy tablicę elementów ciała $\mathbb{K}$ o $n-$ wierszach i $m-$ kolumnach. Zapisujemy ją jako: $[\alpha_{ij}]_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m}$ dla każdego $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$.

Przykłady

$$\begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & 6 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Definicja 6.2

Niech: $V-$ przestrzeń liniowa wymiaru m, $W-$ przestrzeń liniowa wymiaru n, $e_1, e_2, \ldots, e_m-$ baza przestrzeni V, $f_1, f_2, \ldots, f_n-$ baza przestrzeni W
Niech $h : V \to W$ homomorfizm przestrzeni liniowych.
$h(e_1) = \alpha_{11} f_1 + \alpha_{21} f_2 + \ldots + \alpha_{n1} f_n$
$h(e_2) = \alpha_{12} f_1 + \alpha_{22} f_2 + \ldots + \alpha_{n2} f_n$
...
$h(e_m) = \alpha_{1m} f_1 + \alpha_{2m} f_2 + \ldots + \alpha_{nm} f_n$

Wówczas macierz $[h(e_1), h(e_2), \ldots, h(e_m)] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nm} \end{bmatrix}$

nazywamy macierzą homomorfizmu h.

Przykłady

- $[a], a \in \mathbb{R}$ (1 wiersz, 1 kolumna), $n = 1, m = 1$
  $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, 1 \in \mathbb{R}-$ baza $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{R}$
  $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ f(x) = ax$
  $f(1) = a$
  $f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1) = xa = ax$
- $\underbrace{[1\ 1\ 1\ 1]} \leftrightsquigarrow h : V \to W$
  (1 wiersz, 4 kolumny), $n = 1, m = 4$
  $\dim V = 4 \longleftrightarrow (e_1, e_2, e_3, e_4),\ \ \dim W = 1 \longleftrightarrow (f_1)$
  $h(e_1) = f_1, h(e_2) = f_1, h(e_3) = f_1, h(e_4) = f_1$
  $\forall_{x\in V}\ x = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 + \delta e_4$
  $h(x) = h(\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 + \delta e_4) =$
  $= \alpha h(e_1) + \beta h(e_2) + \gamma h(e_3) + \delta h(e_4) =$
  $= \alpha f_1 + \beta f_1 + \gamma f_1 + \delta f_1 = (\alpha + \beta + \gamma + \delta) f_1$

Przykłady c.d.

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix} \leftrightsquigarrow h : V \to W$

  $\dim V = 3 \longleftrightarrow (e_1, e_2, e_3)$
  $\dim W = 2 \longleftrightarrow (f_1, f_2)$
  $h(e_1) = 1f_1 + 0f_2 = f_1$
  $h(e_2) = 2f_1 + 5f_2$
  $h(e_3) = 3f_1 + 6f_2$

Uwaga

Homomorfizm przestrzeni liniowych zapisany w postaci macierzy to homomorfizm "zakodowany" w postaci macierzy. Bez znajomości baz, w których jest on zakodowany, nie jesteśmy w stanie go "odkodować".
Zatem odpowiedniość:
$\{\text{Macierze}\} \leftrightsquigarrow \{\text{homomorfizmy}\}$
jest związana z odpowiednimi bazami.

Mnożenie macierzy $\leftrightsquigarrow$ superpozycja (składanie) homomorfizmów

Niech $g : V \to W, h : W \to U$. Bazami przestrzeni V, W, U niech będą $(e_1, \ldots, e_m), (f_1, \ldots, f_n), (u_1, \ldots, u_k)$ odpowiednio. Macierzą homomorfizmu g niech będzie: $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nm} \end{bmatrix}$, zaś macierzą homomorfizmu h macierz: $B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \beta_{k1} & \beta_{k2} & \ldots & \beta_{kn} \end{bmatrix}$.

Mnożenie macierzy $\leftrightsquigarrow$ superpozycja (składanie) homomorfizmów

$V \xrightarrow{g} W \xrightarrow{h} U$

$$
\begin{gathered}
h(g(e_i)) = h(\alpha_{1i} f_1 + \alpha_{2i} f_2 + \ldots + \alpha_{ni} f_n) = \\
= \alpha_{1i} h(f_1) + \alpha_{2i} h(f_2) + \ldots + \alpha_{ni} h(f_n) = \\
= \alpha_{1i}(\beta_{11} u_1 + \beta_{21} u_2 + \ldots + \beta_{k1} u_k) + \\
+ \alpha_{2i}(\beta_{12} u_1 + \beta_{22} u_2 + \ldots + \beta_{k2} u_k) + \ldots + \\
+ \alpha_{ni}(\beta_{1n} u_1 + \beta_{2n} u_2 + \ldots + \beta_{kn} u_k) = \\
= (\alpha_{1i}\beta_{11} + \alpha_{2i}\beta_{12} + \ldots + \alpha_{ni}\beta_{1n}) u_1 + \\
+ (\alpha_{1i}\beta_{21} + \alpha_{2i}\beta_{22} + \ldots + \alpha_{ni}\beta_{2n}) u_2 + \ldots + \\
+ (\alpha_{1i}\beta_{k1} + \alpha_{2i}\beta_{k2} + \ldots + \alpha_{ni}\beta_{kn}) u_k
\end{gathered}
$$

Zatem: $\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}\beta_{1j} = \sum_{j=1}^{n} \beta_{1j}\alpha_{ji} \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}\beta_{2j} = \sum_{j=1}^{n} \beta_{2j}\alpha_{ji} \\ \ldots \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}\beta_{kj} = \sum_{j=1}^{n} \beta_{kj}\alpha_{ji} \end{bmatrix}$ $-i-$ ta kolumna w macierzy odwzorowania $h \circ g$

Mnożenie macierzy $\leftrightsquigarrow$ superpozycja (składanie) homomorfizmów

Z drugiej strony:

$$B \times A = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \beta_{k1} & \beta_{k2} & \dots & \beta_{kn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} \beta_{1j}\alpha_{j1} & \sum_{j=1}^{n} \beta_{1j}\alpha_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^{n} \beta_{1j}\alpha_{jm} \\ \sum_{j=1}^{n} \beta_{2j}\alpha_{j1} & \sum_{j=1}^{n} \beta_{2j}\alpha_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^{n} \beta_{2j}\alpha_{jm} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ \sum_{j=1}^{n} \beta_{kj}\alpha_{j1} & \sum_{j=1}^{n} \beta_{kj}\alpha_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^{n} \beta_{kj}\alpha_{jm} \end{bmatrix}.$$

Mnożenie macierzy $\leftrightsquigarrow$ superpozycja (składanie) homomorfizmów

Czyli $i-$ ty wiersz $\left[\ \beta_{i1}, \beta_{i2}, \ldots, \beta_{in}\ \right]$ macierzy B mnożymy przez $k-$ tą kolumnę $\begin{bmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \vdots \\ \beta_{nk} \end{bmatrix}$ macierzy A i dostajemy element na miejscu (i, k) macierzy BA, czyli $\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}\alpha_{jk}$.

Uwga

Uwaga

1. Macierze B i A można mnożyć $\iff$ ilość kolumn macierzy B jest równa ilości wierszy macierzy A.
2. Macierze kwadratowe tego samego wymiaru zawsze można mnożyć.

Definicja 6.3

Niech $V, W, U-$ przestrzenie liniowe, zaś $A = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}, B = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}, C = \{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$ bazy przestrzeni V, W, U odpowiednio. Określmy: $V \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{\psi} U$. Niech $\varphi(e_i) = a_{1i}f_1 + a_{2i}f_2 + \cdots + a_{ni}f_n$, natomiast

$$M_B^A(\varphi) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \sim \varphi \sim (n \times m).$$ Podobnie:

$\psi(f_i) = b_{1i}g_1 + b_{2i}g_2 + \cdots + b_{ki}g_k$

i $$M_C^B(\psi) = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1i} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2i} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{ki} & \cdots & b_{kn} \end{bmatrix} \sim \psi \sim (k \times n).$$

Wtedy $\psi \circ \varphi \sim M_C^B M_B^A \sim (k \times m)$

Wykład 7.

Uwaga

Niech A, B, C będą macierzami kwadratowymi $n \times n$. Możemy wtedy wykonywać następujące działania:

1. $A + B = B + A$ przemienność dodawania
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ łączność dodawania
3. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ łączność mnożenia
4. $A(B + C) = AB + AC$
   $(B + C)A = BA + CA$ rozdzielność dodawania względem mnożenia (i odwrotnie)
5. $\alpha(B + C) = \alpha B + \alpha C$ mnożenie przez skalary

Przykład

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

Mnożenie macierzy nie jest przemienne!

Definicja 7.1

Macierzą jednostkową $\mathrm{E_n}(\mathrm{I_n})$ $[a_{ij}]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ wymiaru n nazywamy macierz przyjmującą: $\begin{cases} 0 & \text{gdy } i \neq j \\ 1 & \text{gdy } i = j \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Stwierdzenie 7.2

Dla każdej macierzy kwadratowej $A_{(n\times n)}$

$$A\mathrm{I_n} = \mathrm{I_n}A = A$$

Stwierdzenie 7.3

Niech $\varphi : V \to W, B_V = (v_1, \dots, v_n), B_W = (w_1, \dots, w_m)$ *bazy* V, W *odpowiednio,* $M_W^V(\varphi)$ *macierz odwzorowania. Jeśli* $x = (x_1, \dots, x_n)_{B_V}$*, to współrzędne* $\varphi(x)$ *w bazie* B_W *są równe:*

$$[\varphi(x)]_{B_W} = M_W^V(\varphi) \cdot x = M_W^V(\varphi) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Dowód

$$\varphi(x) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji} w_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ji} x_i w_j = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i\right) w_j =$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{1i} x_i\right) w_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} a_{2i} x_i\right) w_2 + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{n} a_{mi} x_i\right) w_m = M_W^V(\varphi) \cdot x,$$

tzn.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1i} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2i} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mi} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} x_j a_{1j} \\ \sum_{j=1}^{n} x_j a_{2j} \\ \ldots \\ \sum_{j=1}^{n} x_j a_{mj} \end{bmatrix}$$

Definicja 7.4

Przekształceniem identycznościowym nazywamy
$id : V \to V, \forall_{v \in V}\ id(v) = v$

Definicja 7.5

Niech A i A' bazy przestrzeni V. Wtedy macierz $M_{A'}^{A}(id)$ nazywamy macierzą przejścia od bazy A do bazy A' lub macierzą zmiany bazy z A do A' i oznaczamy przez $P_{A'}^{A}$.
Kolejne kolumny tej macierzy to współrzędne kolejnych wektorów bazy A w bazie A'.
$A = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}, A' = \{e_1', e_2', \ldots, e_m'\}$
$\varphi = id$
$\varphi(e_i) = id(e_i) = p_{1i}e_1' + \ldots + p_{mi}e_m'$

Definicja 7.5 c.d.

$$P_{A'}^{A} = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

Macierz przejścia z bazy A do bazy A' jest zatem macierzą przekształcenia identycznościowego $id(x) = x$ w bazach A i A'.

Uwaga

Niech $P_{A'}^{A}$ macierz przejścia od bazy A do bazy A'. Wtedy $P_{A'}^{A}$ jest odwracalna i macierz $(P_{A'}^{A})^{-1} = P_{A}^{A'}$ jest macierzą przejścia od bazy A' do bazy A.

Definicja 7.6

Niech $M_B^A(\varphi)$ będzie macierzą przekształcenia liniowego $\varphi : V \to W$ w bazach A, B przestrzeni V, W odpowiednio. Macierz przekształcenia liniowego φ w bazie A', B' ma postać:
$M_{B'}^{A'}(\varphi) = P_{B'}^{B} M_B^A(\varphi) P_A^{A'}$

Przykład

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
$\varphi(x, y) = (x, y, x + y)$ $A = \{(1, 0), (0, 1)\}$
$A' = \{(1, 1), (1, 0)\}$
$B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$
$B' = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$

$$M_{A'}^{B'}(\varphi) = P_{A'}^{A} M_A^B(\varphi) P_B^{B'}$$

Przykład

$(1,1) = 1(1,0) + 1(0,1)$
$(1,0) = 1(1,0) + 0(0,1)$

$$P_{A'}^{A} = (P_{A}^{A'})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$(1,1,1) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1)$
$(1,1,0) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1)$
$(1,0,0) = 1(1,0,0) + 0(0,1,0) + 0(0,0,1)$

$$P_{B}^{B'} = (P_{B'}^{B})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Przykład

$M_B^A(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\varphi_{B'}^{A'}$:

$\varphi(e_1') = \varphi(1,1) = (1,1,2) = 2(1,1,1) + (-1)(1,1,0) + 0(1,0,0)$

$\varphi(e_2') = \varphi(1,0) = (1,0,1) = 1(1,1,1) + (-1)(1,1,0) + 1(1,0,0)$

Stąd:

$$M_{B'}^{A'}(\varphi) = P_{B'}^{B} M_B^A(\varphi) P_A^{A'} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Analogicznie:

$$M_{A'}^{B'}(\varphi) = P_{A'}^{A} M_A^B(\varphi) P_B^{B'}$$

Wykład 8.

Uwagi wstępne

- $V-$ przestrzeń liniowa
- $f : V \to W$ - odwzorowanie przestrzeni liniowych
- B_V- baza przestrzeni liniowych, liniowo niezależny zbiór wektorów
- macierze są zdefiniowane w odpowiednich bazach
- M_n^n- zbiór macierzy kwadratowych o współczynnikach w ciele $\mathbb{K}$ o n wierszach i n kolumnach
- $\mathcal{M}_{\mathbb{K}} = M_n^n$ - suma wszystkich macierzy kwadratowych

Definicja 8.1

Wyznacznikiem nazywamy funkcję działającą ze zbioru $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}$ do zbioru $\mathbb{K}$. Oznaczamy ją przez $\det$.

$$\det\colon \mathcal{M}_{\mathbb{K}} \to \mathbb{K}$$

Definicja 8.2

Dowolną funkcję różnowartościową $\sigma : \{1, 2, \cdots, n\} \to \{1, 2, \cdots, n\}$ nazywamy permutacją zbioru $\{1, 2, \cdots, n\}$. Oznaczamy ją:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Uwagi

- Zbiór wszystkich permutacji jest grupą oznaczaną przez S_n.
- mnożenie w S_n - składanie funkcji
- jedynka (permutacja jednostkowa) to permutacja postaci:

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Przykład 1.

Każdą permutację można zapisać w postaci rozłącznych cykli.

$\sigma : (1, \sigma(1), \sigma^2(1), \ldots, \sigma^k(1) = 1)$

Elementy $1, \sigma(1), \sigma^2(1), \ldots, \sigma^{k-1}(1)$ tworzą tak zwany cykl.

Np.:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$\sigma = (1\ 3)(4\ 5)(2)$

$\sigma(1) = 3$

$\sigma^2(1) = 1$

$\sigma(2) = 2$ - cykl długości 1

$\sigma(4) = 5$

$\sigma^2(4) = 4$

Przykład 2.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 6 & 1 & 2 & 9 & 10 & 7 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} \sigma(1) = 3 \\ \sigma^2(1) = 6 \\ \sigma^3(1) = 9 \\ \sigma^4(1) = 4 \\ \sigma^5(1) = 1 \end{array}\right\} (1\ 3\ 6\ 9\ 4)$$

$$\left.\begin{array}{r} \sigma(2) = 5 \\ \sigma^2(2) = 2 \end{array}\right\} (2\ 5)$$

$$\left.\begin{array}{r} \sigma(7) = 10 \\ \sigma^2(7) = 8 \\ \sigma^3(7) = 7 \end{array}\right\} (7\ 10\ 8)$$

$$\sigma = (1\ 3\ 6\ 9\ 4)(2\ 5)(7\ 10\ 8)$$

Każda permutacja jest iloczynem cykli.

Definicja 8.3

Transpozycją nazywamy cykl długości 2.

Fakt

Każdy cykl jest iloczynem transpozycji.

Ćwiczenie

Cykl $(1\ 2\ \cdots\ n) = (1\ 2)(1\ 3)(1\ 4)\cdots(1\ n) \in S_n$

Definicja 8.4

Permutację nazywamy:

- parzystą, gdy jest identycznościowa *id* lub jest iloczynem parzystej liczby transpozycji
- nieparzystą, gdy jest iloczynem nieparzystej liczby transpozycji

Znak permutacji to:

$$\mathrm{sgn}\sigma = \begin{cases} 1 & \sigma - \text{parzyste} \\ -1 & \sigma - \text{nieparzyste} \end{cases}$$

Uwaga

Dla każdego $n \geqslant 2$ mamy $\frac{1}{2}n!$ permutacji parzystych i $\frac{1}{2}n!$ permutacji nieparzystych.

Definicja 8.5

Niech $A \in M_n^n, A = [a_{ij}]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Wyznacznik macierzy A definiujemy jako:
$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\ a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$

Definicja 8.6 (Indukcyjna definicja wyznacznika)

Niech $A \in M_n^n$.
Dla $n = 1 \quad \det[a] = a$
Dla ustalonego n $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in}$
(rozwinięcie Laplace'a macierzy A względem ostatniej kolumny)

$$A_{in} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & a_{1i+1} & \dots & a_{1n-1} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1i-1} & a_{i-1i+1} & \dots & a_{i-1n-1} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1i-1} & a_{i+1i+1} & \dots & a_{i+1n-1} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & a_{ni+1} & \dots & a_{nn-1} \end{bmatrix},$$

gdzie A_{in} to A po wykreśleniu $i-$ tego wiersza i $n-$ tej kolumny.

Przykład

$n = 2$

$$S_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\sigma_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\sigma_2} \right\}$$

$\mathrm{sgn}(\sigma_1) = -1$

$\mathrm{sgn}(\sigma_2) = 1$

$\det A = \sum_{\sigma \in S_2} \mathrm{sgn}(\sigma) a_1\sigma(1) a_2\sigma(2) = \mathrm{sgn}(\sigma_2) a_{11} a_{22} + \mathrm{sgn}(\sigma_1) a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$

$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} =$

$(-1)^{(1+2)} a_{12} \det[a_{21}] + (-1)^{(2+2)} a_{22} \det[a_{11}] = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$

Ćwiczenie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det A = a_{13}(-1)^{(1+3)} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} + a_{23}(-1)^{(2+3)} \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} +$$

$$a_{33}(-1)^{(3+3)} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} =$$

$$a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{11}a_{32} + a_{23}a_{12}a_{31} + a_{33}a_{11}a_{22} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

Ćwiczenie c.d.

Metoda Sarussa:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{+1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{-1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{-1},$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{-1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{+1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{+1}$$

Ćwiczenie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$

Stwierdzenie 8.7

Niech $n \in \mathbb{N}$, i *- ustalona liczba naturalna mniejsza-równa od* n, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \alpha_i' -$ *układ wektorów przestrzeni* $\mathbb{K}^n$, $a, a' \in \mathbb{K}$. *Wówczas:*

$\det[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, a\alpha_i + a'\alpha_i', \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n] =$
$a \det[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n] +$
$a' \det[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i', \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n]$

Dowód

- Gdy $n = 1$, to $i = 1$, i tezę otrzymujemy natychmiast: $\det[aa_{11} + a'a'_{11}] = aa_{11} + a'a'_{11} = a\det[a_{11}] + a'\det[a'_{11}]$
- Załóżmy, że nasz wzór jest prawdziwy dla $n = m - 1 \geqslant 1$ i rozpatrzmy przypadek $n = m \geqslant 2$.

Jeśli $i \leqslant m - 1$, to wzór wynika wprost z definicji wyznacznika i z powyższego założenia.
Jeśli $i = m$ to:

$$\det A = \det[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{m-1}, a\alpha_m + a'\alpha'_m] =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+m}(a\alpha_{im} + a'\alpha'_{im}) \det A_{im} =$$
$$= a\sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+m}\alpha_{im} \det A_{im} + a'\sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+m}\alpha'_{im} \det A_{im},$$

gdzie przyjęliśmy, że $\alpha_m = [\alpha_{1m}, \ldots, \alpha_{mm}]^T$, $\alpha'_m = [\alpha'_{1m}, \ldots, \alpha'_{mm}]^T, A = [\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, a\alpha_m + a'\alpha'_m]$.

Dowód c.d.

Macierz A_{im} dla $i = 1, \ldots, m$ możemy również otrzymać wykreślając $i-$ ty wiersz i ostatnią $m-$ tą kolumnę macierzy $[\alpha_1, \ldots, \alpha_m]$ i macierzy $[\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, \alpha'_m]$, więc:

$$\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+m}\alpha_{im}\det A_{im} = \det[\alpha_1, \ldots, \alpha_m]$$
$$\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+m}\alpha'_{im}\det A_{im} = \det[\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, \alpha'_m].$$

Zatem:

$$\det A = a\det[\alpha_1, \ldots, \alpha_m] + a'\det[\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, \alpha'_m.]$$

Na mocy zasady indukcji wynika stąd prawdziwość twierdzenia dla wszystkich liczb naturalnych.

Twierdzenie 9.1

Niech n będzie liczbą naturalną, większą od 1. Załóżmy, że i, k są różnymi liczbami naturalnymi spełniającymi nierówność:

$$1 \leqslant i < k \leqslant n$$

Niech też $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}^n(\mathbb{K}^n)$.
Wówczas:

1. *Jeśli* $\alpha_i = \alpha_k$, *to* $\det[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] = 0$.
2. $\det[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}, \alpha_k, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_i, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n] = -\det[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$
3. $\det[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n] = (-1)^{k-i}\det[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_k, \alpha_i, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n]$

Jeśli przesuniemy $i-$ tą kolumnę o k miejsc to wyznacznik zmienia się o $(-1)^{k-i}$.

Dowód

Jeśli $n = 2$, to $i = 1, k = 2$ i punkty $1., 2., 3.$ wynikają wprost ze wzoru na wyznacznik stopnia 2. Załóżmy, że twierdzenie to jest prawdziwe dla $n = m - 1 \geqslant 2$ i rozpatrzmy przypadek $n = m \geqslant 3$.
Jeśli $k < m$, to twierdzenie wynika łatwo z definicji wyznacznika oraz z założenia. Niech więc $k = m$.
Zajmiemy się najpierw dowodem punktu 1. Ponieważ wiemy już, że:

$$\det[\alpha_1, \ldots, \alpha_m] = -\det[\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{m-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{m-2}, \alpha_i, \alpha_m],$$

więc możemy przyjąć $i = m - 1, k = m$, tj. $\alpha_{m-1} = \alpha_m$. Macierz $[\alpha_1, \ldots, \alpha_m]$ oznaczmy symbolem M i niech $M_{s,t;m,m-1}$ oznacza macierz powstałą z M przez skreślenie dwóch ostatnich kolumn oraz wierszy o wskaźnikach s, t.

Dowód c.d.

Wtedy:

$$
\begin{aligned}
\det M &= \sum_{l=1}^{m} (-1)^{l+m} a_{lm} \det M_{lm} = \\
&= \sum_{l=1}^{m} (-1)^{l+m} a_{lm} \Big(\sum_{s=1}^{l-1} (-1)^{s+m-1} a_{sm} \det M_{sl;m-1,m} + \\
&\quad + \sum_{s=l+1}^{m} (-1)^{s-1+m-1} a_{sm} \det M_{ls;m-1,m} \Big) = \\
&= \sum_{s<l} (-1)^{l+s+2m-1} a_{lm} a_{sm} \det M_{sl;m-1,m} + \\
&\quad + \sum_{l<s} (-1)^{l+s+2m-2} a_{lm} a_{sm} \det M_{ls;m-1,m} = \\
&= \sum_{s<l} (-1)^{l+s-1} a_{lm} a_{sm} \det M_{sl;m-1,m} - \\
&\quad - \sum_{l<s} (-1)^{l+s-1} a_{lm} a_{sm} \det M_{sl;m-1,m} = 0,
\end{aligned}
$$

gdzie przyjęliśmy, $\alpha_m = \alpha_{m-1} = [a_{1m}, \ldots, a_{mm}]$.

Dowód c.d.

Dowód 1. został więc zakończony. Dla zakończenia dowodu 2. i 3. nie będziemy się ograniczać do przypadku $k = m$, gdyż dowód w przypadku ogólnym jest równie prosty.
Rozpatrzmy macierz:

$$N = [\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i + \alpha_k, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_i + \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_m].$$

Macierz ta ma dwie kolumny równe, a więc na mocy 1. $\det N = 0$. Korzystając z stwierdzenia 8.7. oraz z punktu 1. otrzymamy z drugiej strony:

$$\det N =$$
$$\det[\alpha_1, \ldots, \alpha_m] + \det[\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_k, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_i, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_m] +$$
$$\det[\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_i, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_m] + \det[\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_k, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m] =$$
$$\det[\alpha_1, \ldots, \alpha_m] + \det[\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_k, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_i, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_m].$$

Dowód c.d.

A stąd:

$$\det[\alpha_1, \ldots, \alpha_m] =$$
$$-det[\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_k, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_i, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_m],$$

co kończy dowód 2.
Pozostaje więc tylko udowodnić 3. Podobnie jak wyżej, rozpatrujemy przypadek ogólny. Zamieńmy miejscami w macierzy $[\alpha_1, \ldots, \alpha_m]$ kolumnę $i-$ tą z kolumną $(i+1)-$ szą, a w tak otrzymanej macierzy zamieńmy miejscami kolumnę $(i+1)-$ szą z kolumną $(i+2)-$ gą, itd. Po $(k-i)$ krokach otrzymamy macierz:

$$[\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_k, \alpha_i, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_m].$$

Dowód c.d.

Ponieważ na mocy 2. po każdym kroku wyznacznik otrzymanej macierzy różni się od wyznacznika poprzedniej macierzy czynnikiem -1, więc:

$$[\alpha_1, \ldots, \alpha_m] = (-1)^{k-1}[\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_k, \alpha_i, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_m],$$

co kończy dowód 3.
Wykazaliśmy więc, że z prawdziwości twierdzenia dla $n = m - 1$ wynika prawdziwość twierdzenia dla $n = m$. Ponieważ na wstępie stwierdziliśmy, że twierdzenie jest słuszne dla $n = 2$, więc na mocy zasady indukcji twierdzenie zostało udowodnione.
Można łatwo wykazać, że analogiczne własności przysługują również wierszom.

Twierdzenie 9.2

Niech $n \in \mathbb{N}$, $i-$ *ustalone, takie, że* $1 \leqslant i \leqslant n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_i' \in \mathbb{R}^n(\mathbb{K}^n), a, a' \in \mathbb{R}$. *Wówczas:*

$$\det \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_{i-1} \\ a\alpha_i + a'\alpha_i' \\ \alpha_{i+1} \\ \cdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = a \det \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + a' \det \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_{i-1} \\ \alpha_i' \\ \alpha_{i+1} \\ \cdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

(Liniowość ze względu na wiersze. Wersja wierszowa stw. 8.7.)

Wykład 10.

Twierdzenie 10.1

Niech $n \in \mathbb{N}, n > 1$*. Niech* $k, i \in \mathbb{N}$ *spełniają nierówność* $1 \leqslant i < k \leqslant n$*. Niech* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *będzie ciągiem wektorów przestrzeni* $\mathbb{K}^n$*. Wówczas:*

1. *Jeśli* $\alpha_i = \alpha_k$*, to*
$$\det \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = 0$$
2. $$\det \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \ldots \\ \alpha_{i-1} \\ \alpha_k \\ \alpha_{i+1} \\ \ldots \\ \alpha_{k-1} \\ \alpha_i \\ \alpha_{k+1} \\ \ldots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 10.1 c.d

3. $$\det \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = (-1)^{k-i} \det \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_{i-1} \\ \alpha_{i+1} \\ \dots \\ \alpha_k \\ \alpha_i \\ \alpha_{k+1} \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Dowód

Dowód indukcyjny.
Dla $n = 2$ twierdzenie to wynika z wzoru na wartość wyznacznika macierzy stopnia 2.
Załóżmy, że dowodzony rezultat jest prawdziwy dla $n = m - 1$ i niech $n = m$.
Udowodnimy 1. w oparciu o założenie indukcyjne dotyczące całego twierdzenia.
Macierz $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ oznaczmy przez M. Na mocy definicji wyznacznika mamy:

$$\det M = \sum_{l=1}^{m} (-1)^{l+m} a_{lm} \det M_{lm},$$

gdzie elementy $a_{1m}, a_{2m}, \ldots, a_{mm}$ tworzą ostatnią kolumnę macierzy M.

Dowód c.d.

Jeśli $\alpha_i = \alpha_k$, to dla $l = i, k$ macierze M_{lm} mają dwa różne wiersze, a więc wtedy $\det M_{lm} = 0$ na mocy założenia. Natomiast macierze M_{in}, M_{kn} różnią się tylko ustawieniem wierszy i korzystając z 3., dla $n = m - 1$, widać, że $\det M_{im} = (-1)^{k-i-1} \det M_{km}$. Wobec tego:
$\det M = (-1)^{i+m} a_{im} \det M_{im} + (-1)^{k+m} a_{k,m} \det M_{km} =$
$\det M_{km}\left((-1)^{k+m-1} a_{im} + (-1)^{k+m} a_{km}\right) = 0,$
gdyż $a_{im} = a_{km}$.
Dowód części 2. i 3. jest analogiczny do dowodu części 2. i 3. twierdzenia 9.1.
Na mocy zasady indukcji twierdzenie zachodzi i dowód jest zakończony.

Wnioski

Niech M będzie macierzą kwadratową stopnia większego niż 1. Jeżeli macierz M' powstaje z macierzy M poprzez dodanie do pewnej kolumny (pewnego wiersza) innej kolumny (innego wiersza) pomnożonej (pomnożonego) przez pewien element ciała $\mathbb{K}$, to $\det M = \det M'$.

Dowód (dla kolumn)

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będą kolumnami macierzy M stopnia n.
Załóżmy, że do $i-$ tej kolumny dodaliśmy $k-$ tą kolumnę pomnożoną przez element $a \in \mathbb{K}$. Przyjmijmy, że $i < k$ (dla $i > k$ dowód jest analogiczny). Wtedy:
$\det M' = \det[\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i + a\alpha_k, \alpha_{i+1} \ldots \alpha_n] = \det[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] + a \det[\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_k, \alpha_{i+1} \ldots \alpha_n] = \det[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = \det M$,
gdyż macierz $[\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_k, \alpha_{i+1} \ldots \alpha_n]$ ma kolumny $i-$ tą i $k-$ tą równe, a więc $\det[\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_k, \alpha_{i+1} \ldots \alpha_n] = 0$.

Twierdzenie 10.2 (Laplace'a (dla kolumny))

Niech $M = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

Wtedy dla dowolnej liczby naturalnej $i, 1 \leqslant i \leqslant n$ *zachodzi:*

$$\det M = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l+i} a_{li} \det M_{li}$$

Dowód

Jeśli $i = n$, to dowodzona równość wynika z definicji wyznacznika.
Załóżmy, że $i \neq n$ i niech $M = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ oraz
$M' = [\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n, \alpha_i]$. Wtedy: $M'_{ln} = M_{li}$ dla $l = 1, \dots, n$.

Dowód c.d.

Na mocy twierdzenia 10.1 punkt 3. mamy: $\det M' = (-1)^{n-i} \det M$. Stąd:

$$\det M = (-1)^{n-i} \det M' = (-1)^{n-i} \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l+n} a_{li} \det M'_{ln} =$$
$$= \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l+i} a_{li} \det M_{li}.$$

Wniosek

Niech macierz M będzie równa $\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

Niech $l, k \in \mathbb{N}, l, k \leqslant n$. Wtedy:

$$\sum_{l=1}^{n} (-1)^{l+i} a_{li} \det M_{lk} = \begin{cases} \det M & \text{gdy } i = k \\ 0 & \text{gdy } i \neq k \end{cases}$$

Dowód

- Jeśli $i = k$, to powyższy wzór jest prawdziwy na mocy twierdzenia Laplace'a.
- Jeśli $i \neq k$, to rozpatrzmy macierz M' powstałą z M przez zastąpienie $k-$ tej kolumny $i-$ tą kolumną. (Macierz M' ma dwie takie same kolumny $\Rightarrow \det M' = 0$).
  Z drugiej strony, korzystając z twierdzenia Laplace'a dla macierzy M', otrzymujemy:

$$\det M' = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l+k} a_{li} \det M'_{lk} = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l+k} a_{li} \det M_{lk},$$

gdyż $M'_{lk} = M_{lk}$, co kończy dowód.

Operacje na macierzach **niezmieniające** wyznacznika

1. dodanie do dowolnej kolumny macierzy kwadratowej innej kolumny pomnożonej przez pewien element ciała
2. dodanie do dowolnego wiersza macierzy kwadratowej innego wiersza pomnożonego przez pewien element ciała

Operacje na macierzach **zmieniające** znak wyznacznika na przeciwny

(3) zamiana dwóch różnych kolumn macierzy kwadratowej miejscami

(4) zamiana dwóch róznych wierszy macierzy kwadratowej miejscami

Definicja 10.3

Niech M będzie macierzą $(n \times m)$. Macierzą transponowaną M^T macierzy M nazywamy taką $(m \times n)$ macierz, która jako swą $i-$ tą kolumnę, dla $i = 1, \ldots, n$ ma $i-$ ty wiersz (a wobec tego jako swój $j-$ ty wiersz dla $j = 1, \ldots, m$ ma $j-$ tą kolumnę) macierzy M.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} M^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Uwaga

Dla macierzy jednostkowej (identyczności) $\mathrm{I_n}$ zachodzi:

$$\mathrm{I_n}^T = \mathrm{I_n}$$

Przykłady

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 50 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 50 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Obserwacja

Dla dowolnej macierzy A :
$$(A^T)^T = A.$$
$$A^{T^{\cdots T}}(i \text{ razy}) = \begin{cases} A & \text{dla } i \text{ parzystych} \\ A^T & \text{dla } i \text{ nieparzystych} \end{cases}$$

Dla $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$,

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Ćwiczenie

Dokonując operacji $(1) - (4)$ można wychodząc z dowolnej macierzy kwadratowej dojść do macierzy diagonalnej.
Macierz diagonalna - wyznacznik takiej macierzy jest iloczynem elementów na diagonali (przekątnej).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$[a_{ij}] = A \text{ - diagonalna } \iff \forall_{i,j=1,\cdots,n}\ a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{gdy } i \neq j \\ a_{ii} & \text{gdy } i = j \end{cases}$$

Uwaga

W metodzie $(1) - (4)$, jak i w teorii wyznacznika, rola wierszy i kolumn jest taka sama i symetryczna.

Twierdzenie 11.1

Wartość wyznacznika danej macierzy kwadratowej A równa się wartości wyznacznika macierzy transponowanej A^T. Innymi słowy $\det A = \det A^T$.

Dowód

Każdej operacji $(1) - (4)$ można przyporządkować operację $(1) - (4)$ zamieniając rolami wiersze i kolumny. Operacji (1) przyporządkowujemy w ten sposób operacją typu (2).
Zaś operacji (2) operację (1). Operacjom (3) i (4) operacje (4) i (3). odpowiednio.
Dokonując na macierzy A jakąkolwiek operację (1)-(4) otrzymujemy macierz, którą oznaczamy A_1 :

$$A \overset{(1)-(4)}{\longrightarrow} A_1$$

Podobnie dokonując jakiejkolwiek operacji na macierzy A^T mamy:

$$A^T \overset{(1)-(4)}{\longrightarrow} (A_1)^T$$

Dowód c.d.

Dokonując kolejnych operacji otrzymujemy:

$$A \stackrel{(1)-(4)}{\longrightarrow} D$$

gdzie D - macierz diagonalna. Również:

$$A^T \stackrel{(1)-(4)}{\longrightarrow} D^T = D$$

Ponieważ $D = D^T$, a operacje $(1) - (2)$ nie zmieniają wyznacznika, natomiast operacje $(3) - (4)$ zmieniają wyznacznik o (-1) oraz korzystając z faktu, że operacji $(3) - (4)$ wykorzystaliśmy w obu przypadkach tę samą ilość, mamy:

$$\det A = \pm \det D = \pm \det D^T = \det A^T$$

(znak stojący przy $\det D$ i $\det D^T$ jest taki sam). Wobec tego $\det A = \det A^T$, co kończy dowód.

Jako wniosek z powyższego twierdzenia oraz z twierdzenia 10.2 otrzymujemy natychmiast następujące twierdzenie:

Twierdzenie 11.2 (Laplace'a dla wierszy)

Niech $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ *i niech* $1 \leqslant i \leqslant n$. *Wówczas*

$$\det A = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{i+l} a_{il} \det A_{il}$$

Definicja 11.3

Niech $A-$ dowolna macierz $n \times m$.
Rzędem kolumnowym (r_k) macierzy A nazywamy maksymalną liczbę liniowo niezależnych kolumn macierzy A. (Wymiar przestrzeni liniowej generowanej przez kolumny macierzy A.)
Rzędem wierszowym (r_w) macierzy A nazywamy maksymalną liczbę liniowo niezależnych wierszy macierzy A. (Wymiar przestrzeni liniowej generowanej przez wiersze macierzy A.)

Fakt

Dla dowolnej macierzy $A_{n\times m}$ zachodzi:

$$r_k \leqslant n$$
$$r_w \leqslant m$$

Uwaga

Niech A - macierz wymiaru $n \times m$

$r_k(A)-$ wymiar przestrzeni liniowej generowanej przez kolumny macierzy A

$r_w(A)-$ wymiar przestrzeni liniowej generowanej przez wiersze macierzy A

$$r_k(A) = \dim \operatorname{gen}\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathrm{K} = \operatorname{gen}\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

$r_k(A) \leqslant n$.

Analogicznie $r_w(A) \leqslant m$.

Twierdzenie 12.1

Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n. Wówczas:

$$\det A \neq 0 \iff r_k = r_w = n$$

Dowód

Dowód równości $r_k = r_w$ podamy za chwilę. Z własności $(1) - (4)$ możemy sprowadzić A do postaci diagonalnej. Wyznacznik zmieni się jedynie o znak. Jeśli pierwotnie był $\neq 0$, to taki pozostanie. Możemy więc założyć, że $A-$ diagonalna. Z drugiej strony powyższe operacje $(1) - (4)$ nie zmieniają r_w i r_k.

Twierdzenie 12.2

Rząd kolumnowy dowolnej macierzy M jest równy jej rzędowi wierszowemu.

Dowód

Niech $r_k = r, r_w = q$ macierzy M,
Niech wiersze o numerach $i_1, i_2, \ldots, i_q$ i kolumny o numerach $j_1, j_2, \ldots, j_r$ macierzy M będą liniowo niezależne. Wówczas:

1. Każdy wiersz tej macierzy jest kombinacją liniową wybranych wierszy o numerach $i_1, i_2, \cdots, i_q$.
2. Jeśli jakakolwiek kombinacja kolumn o wskaźnikach $j_1, j_2, \cdots, j_r$ równa się 0, to wszystkie współczynniki tej kombinacji są równe 0.

Rozpatrzmy układ równań

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2m}x_m = 0 \\ \qquad \ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases}$$

Dowód c.d.

Układ $(*)$ jest równoważny układowi:

$$(**)\begin{cases} a_{i_1 1}x_1 + \ldots + a_{i_1 m}x_m = 0 \\ a_{i_2 1}x_1 + \ldots + a_{i_2 m}x_m = 0 \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{i_q 1}x_1 + \ldots + a_{i_q m}x_m = 0 \end{cases}$$

Istotnie z (1) wynika, że każde równanie układu $(*)$ jest kombinacją liniową równań układu $(**)$, ponadto każde równanie układu $(**)$ jest równaniem układu $(*)$. Wobec tego zbiory rozwiązań układów $(*)$ i $(**)$ są identyczne.
Niech M_1 będzie macierzą współczynników układu $(**)$. Udowodnimy, że kolumny o numerach $j_1, j_2, \ldots, j_r$ macierzy M_1 są również liniowo niezależne.
Załóżmy, że kombinacja liniowa tych kolumn o współczynnikach $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_r}$ równa się 0.
Przyjmijmy $a_i = 0$ dla $i \notin \{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$. Wtedy $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ jest rozwiązaniem układu $(**)$, a zatem i układu $(*)$.

Dowód c.d.

Wynika stąd, że kombinacja liniowa kolumn o numerach $j_1, j_2, \ldots, j_r$ macierzy M o współczynnikach $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_r}$ równa się 0.
Stąd na mocy (2) : $a_{j_1} = a_{j_2} = \ldots = a_{j_r} = 0$.
A zatem kolumny o wskaźnikach $j_1, j_2, \cdots, j_r$ macierzy M_1 są też liniowo niezależne.
Stąd $r_k(M_1) = r$. Ponieważ M_1 ma q wierszy, więc $r_k(M_1) \leqslant q$, a zatem $q \geqslant r$. Zamieniając rolami wiersze i kolumny otrzymamy nierówność: $r \geqslant q$, a stąd $r = q$, co kończy dowód.

Definicja 12.3

Niech $A-$ macierz $(n \times m)$. Wspólną wartość rzędu kolumnowego i wierszowego macierzy A nazywamy rzędem macierzy A i oznaczamy $r(A)$.

Twierdzenie 12.4

Niech $A-$ macierz kwadratowa stopnia n. Wówczas:

$$\det A \neq 0 \iff r(A) = n.$$

Dowód

Zmiana kolejności wierszy lub kolumn oraz dodawanie jednego wiersza lub kolumny do innego wiersza lub kolumny pomnożonej przez skalar (element ciała) nie wpływa na rząd macierzy i może jedynie zmienić znak wyznacznika.

Wystarczy więc rozpatrzyć przypadek, gdy A jest macierzą diagonalną.

$$0 \neq \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \overset{\text{(def)}}{=} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \iff r(A) = n.$$

Twierdzenie 12.5

Niech M będzie $(n \times m)$ macierzą. Wówczas $r(M) = r \iff r$ jest największą taką liczbą całkowitą nieujemną, że po usunięciu pewnych $(n - r)$ wierszy i $(m - r)$ kolumn otrzymamy z macierzy M macierz stopnia r o wyznaczniku $\neq 0$.
Pozostawione kolumny i wiersze są w tym przypadku liniowo niezależne.

Dowód

Niech r będzie największym stopniem macierzy o różnym od zera wyznaczniku, którą można otrzymać z danej macierzy M skreślając pewne jej wiersze i kolumny. Wówczas $r(M) \geqslant 0$, gdyż na mocy twierdzenia 12.4 nieskreślone kolumny są liniowo niezależne. Z drugiej strony, z macierzy M można wybrać $r(M)$ wierszy liniowo niezależnych; odrzucając pozostałe otrzymamy macierz M' rzędu $r(M)$. Wobec tego można z macierzy M' wybrać $r(M)$ kolumn liniowo niezależnych; skreślając pozostałe otrzymamy macierz kwadratową M'' stopnia $r(M)$ i rzędu $r(M)$, a więc (na mocy twierdzenia 12.4) $\det M'' \neq 0$. Wynika stąd, że $r \geqslant r(M)$, co wobec wykazanej poprzednio nierówności $r \leqslant r(M)$ dowodzi równości $r = r(M)$.

Przykład

Jeśli $A-$ macierz $(m \times n)$, to $r(A) \leqslant \min(m, n)$.

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

  $r\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}\right) \leqslant 2$

  $\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = -6 \neq 0 \Rightarrow r\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}\right) = 2$

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

  $r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}\right) \leqslant 2$

  $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}\right) = 1 \vee r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}\right) = 0$

Definicja 12.6

Niech A macierz $n \times m$.
Przez $i-$ ty minor (Δ_i) macierzy A rozumiemy wyznacznik macierzy kwadratowej otrzymanej z macierzy A po usunięciu z niej ostatnich $(m-i)$ kolumn oraz ostatnich $(n-i)$ wierszy.

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = \det \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix} = a_{11},$$

$$\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\Delta_3 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \det A$$

Uwaga

Rząd macierzy nie ulegnie zmianie, jeśli wykonamy którąkolwiek z następujących operacji:

1. przestawienie wierszy macierzy
2. przestawienie kolumn macierzy
3. dodanie do jednego wiersza innego wiersza pomnożonego przez skalar
4. dodanie do jednej kolumny innej kolumny pomnożonej przez skalar
5. pomnożenie dowolnego wiersza przez skalar różny od 0
6. pomnożenie dowolnej kolumny przez skalar różny od 0

Wykład 13.

Definicja 13.1

Niech A będzie macierzą $(n \times m)$ o współczynnikach rzeczywistych $(\mathbb{R})$, zespolonych $(\mathbb{C})$ lub wymiernych $(\mathbb{Q})$.
Niech $x_1, x_2, \ldots, x_m$ oznaczają niewiadome, a $c_1, c_2, \ldots, c_n$ niech będą stałymi z ciała $(\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q})$. Wyrażenie postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = c_2 \\ \qquad \qquad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = c_n \end{cases}$$

można zapisać:

- macierzowo: $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Definicja 13.1 c.d.

- jako: $x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + x_m \begin{pmatrix} a_{m1} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$
- w postaci: $Ax = C$, gdzie A- macierz współczynników, x - wektor niewiadomych, C - macierz wyrazów wolnych

Przykład

1. $x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$
2. $2x + 3y = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$
3. $\begin{cases} 2x + 3y = 33 \\ 4x + 15y = 34 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \\ 34 \end{bmatrix}$

Definicja 13.2

Niech $Ax = C$ będzie układem równań o macierzy głównej $(n \times m)$. Zbiór:

$$\left\{(d_1, d_2, \cdots, d_m) \in \mathbb{K}^m \ : \ A\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix} = C\right\}$$

nazywamy zbiorem rozwiązań układu równań liniowych $Ax = C$.

Uwaga

Powyższy zbiór rozwiązań może być pusty. Mówimy wtedy, że układ równań $Ax = C$ jest sprzeczny.

Twierdzenie 13.3 (Tw. Kroneckera-Capellego)

Układ równań $Ax = C$ ma rozwiązanie $\iff$ rząd macierzy A jest taki sam jak rząd macierzy uzupełnionej $A_u = A_C$ - macierz A z dodatkową kolumną C.

Dowód

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ oznaczają wektory-kolumny macierzy A i niech C będzie wektorem - ostatnią kolumną macierzy A_u. Układ $Ax = C$ można zapisać jako równanie wektorowe:

$$(*) \quad x_1\alpha_1 + \ldots x_n\alpha_n = C$$

Elementy $d_1, \ldots, d_n$ ciała $\mathbb{K}$ są rozwiązaniem równania wektorowego $(*)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C \in (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, tj. gdy przestrzenie $V = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, C)$ i $V_1 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \subset V$ są identyczne. Równość $V = V_1$ jest równoważna równości wymiarów $\dim(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, C) = \dim(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, a więc równości $r(A) = r(A_u)$, co kończy dowód.

Uwaga

Niech A będzie macierzą kwadratową $n \times n$. Układ równań $Ax = C$ ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(A_u) = n$.

Dowód

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ oznaczają wektory-kolumny kwadratowej macierzy A i niech C będzie wektorem - ostatnią kolumną macierzy A_u.
Równość $r(A) = r(A_u) = n$ jest równoważna liniowej niezależności wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ oraz równości $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, C) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, a więc jest równoważna stwierdzeniu: C można jednoznacznie przedstawić jako kombinację liniową wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Ta ostatnia własność jest oczywiście równoważna istnieniu dokładnie jednego rozwiązania układu wektorowego $x_1\alpha_1 + \ldots x_n\alpha_n = C$, a więc i układu $Ax = C$.

Twierdzenie 13.4 (Cramera)

Niech dany będzie układ równań liniowych:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = c_n \end{cases},$$

gdzie a_{ij}, c_i *są elementami ciała* $\mathbb{K}$ *(np.* $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$*) dla* $i, j = 1, \ldots, n$*.*
Niech A *będzie macierzą główną tego układu i niech* A_i *będzie, dla* $i = 1, \ldots, n$*, macierzą powstałą przez zastąpienie w macierzy* A $i-$ *tej kolumny, kolumną wyrazów wolnych* C*. Jeśli* $r(A) = n$ *to* $\det A \neq 0$ *i jedynym rozwiązaniem powyższego układu jest:*

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

dla $i = 1, \ldots, n$*.*

Dowód

Jeśli $r(A) = n$, to dany układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie i $\det A \neq 0$ na mocy twierdzenia 12.4. Pozostaje więc udowodnić, że układ $\frac{\det A_1}{\det A}, \ldots, \frac{\det A_n}{\det A}$ jest w tym przypadku rozwiązaniem, a więc że:

$$a_{i1}\frac{\det A_1}{\det A} + \ldots + a_{in}\frac{\det A_n}{\det A} = c_i,$$

dla $i = 1, \ldots, n$.
Z twierdzenia 10.2 (Laplace'a dla kolumn) wynika, że
$\det A_j = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l+j} c_l \det A_{lj}$ dla $j = 1, \ldots, n$, a wobec tego:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \det A_j = \sum_{j,l=1}^{n} a_{ij}(-1)^{l+j} c_l \det A_{lj} =$$
$$= \sum_{l=1}^{n} c_l \left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{l+j} a_{ij} \det A_{lj} \right) = c_i \det A,$$

na mocy wniosku po twierdzeniu 10.2 (Laplace'a dla kolumn).

Dowód c.d.

Wobec tego:

$$\sum a_{ij}\frac{\det A_j}{\det A} = c_i,$$

dla $i = 1, \ldots, n$, co należało udowodnić.

Przypomnienie

Przypomnijmy twierdzenie Cramera: $Ax = C$

$A-$ macierz $n \times n$

rząd n, $\det A \neq 0$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

dla $i = 1, \cdots, n$ gdzie A_i- macierz powstała z macierzy A przez zastąpienie kolumny i kolumną C.

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \left| \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{matrix} \right|_{k4-5k3} = \left| \begin{matrix} 1 & 2 & -11 \\ 2 & 1 & -11 \\ 1 & 2 & 0 \end{matrix} \right|_{k2-2k1} =$$

$$\left| \begin{matrix} 1 & 0 & -11 \\ 2 & -3 & -11 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} 0 & -11 \\ -3 & -11 \end{matrix} \right| = -33 \neq 0$$

Ponieważ $\det A \neq 0$, więc założenia tw. Cramera są spełnione.

Przyład c.d.

Rozwiązaniem układu: $A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

będą: $x_1 = \frac{\det A_1}{-33}, x_2 = \frac{\det A_2}{-33}, x_3 = \frac{\det A_3}{-33}, x_4 = \frac{\det A_4}{-33}$.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozważanie

Niech $Ax = B$, gdzie $A-$ macierz $n \times m$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

Zakładamy, że $\underbrace{r(A) = r(A|B)}_{\text{założenie z tw. Kroneckera-Capellego jest spełnione}}$,

gdzie $A|B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{bmatrix}$

$r(A) = k \leqslant \min(m, n)$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} = det(A_k) \neq 0 \Rightarrow r(A) = k$$

Rozważanie c.d.

Tutaj A_k jest macierzą, którą uzyskujemy z macierzy A zmieniając kolejność wierszy tak, by $k-$ pierwszych wierszy było liniowo niezależnych. Następnie zmieniając kolejność niewiadomych dostajemy, że $k-$ pierwszych kolumn macierzy A jest liniowo niezależne. Mamy więc:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & \cdots & a_{km} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}$$

(Pozostałe równania można pominąć, bo nie są liniowo niezależne)

Zatem układ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nk}x_k + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

Rozważanie c.d.

jest równoważny układowi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k = b_1 - a_{1k+1}x_{k+1} - \ldots - a_{1m}x_m \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k = b_2 - a_{2k+1}x_{k+1} - \ldots - a_{2m}x_m \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kk}x_k = b_k - a_{kk+1}x_{k+1} - \ldots - a_{km}x_m \end{cases}$$

Powyższy układ równań ma kwadratową macierz główną o wyznaczniku różnym od 0.

Teraz skorzystamy z tw. Cramera.

Niewiadome o indeksach: $k+1, k+2, \cdots, m$ traktujemy jako parametry.

Dla $j = 1, \ldots, k$

$$x_j = \frac{\det \overline{A_j}}{\det A} = \frac{\det \overline{A_j}\Big(b - x_{k+1}a_{k+1} - x_{k+2}a_{k+2} - \ldots - x_m a_m\Big)}{\det A}$$

gdzie $\overline{A_j}-$ macierz powstała z macierzy $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{bmatrix}$

Rozważanie c.d.

poprzez zamienę kolumny $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{kj} \end{bmatrix}$ kolumną wyrazów wolnych

$$\begin{bmatrix} b_1 - a_{1k+1}x_{k+1} - \ldots - a_{1m}x_m \\ b_2 - a_{2k+1}x_{k+1} - \ldots - a_{2m}x_m \\ \vdots \\ b_k - a_{kk+1}x_{k+1} - \ldots - a_{km}x_m \end{bmatrix}.$$

Korzystając z własności wyznacznika mamy dla $j = 1, \ldots, k$:

$$x_j = \det \frac{\overline{A_j}(b - x_{k+1}a_{k+1} - \ldots - x_m a_m)}{\det A} =$$

$$= \frac{\det \overline{A_j}(b)}{\det A} - \frac{\det \overline{A_j}(a_{k+1})}{\det A} x_{k+1} - \ldots - \frac{\det \overline{A_j}(a_m)}{\det A} x_m$$

Wniosek:

Jeżeli wyjściowy układ równań jest niesprzeczny (tzn. spełnione jest tw. Kroneckera-Capellego) i jego rząd jest mniejszy od liczby niewiadomych m, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Przykład

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 = 1 \\ \quad x_1 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 2 \\ \quad x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 3 \end{cases}$$

Liczymy rząd: $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} = -2 \neq 0$$

Przykład c.d.

$$r(A) = r\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}\right) = 3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 - 4x_4 + x_5 \\ x_1 + 5x_3 = 2 + 2x_4 - 2x_5 \\ x_2 - 3x_3 = 3 - x_4 + 3x_5 \end{cases},$$

$x_4, x_5 -$ parametry.
Rozwiązaniem powyższego układ jest:

$$\begin{cases} x_1 = 28 - \frac{21}{2}x_4 - 12x_5 \\ x_2 = 21 + 2x_4 + 9x_5 \\ x_3 = 6 + \frac{5}{2}x_4 + 2x_5 \end{cases}$$

Zatem ma on nieskończenie wiele rozwiązań.

Stwierdzenie 14.1

Jeśli rząd macierzy A jest równy k, to wymiar obrazu homomorfizmu A jest równy k, tzn.

$$\dim imA = k$$

Dowód

Wszystkie liniowo niezależne kolumny definiują liniowo niezależne elementy obrazu A.

Stwierdzenie 14.2

$$\dim imA = r(A)$$

Podsumowanie

Niech: $Ax = B$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

1. Tw. Kroneckera-Capellego: $r(A) = r(A|B) \iff Ax = B$ ma rozwiązanie
2. $n = m \wedge \det A \neq 0 \Rightarrow$ tw. Cramera
3. $\dim \mathrm{im} A = r(A)$

$A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

$\mathrm{im} A = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists_{x \in \mathbb{R}^m}\ Ax = y\}$

W sposób oczywisty $\mathrm{im} A$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^n$, tzn. $\mathrm{im} A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Podsumowanie c.d.

1. Aby zacząć rozwiązywać równanie $Ax = B$ musimy mieć spełnione założenia tw. Kroneckera-Capellego, czyli $r(A|B) = r(A)$
2. Pokazaliśmy, że $\dim \mathrm{im} A = r(A)$ (tw. 14.1 i 14.2)
$\mathrm{im} A = \mathrm{gen}\{Ae_1, Ae_2, \cdots, Ae_m\} = \mathrm{gen}\{$ kolumny macierzy $A\}$.
$\mathbb{R}^m \ni e_i = (0, 0, \cdots, 0, \underbrace{1}_{i-\text{te miejsce}}, 0, \cdots, 0)$

Uzasadnienie

$\subseteq \forall_{y \in \mathrm{im} A \subset \mathbb{R}^n} \Rightarrow \exists_{x \in \mathbb{R}^m}\ Ax = y$

$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_m e_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i$

$A(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i A(e_i) \in \mathrm{gen}\{Ae_1, Ae_2, \cdots, Ae_m\}$

Podsumowanie c.d.

Wykorzystamy teraz fakt, że $Ae_i = i$ -ta kolumna macierzy A.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n-11} & \dots & a_{n-1i} & \dots & a_{n-1m} \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{n-1i} \\ a_{ni} \end{bmatrix}$$

$e_i = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$

$\mathrm{gen}\{Ae_1, Ae_2, \cdots, Ae_m\} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{ \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_i Ae_i \mid \forall_{1 \leqslant i \leqslant m}\ \beta_i \in \mathbb{R} \right\}$

Weźmy element z z $\mathrm{gen}\{Ae_1, Ae_2, \cdots, Ae_m\}$ tzn. $z = \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_i Ae_i$ dla pewnych $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m \in \mathbb{R}$

$z = \sum\limits_{i=1}^{m} A(\beta_i e_i) = A\left(\sum\limits_{i=1}^{m} \beta_i e_i \right)$

Podsumowanie c.d.

A to oznacza, że $z \in \mathrm{im}A$, bo $z = Ax$, gdzie $x = \sum_{i=1}^{m} \beta_i e_i$

$\mathrm{im}A = \mathrm{gen}\{\text{kolumny macierzy } A\}$

$\dim \mathrm{im}A = \dim \left(\mathrm{gen}\{\text{klumny} \quad \text{macierzy} A\}\right)$

$\dim \mathrm{im}A = r(A)$.

Definicja 14.3

Układ równań postaci: $Ax = 0$ nazywamy układem jednorodnym gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} - \text{dowolna macierz } (n \times m),\ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} -$$

macierz niewiadomych, $0 \in \mathbb{R}^n$.

Uwaga

Ponieważ zawsze $r(A) = r(A|0)$, więc układy jednorodne nie są nigdy sprzeczne i mają zawsze rozwiązanie.
Dowolne rozwiązania układu jednorodnego $Ax = 0$ jest równoważne opisaniu jądra homomorfizmu A.
$\ker A = \{x \in \mathbb{R}^m \mid Ax = 0\}$

Wniosek

Zbiór rozwiązań układu jednorodnego jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^m$.
$\ker A \subset \mathbb{R}^m$
$r(A) = k \leqslant \min(m, n)$

Wykład 15.

Wprowadzenie

Równania jednorodne: $Ax = 0$

Jak się szuka rozwiązań równania jednorodnego?

$$Ax = 0$$

$$A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

1. Równanie jednorodne zawsze spełnia tw. Kroneckera-Capellego
2. Szukanie rozwiązań równania jednorodnego to szukanie jądra homomorfizmu liniowego $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

$\ker A = \{y \in \mathbb{R}^m \mid Ay = 0\}$ - zbiór wszystkich rozwiązań układu jednorodnego.

Ponieważ $\ker A \subset \mathbb{R}^m$ - podprzestrzeń liniowa, więc jej opisanie to np. znalezienie bazy.

Wprowadzenie c.d.

Jak to się robi?

$A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

$\dim \mathrm{im} A = r(A)$

Niech $k = \dim \ker A$. Ponadto z tw. o izomorfizmie mamy, że:

$m - k = \dim \mathrm{im} A = r(A)$.

Zatem $k = m - r(A)$

$\mathbb{R}^m/_{\ker A} \cong \mathrm{im} A$

Szukanie rozwiązań

Układ równań jednorodnych $Ax = 0$ ma zawsze rozwiązanie zerowe.

$A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

Jeśli $n = m$ i $\det A \neq 0$, to rozwiązanie jest tylko zerowe.

Wybierzmy $r(A)$ liniowo niezależnych wierszy macierzy A.

Szukanie rozwiązań c.d.

Załóżmy, że kolumny o numerach $1, 2, \cdots, r(A)$ są liniowo niezależne. Niech $l = r(A)$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = 0 \\ \ldots \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \ldots + a_{lm}x_m = 0 \end{cases}$$

Ponieważ rząd kolumnowy jest równy rzędowi wierszowemu, możemy założyć (np. przenumerowując niewiadome), że $l-$ pierwszych kolumn jest także liniowo niezależne.

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1l}x_l + a_{1l+1}x_{l+1} + \ldots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2l}x_l + a_{2l+1}x_{l+1} + \ldots + a_{2m}x_m = 0 \\ \ldots \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \ldots + a_{ll}x_l + a_{ll+1}x_{l+1} + \ldots + a_{lm}x_m = 0 \end{cases}$$

Szukanie rozwiązań c.d.

1. Jeśli $l = m$, to istnieje tylko rozwiązanie zerowe.
2. $l < m$

Z postaci równania $(*)$ traktujemy niewiadome $x_l, x_{l+1}, \ldots, x_m$ jako parametry i konstruujemy bazę ker A w następujący sposób:

- Podstawiamy za parametry kolejno:

$$\begin{array}{cccc} x_{l+1}, & x_{l+2} & \ldots & x_m \\ \hline 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0, & 0, & \ldots & 1 \end{array}$$

W ten sposób definiujemy bazę jądra ker A, złożoną z $(m - l)$ liniowo niezależnych wektorów.

Szukanie rozwiązań c.d.

Do każdego układu zer i jedynek obliczamy $x_1, x_2, \ldots, x_l$.
W konsekwencji otrzymujemy $m - l$ liniowo niezależnych rozwiązań.
Dla układu $x_{l+1} = 1, x_{l+2} = 0, \ldots, x_m = 0$ niewiadome $x_1, x_2, \ldots, x_l$ obliczamy z układu:

$$(**)\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1l}x_l + a_{1l+1}x_{l+1} = 0 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2l}x_l + a_{2l+1}x_{l+1} = 0 \\ \qquad\qquad\ldots \\ a_{l1}x_1 + \ldots + a_{ll}x_l + a_{ll+1}x_{l+1} = 0 \end{cases}$$

Układ $(**)$ powstał z układu $(*)$. Jest to układ Cramera i niewiadome $x_1, x_2, \ldots, x_l$ znajdujemy ze wzorów Cramera.

Przykład

$A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 15x_1 + 12x_2 + 9x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$r(A) = 2, m - 2 = 3 = \dim\{\text{przestrzeni rozwiązań}\}$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

x_3,	x_4	x_5
1,	0,	0
0,	1,	0
0,	0,	1

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = -3 \\ 6x_1 + 2x_2 = -3 \end{cases}$$

Przykład c.d.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{6}{-14} = -\frac{3}{7}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{3}{-14} = -\frac{3}{14}$$

Odp.1. : $(-\frac{3}{7}, -\frac{3}{14}, 1, 0, 0)$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = -2 \\ 6x_1 + 2x_2 = -2 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{4}{-14} = -\frac{2}{7}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{2}{-14} = -\frac{1}{7}$$

Odp.2. : $(-\frac{2}{7}, -\frac{1}{7}, 0, 1, 0)$

Przykład c.d.

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = -1 \\ 6x_1 + 2x_2 = -1 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{2}{-14} = -\frac{1}{7}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{1}{-14} = -\frac{1}{14}$$

Odp.3. : $(-\frac{1}{7}, -\frac{1}{14}, 0, 0, 1)$

Rozwiązanie:

$$\left(-\frac{3}{7}, -\frac{3}{14}, 1, 0, 0\right), \left(-\frac{2}{7}, -\frac{1}{7}, 0, 1, 0\right), \left(-\frac{1}{7}, -\frac{1}{14}, 0, 0, 1\right)$$

Uwaga

$Ax = B$ - układ równań liniowych

$A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$

Rozwiązanie układu równań:

$$ZR = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix} \} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^m \mid Ax = B \bigg\}$$

Rozważmy $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

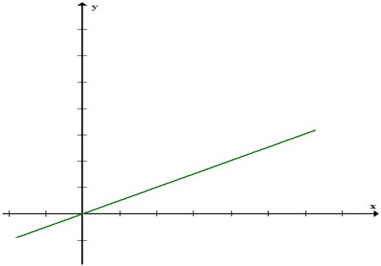
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Uwaga c.d.

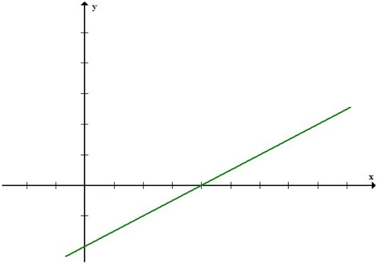
Jeśli:

- $\det A \neq 0$ - istnieje dokładnie jedno rozwiązanie
- $\det A = 0$ - tw. Kroneckera-Capellego

$r(A) = 0$ - nie ma o czym mówić
Pozostaje przypadek $r(A) = 1$.
Jeśli $r(A) = 1$ i spełnione są założenia tw. Kroneckera-Capellego, to równanie $Ax = B$ jest równoważne równaniu $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$. Stąd zbiór rozwiązań jest prostą.



Rysunek: Rozwiązanie układu jednorodnego



Rysunek: Rozwiązanie układu jednorodnego przesuniętego o wektor

Twierdzenie 16.1

Niech:

$$(*) \quad Ax = B$$

będzie liniowym układem równań z macierzą główną A o $n-$ wierszach i $m-$ kolumnach oraz wyrazach wolnych B. Załóżmy, że $r(A) = r(A|B)$. Wtedy zbiór rozwiązań (ZR) układu $(*)$ ma postać:

$$d + D \subset \mathbb{R}^m,$$

gdzie

- *d jest szczególnym rozwiązaniem układu $(*)$ (tzn. $Ad = B$)*
- *$D = \ker A$ (tzn. jest rozwiązaniem układu jednorodnego)*

Rozwiązanie $(*)$ jest więc zbiorem postaci:

$$d + D \stackrel{def}{=} \{d + x \in \mathbb{R}^m \mid x \in D\}.$$

Dowód

$ZR = d + D$, gdzie $D = \{x \in \mathbb{R}^m \mid Ax = 0\}$.
" $\supset$ " Niech: $d + D \ni x = d + c$, gdzie $c \in D$. Wtedy:

$$Ax = A(d + c) = Ad + Ac = B + 0 = B.$$

" $\subset$ " Niech:
$x \in ZR \Rightarrow Ax = B$
$Ad = B$ - ponieważ d jest szczególnym rozwiązaniem.

- Jeżeli $x = d$, to:
  (pierwszy przypadek)$\det A \neq 0$
  i $\ker A = D = \{0\} \Rightarrow x = d + 0 = d + D$.
- Możliwy jest także (drugi przypadek) $x \neq d$, to:
  $A(x - d) = Ax - Ad = 0$. Oznacza to, że $x - d \in D$. Stąd:
  $\exists_{z \in D}\ x - d = z \Rightarrow x = d + z \in d + D$.

Przykład

Niech:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 5$$

1. Rozwiązanie szczególne $(5, 0, \cdots, 0)$
2. $\{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\} = D$
3. $ZR = (5, 0, \cdots, 0) + D$

Definicja 16.2

Układem schodkowym nazywamy układ równań liniowych postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{kk}x_k + \ldots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

Obserwacja

1. Każdy układ równań można sprowadzić poprzez operacje elementarne do postaci schodkowej
2. Jeżeli wykonując operacje elementarne na wierszach macierzy $[A|\mathrm{I}]$, uzyskamy macierz $[\mathrm{I}|B]$, to $B = A^{-1}$,

gdzie:

$$[A|I] = \left[\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \right],$$

$$[I|B] = \left[\begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \right]$$

Przykład

1.

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+4z=2 \\ 2x+3y+3z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ y+3z=1 \\ y+z=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ y+3z=1 \\ -2z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=1 \\ y=-2 \\ x=2 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y+z=1 \\ 4x+3y-z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ -y+3z=-1 \\ -y+3z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ -y+3z=-1 \\ 0=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Sprzeczność

Uwaga

Niech: $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

$$r(A) = \dim \mathrm{im} A,$$

bo obraz jest generowany przez kolumny macierzy A.
Niech $\dim \ker A = l$. Wtedy:

$$m - l = r(A)$$
$$l = m - r(A)$$

Definicja 16.3

Niech V - przestrzeń liniowa wymiaru n, $V_1 \subset V$ - podprzestrzeń liniowa. V_1 definiuje następującą relację równoważności $\sim$ na przestrzeni V :

$$\forall_{v,w \in V} \; v \sim w \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} v - w \in V_1.$$

Uwaga

Relacja $\sim$ z definicji 16.3, jako relacja równoważności, jest:

- zwrotna: $v \sim v$
  $v - v \in V_1$
- symetryczna: $v \sim w \Rightarrow w \sim v$
  $v - w \in V_1 \Rightarrow -(v - w) = w - v \in V_1$
- przechodnia: $v \sim w \wedge w \sim t \Rightarrow v \sim t$
  $v - w \in V_1 \wedge w - t \in V_1 \Rightarrow (v - w) - \Big(- (w - t)\Big) = v - t \in V_1$

Stwierdzenie 16.4

Zbiór klas abstrakcji relacji $\sim$ definiuje przestrzeń ilorazową $V/_{V_1}$.

Uwaga

Klasę abstrakcji elementu $v \in V$ będziemy oznaczać przez $[v]$.

Ćwiczenie

Pokazać, że:

1. $[v] = v + V_1 = \{v + x \mid x \in V_1\}$
2. $[x], [y] \in V/_{V_1} \Rightarrow [x] + [y] = [x + y]$
3. $[0] \in V/_{V_1}$
4. $\forall_{\lambda \in \mathbb{R}}\ \lambda[x] = [\lambda x]$

Wykład 17.

Przypomnienie

Niech: $V-$ przestrzeń wymiaru n nad dowolnym ciałem $\mathbb{K}, W \subset V-$ podprzestrzeń przestrzeni V.
Określmy relację równoważności $\sim$. Dla $v_1, v_2 \in V v_1 \sim v_2 \iff v_1 - v_2 \in W$. Relacja ta jest:

- zwrotna: $\forall_{v \in V}\ v \sim v$
- symetryczna: $\forall_{v_1, v_2 \in V}\ v_1 \sim v_2 \Rightarrow v_2 \sim v_1$
- przechodnia: $\forall_{v_1, v_2, v_3 \in V}\ v_1 \sim v_2 \wedge v_2 \sim v_3 \Rightarrow v_1 \sim v_3$

Relacja równoważności $\sim$ dzieli V na klasy abstrakcji.
Klasą abstrakcji elementu $v \in V$ definiujemy jako $[v] = \{v' \in V \mid v' \sim v\}$.
Zbiór klas abstrakcji elementów z V oznaczamy $V/_W$.

Struktura przestrzeni liniowej

Na zbiór klas abstrakcji wprowadzamy strukturę przestrzeni liniowej. Przestrzeń $V/_W$ definiujemy jako zbiór klas abstrakcji przestrzeni V.
Wprowadzamy działania:

- $\forall_{[v_1],[v_2]\in V/_W}\ [v_1]+[v_2]=[v_1+v_2]$
- $\forall_{[v]\in V/_W}\forall_{\lambda\in\mathbb{K}}\ \lambda[v]=[\lambda v]$

Możemy pokazać, że powyższa definicja nie zależy od wyboru reprezentantów.

$[v_1]=\{v_1+w \mid w\in W\}$
$[v_2]=\{v_2+w \mid w\in W\}$
$[v_1+v_2]=[(v_1+v_2)+W]$

Pokażemy, że:

$$\begin{cases} v_1'\sim v_1 \\ v_2'\sim v_2 \end{cases} \Rightarrow (v_1'+v_2')\sim(v_1+v_2)$$

Struktura przestrzeni liniowej c.d.

Wiemy, że:
$v_1' \sim v_1 \iff v_1' - v_1 \in W$
$v_2' \sim v_2 \iff v_2' - v_2 \in W$
Ponieważ W jest podprzestrzenią liniową, więc:
$(v_1' - v_1) + (v_2' - v_2) \in W$
$(v_1' + v_2') = (v_1 + v_2) \iff (v_1 + v_2) \sim (v_1' + v_2')$.
Otrzymujemy stąd wniosek, że $V/_W$ jest zbiorem z działaniem dodawania, które jest łączne i przemienne.
Pokażemy teraz, że drugie działanie z definicji, mnożenie przez skalar, nie zależy od wyboru reprezentanta v.
Weźmy $[v'] \in V$ taki, że $[v'] = [v] \Rightarrow v - v' \in W$.
Musimy udowodnić, że $\lambda[v'] = [\lambda v'] = \lambda[v]$.
Ponieważ W jest podprzestrzenią liniową, więc
$\lambda(v - v') = (\lambda v - \lambda v') \in W$
Zatem $\lambda v \sim \lambda v'$, stąd $\lambda v = \lambda v'$.
Warto zauważyć też, że $[0] \in V/_W$.

Twierdzenie 17.1

Niech $V-$ przestrzeń liniowa, $W \subset V-$ podprzestrzeń. Zbiór klas abstrakcji $V/_W$ jest przestrzenią linową z działaniem indukowanym z V takim, że:

- $\forall_{v_1,v_2\in V}\ [v_1]+[v_2]=[v_1]+[v_2]$
- $\forall_{v\in V}\forall_{\lambda\in\mathbb{K}}\ \lambda[v]=[\lambda v]$

Przykłady

- $V=\mathbb{R}^2, W=\{\emptyset\}$
  $V/_W=V$, bo $(v_1+0)+(v_2+0)=(v_1+v_2)+0$
- $V=\mathbb{R}^2, W=\mathbb{R}^2$
  $V/_W=\{\emptyset\}-$ zerowa przestrzeń
  Uzasadnienie:
  W tym przypadku $V/_W$ jest zbiorem jednoelementowym, tzn.
  $\forall_{v_1,v_2\in V}\ v_1\sim v_2 \iff (v_1-v_2)\in W$
  $\forall_{v\in V}\ 0+v=v+v \iff [0]=[v]$

Przykłady c.d.

- $V = \mathbb{R}^2, W = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$
  $V/_W = \{v + x \mid x \in W\}$
  Udowodnimy, że $\dim_{\mathbb{R}} V/_W = 1$.
  Pokażemy, że bazą $V/_W$ jest dowolna klasa abstrakcji:
  $[v] \in V/_W, v \ni W$.
  W tym celu wyznaczmy dowolną klasę abstrakcji:
  $\forall_{(x,y)\in V} \; \exists_{\lambda\in\mathbb{R}} \; [(x,y)] = \lambda[(-1,1)] \iff (x,y) - \lambda(-1,1) \in W \Rightarrow$
  $\exists_{\lambda\in\mathbb{R}} \; (x+\lambda, y-\lambda) = (z,0)$
  $[(-1,1)] \in V/_W$ i jest bazą.
  $\begin{cases} x + \lambda = z \\ y = \lambda \end{cases}$
  $(x,y) - y(-1,1) = (x+y,0) \in W$
  Pokazaliśmy, że $\forall_{x,y\in V} \; [(x,y)] = [(-y,y)] = y[(-1,1)]$
  Zatem $V/_W$ jest przestrzenią liniową wymiaru 1 o bazie $[(-1,1)]$.

Twierdzenie 17.2

Niech V będzie $n-$ wymiarową przestrzenią liniową, a $W \subset V$ jej $k-$ wymiarową podprzestrzenią $(0 \leqslant k \leqslant n)$. Wówczas:

$$\dim V/_W = n - k.$$

Dowód

Niech $f_1, f_2, \ldots, f_k-$ baza przestrzeni W. Z tw. 4.3 (Steinitza) wiemy, że istnieje baza przestrzeni V postaci: $f_1, f_2, \ldots, f_k, f_{k+1}, \ldots, f_n$. Udowodnimy, że układ wektorów: $[f_{k+1}], [f_{k+2}], \ldots, [f_n]$ jest bazą przestrzeni $V/_W$. Do pokazania mamy, że układ wektorów $[f_{k+1}], [f_{k+2}], \ldots, [f_n]$:

1. jest liniowo niezależny
2. generuje $V/_W$

Dowód c.d.

1. Liniowa niezależność:
$\alpha_1[f_{k+1}] + \ldots + \alpha_{n-k}[f_n] = 0 \iff [\alpha_1 f_{k+1} + \ldots + \alpha_{n-k} f_n] = 0 \iff$ $\alpha_1 f_{k+1} + \ldots + \alpha_{n-k} f_n \in W$. Z definicji każdy wektor z W jest kombinacjja liniową wektorów $f_1, f_2, \ldots, f_k$. Stąd:
$\alpha_1 f_{k+1} + \ldots + \alpha_{n-k} f_n = \beta_1 f_1 + \ldots + \beta_k f_k$. Mamy
$\alpha_1 f_{k+1} + \ldots + \alpha_{n-k} f_n - \beta_1 f_1 - \ldots - \beta_k f_k = 0$.
Ponieważ układ $f_1, \ldots, f_k, f_{k+1}, \ldots, f_n$ jest bazą V, więc jest liniowo niezależny, stąd $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-k} = 0$.

Dowód c.d.

2. Pokazujemy, że $[f_{k+1}], [f_{k+2}], \ldots, [f_n]$ generuje $V/_W$
   $\forall_{[x] \in V/_W}\ x = \underbrace{\gamma_1 f_1 + \ldots + \gamma_k f_k}_{\in W} + \gamma_{k+1} f_{k+1} + \ldots + \gamma_n f_n$
   Z def. $\sim$ mamy: $x \sim \gamma_{k+1} f_{k+1} + \ldots + \gamma_n f_n$,
   czyli $\left(x - \sum_{i=k+1}^{n} \gamma_i f_i\right) \in W$
   Stąd: $[x] = [\gamma_{k+1} f_{k+1} + \ldots + \gamma_n f_n] = \gamma_{k+1}[f_{k+1}] + \ldots + \gamma_n [f_n]$.
   Stąd $\dim V/_W = n - k$.

Twierdzenie 17.3 (o izomorfizmie)

Niech $A : V_1 \to V_2$ *- homomorfizm przestrzeni liniowych wymiarów m i n odpowiednio. Wówczas* ${}^{V_1}/_{\ker A}$ *jest izomorficzne z* $im\ A$, *tzn.*

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[rr, "A"] \arrow[dr, "\sigma"'] & & im\ A \subset V_2 \\
& V_1/\ker A \arrow[ur, "\overline{A}"'] &
\end{tikzcd}$$

$${}^{V_1}/_{\ker A} \simeq im\ A$$

Dowód

Zauważmy, że odwzorowanie $\sigma : V_1 \to {}^{V_1}/_{\ker A}$ zdefiniowane wzorem:

$$\forall_{v \in V} \; v \to [v]$$

jest homomorfizmem przestrzeni liniowych.
Udowodnimy, że

$${}^{V_1}/_{\ker A} \xrightarrow{\overline{A}} im\ A \subset V$$

jest izomorfizmem zdefiniowanym następująco.
Niech: $\forall_{[x] \in {}^{V_1}/_{\ker A}} \; \overline{A}([x]) \overset{def}{=} A(x)$.
Musimy pokazać, że $\overline{A}$ jest dobrze zdefiniowane, tzn. jeżeli $[x] = [x']$, to $\overline{A}([x]) = \overline{A}([x'])$, czyli $A(x) = A(x')$.
Ale:
$x - x' \in \ker A \iff A(x - x') = 0$
$Ax - Ax' = 0$
$Ax = Ax'$

Wprowadźmy teraz lemat:

Lemat

$f : V \to W$ jest izomorfizmem przestrzeni liniowych
$\iff \ker f = 0, \mathrm{im}\ f = W$

Dowód lematu

" $\Rightarrow$ " $f-$ "na", stąd $\mathrm{im}\ f = W$
$f-$ izomorfizm $\Rightarrow f(x) = f(x') \Rightarrow x = x' \Rightarrow \ker f = 0$
" $\Leftarrow$ " Zakładamy, że $\ker f = 0$ i $\mathrm{im}\ f = W \Rightarrow f$ jest epimorfizmem ("na").
$f-$ różnowartościowa, stąd $f(x) = f(x') \Rightarrow x - x' \in \ker f \Rightarrow x = x'$

Dowód tw.c.d.

Z definicji $\overline{A}$ jest "na" i $\ker(\overline{A}) = 0$. Stąd i z lematu $\overline{A}$ jest izomorfizmem. Co kończy dowód.

Wykład 18.

Przypomnienie

Niech: $A : V \to W$ - homomorfizm skończenie wymiarowych przestrzeni liniowych.
$\ker A = \{x \in V \mid Ax = 0\} \subseteq V$ - podprzestrzeń liniowa V.
Niech $\dim V = n, \dim \ker A = k$.
Ponieważ $\ker A$ jest podprzestrzenią liniową V, więc $k \leqslant n$.
Zdefiniowaliśmy przestrzeń ilorazową ${}^{V}/_{\ker A}$. Pokazaliśmy, że:

$$\dim {}^{V}/_{\ker A} = n - k.$$

${}^{V}/_{\ker A} = \{x + \ker A \mid x \in V\}$ - zbiór warstw
$(x + \ker A) + (y + \ker A) = (x + y) + \ker A$
$\lambda(x + \ker A) = \lambda x + \ker A$
${}^{V}/_{\ker A} \simeq \mathrm{im} A$

Definicja 18.1

Niech $A : V \to V$ będzie homomorfizmem przestrzeni liniowych. Wartością własną $\lambda \in \mathbb{K}$ $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ homomorfizmu A nazywamy skalar λ, dla którego istnieje element $0 \neq v \in V$, taki że:

$$A(v) = \lambda v$$

Definicja 18.2

Powyżej zdefiniowany niezerowy wektor $v \in V$ nazywamy wektorem własnym wartości własnej λ.

Przykład

1. Niech $A : (\mathbb{R}, 1 \to \mathbb{R}, a$ homomorfizm liniowy.
   Istnieje dokładnie jedna wartość własna homomorfizmu A.
   $A = [a] \iff A(1) = a$
   $\forall_{x \in \mathbb{R}}\ A(x) = A(x \cdot 1) = xA(1) = xa$
   Stąd tylko a jest wartością własną A.
2. Niech $\lambda \in \mathbb{K}$ będzie wartością własną A, zatem:
   $\exists_{0 \neq x \in V}\ A(x) = \lambda x$
   $Ax = \lambda x \iff Ax - \lambda x = 0 \iff (A - \lambda \mathrm{I})x = 0$

Definicja 18.3

Wielomianem charakterystycznym homomorfizmu $A : V \to V$ nazywamy wielomian $p(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I})$.

Uwaga

W powyższej definicji oznaczamy przez A zarówno homomorfizm jak i jego macierz w pewnej bazie $e_1, e_2, \ldots, e_n$.
Okazuje się, że jeśli macierz przedstawimy w dowolnej innej bazie, (np. $f_1, f_2, \ldots, f_n$), to wielomian charakterystyczny $p(\lambda)$ będzie taki sam.
$A-$ macierz A w bazie $e_1, e_2, \ldots, e_n$.
$C-$ macierz przejścia z bazy $e_1, e_2, \ldots, e_n$ do bazy $f_1, f_2, \ldots, f_n$.
$CAC^{-1}-$ macierz A w bazie $f_1, f_2, \ldots, f_n$.
Z jednej strony:

$$\det A = \det(CAC^{-1}) = \det C \det A \det C^{-1} = \\ = \det A \det C \det C^{-1} = \det A \det \mathrm{I} = \det A.$$

Z drugiej:

$$\det(A - \lambda \mathrm{I}) = 1 \det(A - \lambda \mathrm{I}) = \det \mathrm{I} \det(A - \lambda \mathrm{I}) = \\ = \det(CC^{-1}) \det(A - \lambda \mathrm{I}) = \det C \det C^{-1} \det(A - \lambda \mathrm{I}) = (*)$$

Uwaga c.d.

Korzystając ze wzoru Cauchy'ego: $\det(AB) = \det A \det B$
Zatem:

$$(*) = \det C \det(A - \lambda \mathrm{I}) \det C^{-1} = \det \Big(C(A - \lambda \mathrm{I}) \Big) \det C^{-1} = \det \Big(C(A - \lambda \mathrm{I}) C^{-1} \Big) = \det(CAC^{-1} - \lambda \mathrm{I})$$

$$A - \lambda \mathrm{I} = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda \mathrm{I} = 0 \iff Ax = \lambda x$$
$$\det(A - \lambda \mathrm{I}) = p(\lambda)$$
$$\deg p(\lambda) = n$$

Przykłady

1. $[a] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $\det[a - \lambda] = 0 \iff a - \lambda = 0 \iff \lambda = a$
2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
   $\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix} = 0 \iff (1-\lambda)(4-\lambda) - 6 = 0 \iff$
   $4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 6 = 0 \iff \lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$
   $\Delta = 25 + 8 = 33$
   $\sqrt{\Delta} = \sqrt{33}$
   $\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}$
   $\lambda_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$
   $A_1 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{5-\sqrt{33}}{2} & 2 \\ 3 & 4 - \frac{5-\sqrt{33}}{2} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{5+\sqrt{33}}{2} & 2 \\ 3 & 4 - \frac{5+\sqrt{33}}{2} \end{bmatrix}$
   $r(A_1) = 1$
   $r(A_2) = 1$

Przykłady c.d.

$$\dim\begin{pmatrix}\text{wektory}\\ \text{własne}\\ \text{wartości}\\ \text{własnej } \lambda_1\end{pmatrix} = 1 \quad \dim\begin{pmatrix}\text{wektory}\\ \text{własne}\\ \text{wartości}\\ \text{własnej } \lambda_2\end{pmatrix} = 1$$

$0 \neq x_1 \in \ker A_1$

$0 \neq x_2 \in \ker A_2$

Pokażemy, że x_1, x_2 tworzą bazę $\mathbb{R}^2$. W tym celu udowodnimy, że x_1 i x_2 są liniowo niezależne.

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0 \quad / A$

$\alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 = 0$

Skoro: $Ax_1 = \lambda_1 x_1, Ax_2 = \lambda_2 x_2$, to:

$\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 = 0$

$A_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$A_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$A_1 x_1 = 0$

$A_1 x_2 = 0 \iff Ax_2 = \lambda_1 x_2$

Musimy pokazać, że $A_1 x_2 \neq 0$.

Lemat

$A_1 x_2 \neq 0$

Dowód lematu

Przypuśćmy, że $A_1 x_2 = 0 \iff Ax_2 = \lambda_1 x_2 \iff x_2 = (A - \lambda_1 \mathrm{I})x_2 = 1$

$$\begin{array}{l} Ax_2 = \lambda_2 x_2 \\ Ax_2 = \lambda_1 x_2 \end{array} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \text{ - sprzeczność}$$

Podsumowanie

Macierz A w bazie x_1, x_2 :

$$\begin{array}{l} Ax_1 = \lambda_1 x_1 \\ Ax_2 = \lambda_2 x_2 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Uwaga

Szukanie pierwiastków (miejsc zerowych) wielomianu charakterystycznego nie jest banalne.

Przykład

$y_1 = x_1 + 2x_2$
$y_2 = -x_1 + x_2$

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 3$$

$\Delta < 0$

Wykład 19.

Wprowadzenie

Niech $A : V \to V$ endomorfizm przestrzeni liniowej V, takiej że $\dim V < \infty$.
Macierz A w pewnej dowolnej bazie jest kwadratowa. Wartość własna endomorfizmu A jest to pierwiastek wielomianu charakterystycznego $p(\lambda)$ macierzy, gdzie $p(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I})$.
Pokazaliśmy, że $p(\lambda)$ nie zależy od wyboru bazy do przedstawienia macierzy A, co mówiąc inaczej oznacza, że $p(\lambda)$ jest związany tylko z endomorfizmem $A : V \to V$.
Wektorem własnym wartości własnej λ_0 ($p(\lambda_0) = 0$) nazywamy element przestrzeni rozwiązań układu równań jednorodnych: $(A - \lambda_0 \mathrm{I})X = 0$.
Układ ten ma zawsze rozwiązanie, bo $\det(A - \lambda_0 \mathrm{I}) = 0$.

Uwaga

- endomorfizm - homomorfizm z tej samej przestrzeni w siebie
- monomorfizm - homomorfizm różnowartościowy ("$1-1$")
- epimorfizm - homomorfizm będący surjekcją ("na")
- izomorfizm - homomorfizm "$1-1$" i "na"

Twierdzenie 19.1

Niech: $A : V \to V$, $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$.
Niezerowe wektory własne $w_1, w_2, \ldots, w_m$ *endomorfizmu* A *mające różne wartości własne są liniowo niezależne.*

Dowód

Niech:

$$(*) \quad \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_m w_m = 0.$$

Wówczas $\forall_i \ \alpha_i = 0$,

$$\underbrace{w_i}_{\text{wektor własny}} \longleftrightarrow \underbrace{\lambda_i}_{\text{wartość własna}} \iff w_i \in V_{(\lambda_i)}$$

Niech $i = 1$. Wówczas:

$Aw_1 = \lambda_1 w_1 \iff (A - \lambda_1 \mathrm{I})w_1 = 0$

$(A - \lambda_1 \mathrm{I})(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_m w_m) = 0$

$\alpha_1(A - \lambda_1 \mathrm{I})w_1 + \alpha_2(A - \lambda_1 \mathrm{I})w_2 + \ldots + \alpha_m(A - \lambda_1 \mathrm{I})w_m = 0$

Skoro $(A - \lambda_1 \mathrm{I})w_1 = 0$, to $\alpha_2(Aw_2 - \lambda_1 w_2) + \ldots + \alpha_m(Aw_m - \lambda_1 w_m) = 0$

Stąd:

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)w_2 + \ldots + \alpha_m(\lambda_m - \lambda_1)w_m = 0$$

Ponieważ wartości własne są różne, to ostatnie równanie jest krótszą kombinacją liniową $(*)$.

Definicja 19.2

Zbiór $\{v \in V \mid Av = \lambda_0 v\} = \ker(A - \lambda_0 I)$ nazywamy podprzestrzenią własną wartości własnej λ_0 i oznaczamy $V_{(\lambda_0)} \in V$.

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)-4 = 3-4\lambda+\lambda^2-4 = \lambda^2-4\lambda-1$$

Liczymy pierwiastki:

$$\Delta = 16 + 4 = 20, \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{5}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{4-2\sqrt{5}}{2} = 2 - \sqrt{5} \\ \lambda_2 = \frac{4+2\sqrt{5}}{2} = 2 + \sqrt{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{wartości własne } A$$

Przykład c.d.

$\lambda_1 = 2 + \sqrt{5}$

$$V(2+\sqrt{5}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (2+\sqrt{5})(x,y)\}$$

$$\begin{cases} x + 2y = (2+\sqrt{5})x \\ 2x + 3y = (2+\sqrt{5})y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-1-\sqrt{5})x + 2y = 0 \\ 2x + (1-\sqrt{5})y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})x \\ 2x + \frac{3}{2}x + \frac{3\sqrt{5}}{2}x - (2+\sqrt{5})(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\det \begin{bmatrix} -1-\sqrt{5} & 2 \\ 2 & 1-\sqrt{5} \end{bmatrix} = 4 - 4 = 0$$

$V_{(2+\sqrt{5})} = \alpha(1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})$ - prosta o równaniu $(-1-\sqrt{5})x + 2y = 0$

Przykład c.d.

$\lambda_2 = 2 - \sqrt{5}$

$V_{(2-\sqrt{5})} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (2-\sqrt{5})(x,y)\}$

$$\begin{cases} x + 2y = (2-\sqrt{5})x \\ 2x + 3y = (2-\sqrt{5})y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-1+\sqrt{5})x + 2y = 0 \\ 2x + (1+\sqrt{5})y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})x \\ 2x + \frac{3}{2}x - \frac{3\sqrt{5}}{2}x - (2-\sqrt{5})(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\det \begin{bmatrix} -1+\sqrt{5} & 2 \\ 2 & 1+\sqrt{5} \end{bmatrix} = 4 - 4 = 0$$

$V_{(2-\sqrt{5})} = \alpha(1, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})$ - prosta o równaniu $(-1+\sqrt{5})x + 2y = 0$

Przykład c.d.

Jak wygląda endomorfizm $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ w bazie $(1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}), (1, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})$?

$A(1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}) = (2 - \sqrt{5})(1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})$

$A(1, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}) = (2 + \sqrt{5})(1, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})$

Endomorfizm A w tej bazie ma postać:

$$\begin{bmatrix} 2 + \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2 - \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$A : V \to V$

$\det(A - \lambda \mathrm{I}) = p(\lambda)$ - wielomian charakterystyczny

Jeżeli działamy w ciele liczb zespolonych, to nasz wielomian rozkłada się na iloczyn wielomianów liniowych ($\mathbb{C}$ jest algebraicznie domknięte, tzn. każdy wielomian ma pierwiastek).

W $\mathbb{R}$ nie każdy wielomian ma pierwiastek.

Kilka prostych obserwacji

Niec $f : V \to V$ będzie odwzorowaniem liniowym, skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V o rzeczywistej macierzy kwadratowej A. Załóżmy że, wielomian charakterystyczny: $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I})$ ma stopień n.
Niech wszystkie jego pierwiastki są różne i niezerowe. Oznaczmy je przez $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.
Wówczas układ niezerowych wektorów własnych $w_i \in V_{(\lambda_i)}$ jest bazą n wymiarowej przestrzeni V.
Macierz A w bazie $w_1, w_2, \ldots, w_n$ jest diagonalna i ma postać:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 19.3

Niech $A : V \to V, \dim_{\mathbb{R}} V = n$. *Wówczas istnieje jedno- lub dwuwymiarowa podprzestrzeń* $V_1 \subset V$, *taka że* $A(V_1) \subseteq V_1$.
(Innymi słowy istnieje podprzestrzeń $V_1 \subset V$, *taka że* $A(V_1) \subseteq V_1$ *i* $\dim V_1 = 1$ *lub* 2*).*

Dowód

Niech $p_A(\lambda)$ wielomian charakterystyczny macierzy A.

1. $p_A(\lambda)$ ma pierwiastek rzeczywisty
   Niech to będzie λ_1, czyli $p_A(\lambda_1) = 0$. Z definicji istnieje
   $w \neq 0, w \in V_{(\lambda_1)}$.
   $Aw = \lambda_1 w$.
   W tym przypadku szukana $V_1 = \mathrm{gen}\{w\}$.

Dowód c.d.

2. $p_A(\lambda)$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.
   Każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych jest iloczynem wielomianów liniowych lub kwadratowych.
   λ_0 - pierwiastek $p_A(\lambda) \Rightarrow (\lambda - \lambda_0) | p_A(\lambda)$ (tw. Bezout).
   Jeśli $p_A(\lambda_0) = 0$, to $p_A(\overline{\lambda_0}) = 0$
   $(\lambda - \overline{\lambda_0})(\lambda - \lambda_0) = \lambda^2 - (\overline{\lambda_0} - \lambda_0)\lambda + \overline{\lambda_0}\lambda_0$ - dwumian kwadratowy
   Niech $\lambda^0 = \alpha + \beta i$ pierwiastek zespolony $p_A(\lambda)$
   (tzn. $p_A(\lambda^0) = 0$), zaś $A = [a_{ij}]$. Wtedy:
   $$\begin{cases} (a_{11} - \lambda^0)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda^0)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{n,n-1}x_{n-1} + (a_{nn} - \lambda^0)x_n = 0 \end{cases}.$$

Dowód c.d.

Niech $(\xi_1^0 + \eta_1^0 i, \ldots, \xi_n^0 + \eta_n^0 i)$ będzie rozwiązaniem powyższego jednorodnego układu równań.

$$A \begin{bmatrix} \xi_1^0 + \eta_1^0 i \\ \vdots \\ \xi_n^0 + \eta_n^0 i \end{bmatrix} = (\alpha + \beta i) \begin{bmatrix} \xi_1^0 + \eta_1^0 i \\ \vdots \\ \xi_n^0 + \eta_n^0 i \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} \xi_1^0 \\ \vdots \\ \xi_n^0 \end{bmatrix} + iA \begin{bmatrix} \eta_1^0 \\ \vdots \\ \eta_n^0 \end{bmatrix} =$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} \xi_1^0 \\ \vdots \\ \xi_n^0 \end{bmatrix} + \alpha i \begin{bmatrix} \eta_1^0 \\ \vdots \\ \eta_n^0 \end{bmatrix} + \beta i \begin{bmatrix} \xi_1^0 \\ \vdots \\ \xi_n^0 \end{bmatrix} - \beta \begin{bmatrix} \eta_1^0 \\ \vdots \\ \eta_n^0 \end{bmatrix}.$$

Dowód c.d.

Porównujemy część urojoną i rzeczywistą

$$A\begin{bmatrix}\xi_1^0\\ \vdots\\ \xi_n^0\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}\xi_1^0\\ \vdots\\ \xi_n^0\end{bmatrix}-\beta\begin{bmatrix}\eta_1^0\\ \vdots\\ \eta_n^0\end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix}\eta_1^0\\ \vdots\\ \eta_n^0\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}\eta_1^0\\ \vdots\\ \eta_n^0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}\xi_1^0\\ \vdots\\ \xi_n^0\end{bmatrix}$$

$V_1=\mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix}\xi_1^0\\ \vdots\\ \xi_n^0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\eta_1^0\\ \vdots\\ \eta_n^0\end{bmatrix}\right\}$. Ponadto $\dim V_1 \leqslant 2$.

Twierdzenie 19.4

Niech V – n– wymiarowa przestrzeń liniowa nad $\mathbb{R}$, zaś $A : V \to V$. Wówczas istnieje $W \subset V$ taka, że $A(W) = W$ i $\dim W \leqslant 2$.

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 2 & -\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{bmatrix}_{w_2 - w_1} =$$

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 2+\lambda & -\lambda-2 & 0 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (*)$$

Przykład c.d.

Rozwijamy względem drugiego wiersza:

$$(-1)^{1+2}(2+\lambda)\det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{bmatrix} +$$

$$(-1)^{2+2}(-\lambda-2)\det\begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (-2-\lambda)(6-2\lambda-1) + (-2-\lambda)(-3\lambda+\lambda^2-1) =$$

$$= (-2-\lambda)(5-2\lambda-3\lambda+\lambda^2-1) =$$

$$= (-2-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+4) =$$

$$= -2\lambda^2+10\lambda-8-\lambda^3+5\lambda^2-4\lambda = -\lambda^3+3\lambda^2+6\lambda-8 =$$

$$= (\lambda+2)(\lambda-4)(\lambda-1)$$

$p(\lambda)=0 \iff \lambda=-2 \vee \lambda=4 \vee \lambda=1$

Wartości własne: $-2, 1, 4$

Przykład c.d.

Szukamy wektorów własnych.

- $\lambda = -2$
$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{cases} 2x + 2y - z = 0 \\ 2x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$
Wektor własny dla wartości własnej $\lambda = -2$, *to* $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Przykład c.d.

- $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 1 \\ 2x - y = 1 \\ z = \frac{1}{2}(x + y) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2y - 1 \\ 4y - 2 - y = 1 \\ z = \frac{1}{2}(x + y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

Wektor własny dla wartości własnej $\lambda = 1$, *to* $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Przykład c.d.

- $\lambda = 4$

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -4x + 2y - z = 0 \\ 2x - 4y - z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -4x + 2y \\ z = 2x - 4y \\ z = -x - y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4x + 2y = 2x - 4y \\ z = -x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x = 1 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

Wektor własny dla wartości własnej $\lambda = 4$, *to* $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Przykład c.d.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = -2 - 1 - 1 - 2 = -6$$

$v_1 = [1, -1, 0]$, $v_2 = [1, 1, 1]$, $v_3 = [1, 1, -2]$

$Av_1 = -2v_1$

$Av_2 = v_2$

$Av_3 = 4v_3$

W bazie v_1, v_2, v_3 nasza macierz ma postać: $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Wykład 20.

Twierdzenie 20.1

Jeżeli macierz A jest symetryczna, tzn. $A^T = A$ i rzeczywista ($\forall_{1\leqslant i,j\leqslant n}\ A_{ij} \in \mathbb{R}$), to wszystkie pierwiastki wielomianu charakterystycznego $p(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I})$ są rzeczywiste.

Dowód

Niech: $A = [A_{ij}], A_{ij} \in \mathbb{R}$
$1 \leqslant i,j \leqslant n$
$p_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$
Niech λ będzie pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego macierzy A.
Pokażemy, że:

$$\overline{\lambda} = \lambda.$$

$\det(A - \lambda \mathrm{I}) = 0$

Dowód c.d.

Oznacza to, że układ równań $\sum_k (A_{ik} - \lambda\delta_{ik})x_k = 0, \ i = 1, \dots, n$ ma niezerowe rozwiązanie

$$\iff (*) \begin{cases} (A_{11} - \lambda)x_1 + A_{12}x_2 + \ldots + A_{1n}x_n = 0 \\ A_{21}x_1 + (A_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + A_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ A_{n1}x_1 + A_{n2}x_2 + \ldots + (A_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases},$$

Natomiast: $\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$ to tzw. delta Kroneckera.

Ponieważ $p_A(\lambda) = 0$, więc $p_A(\overline{\lambda}) = 0$.

Niech $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ będzie niezerowym rozwiązaniem układu równań liniowych $(*)$.

Udowodnimy, że liczby $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})$ są rozwiązaniami układu równań:

$$\sum_k (A_{ik} - \overline{\lambda}\delta_{ik})\overline{x_k} = 0,$$

gdzie $i = 1, 2, \dots, n$.

Dowód c.d.

$$\begin{cases} (A_{11}-\overline{\lambda})\overline{x_1} + A_{12}\overline{x_2} + \ldots + A_{1n}\overline{x_n} = 0 \\ A_{21}\overline{x_1} + (A_{22}-\overline{\lambda})\overline{x_2} + \ldots + A_{2n}\overline{x_n} = 0 \\ \ldots \\ A_{n1}\overline{x_1} + A_{n2}\overline{x_2} + \ldots + (A_{nn}-\overline{\lambda})\overline{x_n} = 0 \end{cases}$$

Zatem:

$$\sum_k (A_{ik} - \overline{\lambda}\delta_{ik})\overline{x_k} = \sum_k (\overline{A_{ik}} - \overline{\lambda\delta_{ik}})\overline{x_k} = \overline{\sum_k (A_{ik} - \lambda\delta_{ik})x_k} = 0$$

Stąd i z definicji wartości własnej: $Ax = \lambda x$ i $A\overline{x} = \overline{\lambda}\overline{x}$ lub $\sum\limits_k A_{ik}x_k = \lambda x_i \ |\overline{x_i}$, $\sum\limits_k A_{ik}\overline{x_k} = \overline{\lambda}\overline{x_i} \ |x_i$

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + \ldots + A_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ A_{21}x_1 + \ldots + A_{2n}x_n = \lambda x_2 \\ \ldots \\ A_{n1}x_1 + \ldots + A_{nn}x_n = \lambda x_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_{11}\overline{x_1} + \ldots + A_{1n}\overline{x_n} = \overline{\lambda}\overline{x_1} \\ A_{21}\overline{x_1} + \ldots + A_{2n}\overline{x_n} = \overline{\lambda}\overline{x_2} \\ \ldots \\ A_{n1}\overline{x_1} + \ldots + A_{nn}\overline{x_n} = \overline{\lambda}\overline{x_n} \end{cases}$$

Dowód c.d.

Dla $i = 1, \ldots, n$

$$\sum_k A_{ik} x_k \overline{x_i} = \lambda |x_i|^2 i \sum_k A_{ik} \overline{x_k} x_i = \overline{\lambda} |x_i|^2$$

Stąd sumując "lewe strony"

$$\sum_{i,k} A_{ik} x_k \overline{x_i} = \sum_{i,k} A_{ik} \overline{x_k} x_i$$

i korzystając z faktu, że macierz jest symetryczna , $A_{ik} = A_{ki}$, oraz "$A_{ik} x_k \overline{x_i} = A_{ki} x_i \overline{x_k}$" dostajemy, że:
$\sum\limits_{i,k} A_{ik} x_k \overline{x_i} = \sum\limits_{i,k} A_{ik} \overline{x_k} x_i$
Stąd $\lambda \sum\limits_i |x_i|^2 \overset{\Downarrow}{=} \overline{\lambda} \sum\limits_i |x_i|^2$
$\lambda = \overline{\lambda}$ co należało pokazać.

Przykłady

Macierz Pauliego:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = B^2 = C^2 = \mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $\det(A - \lambda \mathrm{I}) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 1$

$\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$w_1 = [1, 1]$

$\lambda_2 = -1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$w_2 = [1, -1]$

Przykłady c.d.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [1,1] \in V_1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = [-1,1] = -1[1,-1] \in V_1$$

- $\det(B - \lambda \mathrm{I}) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - (-i)i = \lambda^2 - 1$

  $\lambda_{1/2} = \pm 1$

$$\begin{bmatrix} -1 & -i \\ i & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x - iy = 0 \\ ix - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = ix \\ -x - i(ix) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ y = ix \end{cases} \Rightarrow w_1 = [1, i]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Przykłady c.d.

$$\begin{cases} x - iy = 0 \\ ix + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -ix \\ x - i(-ix) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ y = -ix \end{cases} \Rightarrow w_2 = [1, -i]$$

- $\det(C - \lambda \mathrm{I}) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} = -(1-\lambda)(1+\lambda) = \lambda^2 - 1$

$\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$-2y = 0 \Rightarrow y = 0$

$w_1 = [1, 0]$

$\lambda_2 = -1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$2x = 0 \Rightarrow x = 0$

$w_2 = [0, 1]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [1, 0] \in V_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [0, -1] = -1[0, 1] \in V_3$$

Przykłady c.d.

- $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & \alpha & 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & \alpha & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)[(2-\lambda)(4-\lambda)-\alpha] =$$
$$= (3-\lambda)[\lambda^2 - 6\lambda + (8-\alpha)]$$

$\Delta = 36 - 32 + 4\alpha = 4 + 4\alpha = 4(1+\alpha)$
$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4(1+\alpha)} = 2\sqrt{1+\alpha}$
$\lambda_1 = 3$
$\lambda_2 = \frac{6-2\sqrt{1+\alpha}}{2} = 3 - \sqrt{1+\alpha}$
$\lambda_3 = \frac{6+2\sqrt{1+\alpha}}{2} = 3 + \sqrt{1+\alpha}$

Przykłady c.d.

Zbadajmy przypadek $\alpha = -1$. Wielomian charakterystyczny macierzy
$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$
to $(x-3)^3$. Niech $A' = (A - 3I)$. Mamy $(A')^2 \neq 0$ i $(A')^3 = 0$. Stąd ciąg wektorów $v = (0,1,0), A'(v), (A')^2(v)$ definiuje tzw. bazę cykliczną. Jest to najprostsza wersja rozkładu Jordana. Macierz Jordana ma postać
$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$

Przykłady c.d.

- $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\det(A - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1$$

$1 - \lambda^3 = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(1+\lambda+\lambda^2) = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{3}i$

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \lambda_3 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$A^3 = \mathrm{I}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{I}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{matrix} e_1 \longrightarrow e_3 \longrightarrow e_2 \longrightarrow e_1 \\ e_2 \longrightarrow e_1 \longrightarrow e_3 \longrightarrow e_2 \\ e_3 \longrightarrow e_2 \longrightarrow e_1 \longrightarrow e_3 \end{matrix}$$

Przykłady c.d.

- $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{array}{l} e_1 \to e_4 \to e_3 \to e_2 \to e_1 \\ e_2 \to e_1 \to e_4 \to e_3 \to e_2 \\ e_3 \to e_2 \to e_1 \to e_4 \to e_3 \\ e_4 \to e_3 \to e_2 \to e_1 \to e_4 \end{array}$

$A^4 = \mathrm{I}$

$$\det(A - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 1$$

$\lambda^4 - 1 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - i)(\lambda + i) = 0$

$\lambda_1 = 1, \quad V_{(1)} - 1-$ wymiarowa

$\lambda_2 = -1, \quad V_{(-1)} - 1-$ wymiarowa

$\lambda_3 = i, \quad V_{(i)} - 1-$ wymiarowa

$\lambda_4 = -i, \quad V_{(-i)} - 1-$ wymiarowa

Wykład 22.

Niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ będzie bazą przestrzeni V i niech $\varphi : V \to V$ będzie homomorfizmem liniowym. Łatwo zobaczyć, że macierz φ jest diagonalna wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\alpha_1, ..., \alpha_n$ są wektorami własnymi odwzorowania φ.

Definicja 22.1

Mówimy, że homomorfizm φ jest diagonalizowalny, jeśli istnieje baza przestrzeni V złożona z wektorów własnych homomorfizmu φ.

Stwierdzenie 22.2

Niech $a_1, ..., a_k$ będą różnymi wartościami własnymi homomorfizmu $\varphi : V \to V$. Dla każdego $i = 1, 2, ..., k$ niech $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, ..., \alpha_{im_i}$ będzie liniowo niezależnym układem wektorów w $V_{(a_i)}$. Wówczas układ

$$\alpha_{11}, \alpha_{12}, ..., \alpha_{1m_1}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, ..., \alpha_{2m_2}, ..., \alpha_{k1}, \alpha_{k2}, ..., \alpha_{km_k}$$

jest liniowo niezależny.

Lemat 22.3

Niech $a_1, a_2, ..., a_k$ będą różnymi wartościami własnymi. Niech $\beta_i \in V_{(a_i)}$, jeżeli $\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_k = 0$ to $\beta_i = 0, i = 1, 2, 3, ..., k$.

Dowód Lematu: (Patrz twierdzenie 19.1.)Indukcja po k. Dla $k = 1$ oczywiste. Załóżmy dla $k := k - 1$. Z założenia mamy dwie równości:

$$\varphi(\Sigma_{i=1}^{k}\beta_i) = \Sigma_{i=1}^{k} a_i\beta_i = 0$$

$$a_1(\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_k) = a_1\beta_1 + a_1\beta_2 + ... + a_1\beta_k = 0.$$

Po ich odjęciu otrzymujemy

$$(a_2 - a_1)\beta_2 + ... + (a_k - a_1)\beta_k = 0.$$

Stąd $(a_i - a_1)\beta_i \in V_{(a_i)}, i = 2, ..., k$. Z założenia indukcyjnego dla $i = 2, 3, ..., k, \beta_2 = \beta_3 = ... = \beta_k = 0$. Ponieważ $\Sigma_{i=1}^{k}\beta_i = 0$, więc $\beta_1 = 0$.

Kontynuujmy dowód Stwierdzenia. Napiszmy kombinacjęe liniową wektorów z przyrównaniem jej do zera:

$$a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + \ldots + a_{1m_1}\alpha_{1m_1} + a_{21}\alpha_{21} + \ldots + a_{k1}\alpha_{k1} + \ldots + a_{km_k}\alpha_{km_k} = 0$$

Stosują powyższy lemat dla $\beta_i = \Sigma_{j=1}^{m_i} a_{ij}\alpha_{ij}, i = 1, 2, \ldots, k$ i wykorzystując liniową niezależność wektorów $\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{im_i}$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$ otrzymujemy tezę dowodzonego Stwierdzenia.

Twierdzenie 22.4

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową i niech φ będzie homomorfizmem przestrzeni V. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_k$ będą wszystkimi różnymi, wartościami własnymi homomorfizmu φ. Wówczas:

- $\Sigma_{i=1}^{k} dim V_{(a_i)} \leqslant dim V$.
- *Homomorfizm φ jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedu, gdy zachodzi równość* $\Sigma_{i=1}^{k} dim V_{(a_i)} = dim V$.

Dowód: Z ostatniego lematu wektory

$$\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1m_1}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{2m_2}, \dots, \alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \dots, \alpha_{km_k} \tag{1}$$

są liniowo niezależne. Stąd $\Sigma_{i=1}^{k} \dim V_{(a_i)} = \Sigma_{i=1}^{k} m_i \leqslant \dim V$. Ponadto, jeśli $\Sigma_{i=1}^{k} \dim V_{(a_i)} = \dim V$, to układ wektorów (1) jast bazą składającą się z wektorów własnych i stąd φ jest diagonalizowalny.
Załóżmy teraz, że φ jest diagonalizowalny. To znaczy istnieje baza $\mathcal{A}$ złożona z wektorów własnych homomorfizmu φ. Niech $\mathcal{A}_i = \mathcal{A} \cap V_{(a_i)}$ oraz $\mid \mathcal{A}_i \mid = m_i$. Mamy $\Sigma_{i=1}^{k} m_i = \dim V$ oraz $\forall i, 1 \leqslant i \leqslant k, m_i \leqslant \dim V_{(a_i)}$.

$$\dim V = \Sigma_{i=1}^{k} m_i \leqslant \Sigma_{i=1}^{k} \dim V_{(a_i)} \leqslant \dim V.$$

Podsumowując $\Sigma_{i=1}^{k} \dim V_{(a_i)} = \dim V$.

Przykłady

1. $V = \mathbb{R}^2, \varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \varphi(x_1, x_2) = (2x_1 + 3x_2, 4x_1 + 3x_2)$ W bazie standardowej macierz $\varphi = A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. Wartości własne macierzy A to zbiór $\{6, -1\}$. Ponadto $\dim V_{(6)} = \dim V_{(-1)} = 1$. Przykładowa baza wektorów własnych to $[3, 4] \in V_{(6)}, [1, -1] \in V_{(-1)}$. Diagonalna macierz $\varphi = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

2. $\varphi(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$. W bazie standardowej macierz $\varphi = A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Wielomian charakterystyczny to $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$. φ nie ma rzeczywistych wartości własnych. Nie jest diagonalizowalny.

3. $\varphi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \varphi(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$. Wartości własne to $i, -i$. Ponadto $(-1, i) \in V_{(i)}, (1, i) \in V_{(-i)}$. $\dim V_{(i)} = \dim V(-i) = 1$. Macierz diagonalna $\varphi = A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$.

Przykłady

4. $\varphi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \varphi(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2)$. Macierz w bazie standardowej ma postac $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Wielomian charakterystyczny to $p(\lambda) = (\lambda - 1)^2$. Wymiar przestrzeni $V_{(1)}$ jest równy $1 \neq 2 = \dim \mathbb{C}^2$. zatem φ nie jest diagonalizowalny. Zakończmy ten wykład

Definicja 22.5

Macierz $A \in Mat_{n \times n}(K)$ nazywamy diagonalizowalną nad ciałem K, jeśli istnieje macierz odwracalna $C \in Mat_{n \times n}(K)$ (tzn. $\det C \neq 0$.) taka, że $C^{-1}AC$ jest macierzą diagonalną.

Łatwo zobaczyć że A diagonalizowalna wtedy i tylko, wtedy gdy odpowiadający jej homomorfizm jest diagonalizowalny.

Niech A oznacza $n \times n$ macierz zespoloną. Niech V oznacza przestrzeń liniową nad $\mathbb{C}$ wymiaru n.

Definicja 23.1

Podprzestrzeń liniową przestrzeni V nazywamy *cykliczną* o ile ma następującą postać $\operatorname{gen}\{v, (A-\lambda)v, ..., (A-\lambda)^{m-1}v\}$ i $(A-\lambda)^{m-1}v \neq 0$ i $(A-\lambda)^m v = 0$.

Ponieważ $A(A-\lambda)^k = (A-\lambda+\lambda)(A-\lambda)^k = (A-\lambda)^{k+1} + \lambda(A-\lambda)^k$, więc podprzestrzeń *cykliczna* jest A niezmiennicza. Ponadto mamy

Lemat 1

Generatory przestrzeni *cyklicznej* są liniowo niezależne.

Dowód:

Niech dla pewnego $r (r = 0, 1, ..., m-1)$

$$c_r(A-\lambda)^r v + ... + c_{m-1}(A-\lambda)^{m-1} v = 0$$

i $c_r \neq 0$, wówczas mnożąc obydwie strony równości przez $(A-\lambda)^{m-r-1}$ dostajemy równość

$$c_r(A-\lambda)^{m-1} v = 0.$$

Stąd $c_r = 0$ i mamy sprzeczność.

Lemat 2

Niech $V = H \oplus \text{gen}\{v, Av, ..., A^{m-1}v\}$ i $A^{m-1}v \neq 0$ oraz $A^m v = 0$. Załóżmy ponadto, że $A(H) \subset H$ i $A^m H = \{0\}$. Niech $h \in H$ i $v' = v + h$. Wówczas $V = H \oplus \text{gen}\{v', Av', ..., A^{m-1}v'\}$ i $A^{m-1}v' \neq 0$ oraz $A^m v' = 0$.

Dowód: Wystarczy zauważyć, że jeżeli liniowa kombinacja wektorów $v', Av', ..., A^{m-1}v'$ należy do H to ta sama liniowa kombinacja $v, Av, ..., A^{m-1}v$ należy także do H.

Twierdzenie 23.2

(Tw.Jordana o rozkładzie na klatki) Niech $V \neq 0$, będzie skończenie wymiarową przestrzenią nad ciałem liczb zespolonych i $A : V \to V$ odwzorowaniem liniowym. Wówczas V może być rozłożona na sumę prostą podprzestrzeni cyklicznych.

Dowód: Indukcja względem wymiaru przestrzeni V. Rozkład jest trywialny dla $\dim V = 1$. Przypuśćmy, że rozkład istnieje dla przestrzeni wymiaru $n-1$. Niech $\dim V =$ n. Rozważmy najpierw przypadek $\det A = 0$. Wtedy wymiar $\mathrm{Im} A$ jest $\leqslant (n-1)$. Niech F będzie $(n-1)$ wymiarową podprzestrzenią V zawierającą $\mathrm{Im} A$. Ponieważ $AF \subset \mathrm{Im} A \subset F$, więc z założenia indukcyjnego istnieje rozkład F na sumę prostą podprzestrzeni cyklicznych

$$M_j = \mathrm{gen}\{v_j, (A-\lambda_j)v_j, ..., (A-\lambda_j)^{m_j-1}v_j\}, 1 \leqslant j \leqslant k.$$

Indeksy są wybrane tak, że $\dim M_j \leqslant \dim M_{j+1}, 1 \leqslant j \leqslant k-1$.

Lemat 3

Niech

$$S = \{j \mid \lambda_j = 0\}$$

i $g \notin F$. Wówczas Ag ma postać

$$Ag = \sum_{j \in S} \alpha_j v_j + Ah, h \in F, \tag{2}$$

o ile $S \neq \emptyset$. Jeżeli $S = \emptyset$, to $Ag = Ah$.

Dowód:

Zauważmy, że $Ag \in \mathrm{Im} A \subset F$. Stąd Ag jest liniową kombinacją wektorów postaci $(A - \lambda_j)^q v_j, 0 \leqslant q \leqslant m_j - 1, 1 \leqslant j \leqslant k$. Dla $\lambda_j = 0$, wektory $Av_j, ..., A^{m-1} v_j$, są zawarte w $A(F)$. Jeżeli $\lambda_j \neq 0$, to z "rozpisania dwumianowego" wyrażenia $(A - \lambda_j)^{m_j} v_j = 0$ otrzymujemy, że v_j ma postać $\sum_{m=1}^{m_j} b_m A^m v_j$. Zatem wszystkie wektory $(A - \lambda_j)^q v_j$ należą do $A(F)$ i lemat jest udowodniony.

Niech $g_1 = g - h$, gdzie h zdefiniowane zostało powyżej w równaniu (2). Ponieważ $g \notin F$ i $h \in F$, wiec $g_1 \notin F$ oraz z (2)

$$Ag_1 = \sum_{j \in S} \alpha_j v_j. \tag{3}$$

W przypadku gdy $Ag_1 = 0$, $\text{gen}\{g_1\}$ jest *cykliczna* i $V = F \oplus \text{gen}\{g_1\}$. Załóżmy, więc, że $Ag_1 \neq 0$. Niech p oznacza największą liczbe całkowitą j w równaniu (3) dla której $\alpha_j \neq 0$.

Wówczas dla $\tilde{g} = (1/\alpha_p)g_1$

$$A\tilde{g} = v_p + \sum_{j \in S, j<p} \frac{\alpha_j}{\alpha_p} v_j. \tag{4}$$

Zdefiniujmy

$$H = \sum_{j \in S, j<p} \oplus M_j.$$

H jest A-niezmiennicza i ponadto z nierówności $\dim M_j \leqslant \dim M_p, j < p$ wynika że $A^{m_p}(H) = \{0\}$. Wykorzystując Lemat 2 dla $H \oplus M_p$ wraz z nierównością (4) dostajemy

$$H \oplus M_p = H \oplus \text{gen}\{A\tilde{g}, ..., A^{m_p}\tilde{g}\}.$$

Stąd

$$F = \sum_{j \neq p} \oplus M_j \oplus \mathrm{gen}\{A\tilde{g}, ..., A^{m_p}\tilde{g}\}.$$

Ponieważ $\tilde{g} \notin F$, więc

$$V = F \oplus \mathrm{gen}\{\tilde{g}\} = \sum_{j \neq p} \oplus M_j \oplus \mathrm{gen}\{\tilde{g}, A\tilde{g}, ..., A^{m_p}\tilde{g}\}.$$

To kończy dowód dla $\det A = 0$. W ogólnym przypadku, dla wartości własnej μ mamy $\det(A - \mu I) = 0$ i otrzymujemy szukany rozkład V.

Wykład 24.

Definicja 24.1

Niech V przestrzeń liniowa nad $\mathbb{R}$ (skończenie wymiarowa). Iloczynem skalarnym nazywamy odwzorowanie $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, które jest:

- symetryczne: $\forall_{x,y \in V} \; \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- dwuliniowe: $\forall_{x,y,z \in V} \; \forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}} \; \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$
- dodatnio określone: $\forall_{x \in V, x \neq 0} \; \langle x, x \rangle > 0$

Definicja 24.2

Przestrzenią euklidesową nazywamy parę $(V, \langle , \rangle)$, gdzie V to przestrzeń liniową nad $\mathbb{R}$, zaś $\langle , \rangle$ to iloczyn skalarny (czyli odwzorowanie symetryczne, dwuliniowe, dodatnio określone).

Przykłady

- $(\mathbb{R}^n, <, >)$
  $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
  $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$
  $< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
- $C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ciągła}\}$
  $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$
  $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$
  $< f, g >= \int_0^1 fg dx$

Definicja 24.3

Normę wektora $x \in V$ definiujemy jako: $||x|| = \sqrt{< x, x >}$.

Definicja 24.4

Niech $A \in Mat_{nxn}(\mathbb{R}^n)$. Śladem macierzy $A = [a_{ij}]$ nazywamy liczbę $tr(A) = \Sigma_1^n a_{ii}$.

Łatwo zobaczyć, że dla $A, B \in Mat_{nxn}(\mathbb{R}^n), tr(AB) = tr(BA)$ oraz $tr(A) = tr(A^T)$ gdzie A^T oznacza macierz transponowaną. Definiujemy iloczyn skalarny jak $< A, B >= tr(AB^T)$. Stąd możemy sformułować następujące

Stwierdzenie 24.5

Jeżeli $tr(AA^T + BB^T) = tr(AB + A^T B^T)$ *to* $A = B^T$.

Dowód

$0 \leqslant < A - B^T, A - B^T >=< A, A > - < A, B^T > - < B^T, A > + < B^T, B^T >= tr(AA^T) + tr(B^T B) - tr(AB) - tr(B^T A^T) = 0$. Stąd $A = B^T$.

Definicja 24.6

Niech X będzie dowolnym zbiorem. Funkcję $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ nazywamy metryką, o ile spełnia:

1. $\forall_{x,y\in X}\ d(x,y) = 0 \iff x = y$
2. $\forall_{x,y\in X}\ d(x,y) = d(y,x)$
3. $\forall_{x,y,z\in X}\ d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$

Parę (X,d) nazywamy przestrzenią metryczną.

Przykłady

- $x, y, \in \mathbb{R}^n$

  $$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} = \sqrt{< x-y, x-y >}$$

- $X-$ dowolny zbiór

  $$\forall_{x,y\in X}\ d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \neq y \\ 0 & \text{gdy } x = y \end{cases}$$

Jest to metryka dyskretna.

Twierdzenie 24.7 (Nierówność Schwartza)

$\forall_{x,y \in V} \ \langle x, y \rangle \leqslant ||x||||y||$

Dowód

$\forall_{x,y \in V} \ \forall_{\lambda \in \mathbb{R}} \ \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle \geqslant 0$

$\langle x - \lambda y, x \rangle - \langle x - \lambda y, \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle - \lambda \langle y, x \rangle - \lambda \langle x - \lambda y, y \rangle =$

$\langle x, x \rangle - \lambda \langle x, y \rangle - \lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle = \lambda^2 \langle y, y \rangle - 2\lambda \langle x, y \rangle + \langle x, x \rangle \ \Delta \leqslant 0$

$\Delta = 4 \langle x, y \rangle^2 - 4 \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$

$4 \langle x, y \rangle^2 - 4 \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leqslant 0$

$4 \langle x, y \rangle^2 \leqslant 4 \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$

$\langle x, y \rangle^2 \leqslant \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$

$\langle x, y \rangle \leqslant \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} = ||x||||y||.$

Uwaga

Iloczyn skalarny definiuje metrykę na przestrzeni euklidesowej.
Metryka $d : V \times V \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ dana wzorem:
$d(x,y) = ||x-y|| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$, spełnia:

1. $\forall_{x,y\in V}\ d(x,y) = 0 \iff x = y$
2. $\forall_{x,y\in V}\ d(x,y) = d(y,x)$
3. $\forall_{x,y,z\in V}\ d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$

Dowód uwagi

ad. 1. $d(x,y) = 0 \iff x = y$
$||x-y|| = 0 \iff x = y$
$" \Leftarrow "\ x = y \Rightarrow ||x-y|| = ||x-x|| = 0$
$" \Rightarrow "\ ||x-y|| = 0 = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$
$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} = 0 \iff \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2 = 0 \Rightarrow x = y,$

Dowód uwagi c.d.

ad. 2. Udowodnijmy najpierw własność: $\forall_{x\in V}\ \forall_{\alpha\in R}\ ||\alpha x|| = |\alpha|||x||$.
Istotnie: $||\alpha x|| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x\rangle} = |\alpha|\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\alpha|||x||$.
Stąd możemy wykazać warunek 2.
$||x - y|| = ||(-1)(y - x)|| = |-1|||y - x|| = ||y - x||$.
ad. 3. Nierówność trójkąta
$d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$
$||x - y|| \leqslant ||x - z|| + ||z - y||$
Sformułujmy i udowodnijmy lemat:

Lemat

$\forall_{x,y\in V}\ ||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$

Dowód lematu

Skorzystamy z nierówności Schwartza:
$||x+y||^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle = ||x||^2 + 2\langle x,y\rangle + ||y||^2 \leqslant ||x||^2 + 2||x||||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2 \Rightarrow ||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y||.$

Dowód uwagi c.d.

Zatem: $||x-y|| = ||x-z+z-y|| \leqslant ||x-z|| + ||z-y||.$

Definicja 24.8

Niech V - przestrzeń euklidesowa z bazą $a_1, \dots, a_n$. Mówimy, że baza jest:

- ortonormalna, gdy $\langle a_i, a_j\rangle = \begin{cases} 0 & \text{gdy } i \neq j \\ 1 & \text{gdy } i = j \end{cases}$
- ortogonalna, gdy $\langle a_i, a_j\rangle = 0$ dla $i \neq j$

Definicja 24.9

Dwa wektory $a, b \in V$ są ortogonalne, gdy $\langle a, b\rangle = 0$.

Definicja 24.10

Niech $a, b \in V$. Wtedy:

$$\cos(\measuredangle(a, b)) = \frac{\langle a, b\rangle}{||a||||b||} \leqslant 1$$

Stwierdzenie 24.11

Niech $a_1, \ldots, a_n \in V$ wektory bazy ortogonalnej. Wtedy baza: $\frac{a_i}{||a_i||}$ jest ortonormalna.

Dowód

$\forall_{i,j} \left\langle \frac{a_i}{||a_i||}, \frac{a_j}{||a_j||} \right\rangle = \frac{1}{||a_i||||a_j||} \langle a_i, a_j\rangle = 0$, gdy $i \neq .j$

Gdy $i = j$, to: $\left\langle \frac{a_i}{||a_i||}, \frac{a_i}{||a_i||} \right\rangle = \frac{1}{||a_i||^2} \langle a_i, a_i\rangle = \frac{1}{\langle a_i, a_i\rangle} \langle a_i, a_i\rangle = 1.$

Stwierdzenie 24.12

Niech $a_1, \ldots, a_n \in V$ baza ortonormalna. Wtedy:

$$\forall_{x \in V}\ x = \langle x, a_1 \rangle a_1 + \ldots + \langle x, a_n \rangle a_n$$

Dowód

Niech $x = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n$
Wtedy:

$$\begin{gathered} \langle x, a_i \rangle = \langle \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n, a_i \rangle = \\ = \alpha_1 \langle a_1, a_i \rangle + \ldots + \alpha_i \langle a_i, a_i \rangle + \ldots + \alpha_n \langle a_n, a_i \rangle = \\ = \alpha_i \langle a_i, a_i \rangle = \alpha_i \end{gathered}$$

Twierdzenie 24.13 (Ortonormalizacja Grama-Schmidta)

Niech $\{v_1, \ldots, v_n|\}$ *- dowolna baza* V *zaś* $\{u_1, \ldots, u_n\}$ *- baza ortonormalna.*

$v_1' = v_1$

$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1'$

$v_3' = v_3 - \frac{\langle v_3, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1' - \frac{\langle v_3, v_2' \rangle}{\langle v_2', v_2' \rangle} v_2'$

$\ldots$

$v_n' = v_n - \frac{\langle v_n, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1' - \frac{\langle v_n, v_2' \rangle}{\langle v_2', v_2' \rangle} v_2' - \ldots - \frac{\langle v_n, v_{n-1}' \rangle}{\langle v_{n-1}', v_{n-1}' \rangle} v_{n-1}'$

W ten sposób uzyskujemy bazę ortogonalną.

Aby ją zortonormalizować, należy każdy, uzyskany w ortogonalizacji wektor, podzielić przez jego normę:

$u_1 = \frac{v_1'}{||v_1'||}, u_2 = \frac{v_2'}{||v_2'||}, \ldots, u_n = \frac{v_n'}{||v_n'||}$

Wektory $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *są ortonormalne.*

Dowód

Należy pokazać, że każdy wektor v_r' jest prostopadły do wektora u_i, dla $i = 1, \ldots, r-1$, tzn.

$$\langle v_r', u_i \rangle = 0.$$

Policzmy:

$$\langle v_r', u_i \rangle =$$

$$= \left\langle v_r - \frac{\langle v_r, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1' - \frac{\langle v_r, v_2' \rangle}{\langle v_2', v_2' \rangle} v_2' - \ldots - \frac{\langle v_r, v_{r-1}' \rangle}{\langle v_{r-1}', v_{r-1}' \rangle} v_{r-1}', u_i \right\rangle =$$

$$= \langle v_r, u_i \rangle - \langle v_r, u_i \rangle = 0$$

Ćwiczenie

1. Zortonormalizować bazę $\{(5,6),(3,5)\}$ w $\mathbb{R}^2$
2. Zortonormalizować bazę $\{(5,6,1),(3,5,1),(8,11,0)\}$ w $\mathbb{R}^3$.

Wykład 25.

Rozwiązanie ćwiczenia

Zortonormalizować bazę $\{(5,6),(3,5)\}$ w $\mathbb{R}^2$

$v_1' = (5,6)$

$v_2' = (3,5) - \frac{\langle(3,5),(5,6)\rangle}{\langle(5,6),(5,6)\rangle}(5,6) = (3,5) - \frac{15+30}{25+36}(5,6) =$

$= (3,5) - \frac{45}{61}(5,6) = (3,5) - (\frac{225}{61}, \frac{270}{61}) = (-\frac{42}{61}, \frac{35}{61}) = \frac{7}{61}(-6,5)$

$u_1 = \frac{(5,6)}{\sqrt{25+36}}$

$u_2 = \frac{\frac{7}{61}(-6,5)}{\frac{7}{61}\sqrt{36+25}} = \frac{(-6,5)}{\sqrt{61}}$

Zadanie domowe

Zortonormalizować bazę $\{(5,6,1),(3,5,1),(8,11,0)\}$ w $\mathbb{R}^3$.
Rozwiązanie przynieść na kartce.

Definicja 25.1

Niech $V-$ przestrzeń euklidesowa, $W \subset V$ podprzestrzeń liniowa, $e_1, \ldots, e_n-$ ortogonalna baza przestrzeni V. Podprzestrzeń liniową:

$$W^\perp = \{x \in V \mid \forall_{y \in W} \ \langle x, y \rangle = 0\}$$

nazywamy ortogonalnym dopełnieniem podprzestrzeni $W \subset V$ przestrzeni V.

Uwaga

$W^\perp$ jest podprzestrzenią liniową V.
$W^\perp = \{x \in V \mid \forall_{y \in W} \ \langle x, y \rangle = 0\}$
$\forall_{v_1, v_2 \in W} \ \forall_{\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}} \ \forall_{y \in W} \ \langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, y \rangle =$
$= \alpha_1 \langle v_1, y \rangle + \alpha_2 \langle v_2, y \rangle = 0 + 0 = 0$

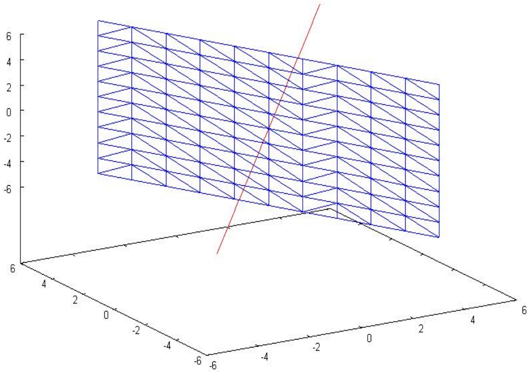
Przykład

$\underline{V = \mathbb{R}^3}$

Niech $W-$ dowolna prosta w $\mathbb{R}^3$ przechodząca przez $(0,0,0)$.

Czym jest $W^{\perp}$?

Jest to płaszczyzna prostopadła do prostej W.



Przykłady

$V = \mathbb{R}^2$

- $W = \{(0,0)\}$
  $W^{\perp} = \mathbb{R}^2$
- $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax\}$
  $W^{\perp} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -\frac{1}{a}x\}$
  $\left\langle (x, ax), (x, -\frac{1}{a}x) \right\rangle = x^2 - x^2 = 0$

Obserwacja

W $\mathbb{R}^2$ dowolna prosta jest dopełnieniem ortogonalnym innej prostej.

Stwierdzenie 25.2

Niech $(V, \langle , \rangle)$ *będzie przestrzenią euklidesową. Wówczas dowolna podprzestrzeń* $W \subset V$ *jest dopełnieniem ortogonalnym podprzestrzeni* $W^{\perp}$. *Wymiar* $W^{\perp}$ *jest równy* $\dim V - \dim W$, *tj.*

$$\dim W^{\perp} = \dim V - \dim W.$$

Dowód

Pokażemy, że $W^{\perp} \cap W = \{0\}$.
Niech $x \in W$ i $\forall_{y \in W} \ \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.
Niech $\{f_1, \ldots, f_k\}$ będzie bazą W.
Ze stwierdzenia o dopełnieniu dowolnej bazy podprzestrzeni do całej bazy, wynika stwierdzenie o wymiarach.

Uwaga

Niech

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

będzie równaniem dowolnej płaszczyzny w $\mathbb{R}^3$. Dokonując jej równoległego przesunięcia o D otrzymujemy płaszczyznę przechodzącą przez $(0, 0, 0)$. Jej równanie jest postaci:

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Stąd:

$$\begin{gathered}\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid Ax + By + Cz = 0\} = \\ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid < (x, y, z), (A, B, C) >= 0\} = \\ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) = t\overline{(A, B, C)}, t \in \mathbb{R}\}.\end{gathered}$$

Definicja 25.3

Niech V będzie dowolną przestrzenią liniową skończenie wymiarową nad ciałem $\mathbb{K}$. Niech V_1, V_2 będą podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni V. Mówimy, że V jest sumą prostą swoich podprzestrzeni V_1, V_2 wtedy i tylko wtedy, gdy:

1. $V = V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$
2. $V_1 \cap V_2 = \{0\}$

Piszemy: $V = V_1 \oplus V_2$.

Przykład

Niech $V-$ przestrzeń euklidesowa, $W \subset V$ podprzestrzeń. Wtedy:

$$W^{\perp} \oplus W = V.$$

$$W^{\perp} \cap W = \{0\}.$$

Lemat 25.4

$dim(V_1 + V_2) = dimV_1 + dimV_2 - dim(V_1 \cap V_2)$.

Dowód

$(V_1 \cap V_2)$ jest podprzestrzenią przestrzeni V_1 i V_2. Z Twierdzenia 4.3 (Steinitza) każdą bazę przestrzeni $V_1 \cap V_2$ można uzupełnić do baz przestrzeni V_1 i V_2. Stąd i z definicji wymiaru łatwo wynika nasz Lemat.

Definicja 25.5

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad $\mathbb{C}$. Iloczynem hermitowskim nazywamy odwzorowanie $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$, dane wzorem:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i},$$

które jest:

1. liniowe na pierwszej współrzędnej, tj.: $\forall_{x,y,z \in V} \forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{C}} \ \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$
2. $\forall_{x,y \in V} \ \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
3. $\forall_{x \in V} \ \langle x, x \rangle \geqslant 0.$

Parę $(V, \langle , \rangle)$ nazywamy przestrzenią hermitowską lub unitarną.

Przykład

$V = \mathbb{C}^n, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n, y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$

$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$

Wykład 26.

Definicja 26.1

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$. Odwzorowanie $a : V \times V \to \mathbb{K}$ nazywamy formą dwuliniową, jeśli jest:

- liniowa na każdej współrzędnej, tj.
  $\forall_{x,y,z\in V}\forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{K}}\ a(\alpha x + \beta y, z) = \alpha a(x, z) + \beta a(y, z)$
  $\forall_{x,y,z\in V}\forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{K}}\ a(z, \alpha x + \beta y) = \alpha a(z, x) + \beta a(z, y)$

Jeśli:

$$\forall_{x,y\in V}\ a(x, y) = a(y, x)$$

to formę tę nazywamy symetryczną.
Jeśli zaś:

$$\forall_{x,y\in V}\ a(x, y) = -a(y, x)$$

to formą tę nazywamy antysymetryczną.

Stwierdzenie 26.2

Każda forma kwadratowa nad ciałem $\mathbb{R}$ jest sumą formy symetrycznej i antysymetrycznej.

Dowód

$$a(x,y) = \frac{1}{2}\underbrace{\Big(a(x,y)+a(y,x)\Big)}_{\text{symetryczna}} + \frac{1}{2}\underbrace{\Big(a(x,y)-a(y,x)\Big)}_{\text{antysymetryczna}}$$

Definicja 26.3

Niech $a : V \times V \to \mathbb{K}$ forma dwuliniową, $(e_1, \ldots, e_n)$ - baza przestrzeni V. Macierz $A = [a(e_i, e_j)]_{i,j=1,\ldots,n}$ nazywamy macierzą formy dwuliniowej a.

Przykład

Każda macierz kwadratowa definiuje formę dwuliniową.

Postać

Każdą symetryczną formę dwuliniową można zapisać w postaci

$$a(x, y) = \sum_{i<k} a_{ik}(x_i y_k + x_k y_i) + \sum_{i} a_{ii} x_i y_i.$$

Natomiast forma antysymetryczna ma postać

$$a(x, y) = \sum_{i<k} a_{ik}(x_i y_k - x_k y_i).$$

Ćwiczenie

Definicja 26.4

Rzędem formy dwuliniowej nazywamy rząd jej macierzy.

Definicja 26.5

Niech $a : V \times V \to \mathbb{K}$ będzie formą kwadratową symetryczną. Odwzorowanie $x \mapsto a(x, x)$ nazywamy formą kwadratową formy a.

Przykład

$V = C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f - \text{ciągła}\}$
$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
$\alpha f(x) = \alpha(f(x))$
$\langle f, g \rangle = \int\limits_0^1 fgdx$

Obserwacja

$f(x) = a(x, x)$ - forma kwadratowa
$a(x, y) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2}[f(x+y) - f(x) - f(y)]$
$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n$
Macierz formy kwadratowej $\equiv$ macierz odpowiadającej jej formy symetrycznej
rząd macierzy kwadratowej $\equiv$ rząd macierzy odpowiadającej jej formy symetrycznej

Definicja 26.6

Jeżeli w pewnej bazie wszystkie współczynniki $a_{ik} = 0$ dla $i \neq k$, to mówimy, że w tej bazie forma kwadratowa ma postać kanoniczną:

$$f(x) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots a_{nn}x_n^2.$$

Sprowadzanie form kwadratowych do postaci kanonicznej metodą Lagrange'a

$f(x, y, z) = 2x^2 + 7y^2 + 2z^2 - 4xy - 10yz$

Przekształcamy sumę wszystkich składników zawierających x, za pomocą metody uzupełniania do pełnego kwadratu:

$2x^2 - 4xy = 2(x^2 - 2xy) = 2((x - y)^2 - y^2)$

Podstawiamy to wyrażenie do wyjściowej formy:

$f(x, y, z) = 7y^2 + 2z^2 - 10yz + 2(x - y)^2 - 2y^2 = 5y^2 + 2z^2 - 10yz + 2(x - y)^2$

Podobnie postępujemy teraz z y, z :

$5y^2 + 2z^2 - 10yz = 5(y^2 - 2yz + z^2) - 5z^2 + 2z^2 = 5(y - z)^2 - 3z^2 = 5(y - z)^2 - 3z^2$

Podstawiamy znów powyższą wartość do formy:

$f(x, y, z) = 5(y - z)^2 - 3z^2 + 2(x - y)^2$

Niech: $\begin{cases} x - y = x' \\ y - z = y' \\ z = z' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' + y' + z' \\ y = y' + z' \\ z = z' \end{cases}$

Zatem: $f(x, y, z) = 2x'^2 + 5y'^2 + z'^2$.

Uwaga

Powyższa metoda nie jest jednoznaczna, tzn. w przypadku innego grupowania, otrzymamy różne postaci kanoniczne tej samej formy kwadratowej. Jednak liczby dodatnich i ujemnych współczynników, stojących przy pełnych kwadratach, są w kadym przypadku jednakowe.

Twierdzenie 26.7 (Metoda Lagrange'a)

Każdą formę kwadratową można sprowadzić do postaci kanonicznej za pomocą niezdegenerowanego przekształcenia liniowego.
(niezdegenerowany $\equiv$ *o wyznaczniku* $\neq 0$*)*

Dowód

Indukcja po n.
Dla $n = 1$ oczywiste, bo forma kwadratowa jednej zmiennej ma postać ax_1^2, gdzie $a \in \mathbb{R}$.
1) $\exists_{1 \leqslant i \leqslant n}\ a_{ii} \neq 0$.
Bez starty ogólności (przenumerowując bazę) możemy przyjąć, że $i = 1$.

Dowód c.d.

Wtedy:
$f(x) = a(x,x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + g(x_2, \ldots, x_n)$

Zamiana zmiennych

Niech: $y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, y_2 = x_2, \ldots, y_n = x_n$.
Wtedy:

$$\frac{1}{a_{11}}y_1^2 = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 =$$
$$= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + \varphi(x_2, \ldots, x_n)$$

φ - forma kwadratowa niezawierająca zmiennej x_1
$\psi(x_2, \ldots, x_n) = g(x_2, \ldots, x_n) - \varphi(x_2, \ldots, x_n)$
Stąd:

$$f(x) = \frac{1}{a_{11}}y_1^2 + \psi(x_2, \ldots, x_n).$$

Dowód c.d.

Po podstawieniu $y_1, \ldots, y_n$ mamy:

$$f(x) = \frac{1}{a_{11}} y_1^2 + \psi(y_2, \ldots, y_n.)$$

Z założenia indukcyjnego, istnieje liniowo niezdegenerowanych $(n-1)$ zmiennych.

Zdefiniujmy: $z_k = \sum_{l=2}^{n} R_{kl} y_l$, gdzie $k = 2, \ldots, n$,
które sprowadzają formę ψ do postaci kanonicznej:

$$\psi(y_2, \ldots, y_n) = b_{22} z_2^2 + b_{33} z_3^2 + \ldots + b_{nn} z_n^2$$

$z_1 = y_1$
$z_k = \sum_{l=2}^{n} R_{kl} y_l = R_{k2} y_2 + \ldots + R_{nn} y_n$

Dowód c.d.

$(x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow (y_1, \ldots, y_n) \longrightarrow (z_1, \ldots, z_n)$

$$f(x) = \frac{1}{a_{11}} z_1^2 + b_{22} z_2^2 + \ldots + b_{nn} z_n^2$$

2) $\forall_{1 \leqslant i \leqslant n}\ a_{ii} = 0$
np. $a_{12} \neq 0 \Rightarrow f(x) = 2a_{12}x_1x_2$
$x_1 = \widehat{x_1} + \widehat{x_2}$
$x_2 = \widehat{x_1} - \widehat{x_2}$
$x_3 = \widehat{x_3}$
$\vdots$
$x_n = \widehat{x_n}$
Stąd:

$$f(x) = 2a_{12}(\widehat{x_1} + \widehat{x_2})(\widehat{x_1} - \widehat{x_2}) + \ldots = 2a_{12}\widehat{x_1}^2 - 2a_{12}\widehat{x_2}^2 + \ldots$$

Postępując analogicznie jak w punkcie pierwszym, otrzymujemy żądaną tezę.

Wykład 27.

Definicja 27.1

Forma kwadratowa nad $\mathbb{C}$ ma postać normalną, jeśli:

$$f(x) = x_1^2 + \ldots + x_r^2,$$

gdzie $r \leqslant n$. Ogólnie $f(x) = a_{11}x_1^2 + \ldots + a_{rr}x_r^2$,
gdzie $r \leqslant n$ i $\forall_i \; a_{ii} = \pm 1$.

Wniosek

W przestrzeni zespolonej każdą formą kwadratową można przekształcić do postaci normalnej za pomocą niezdegenerowanego przekształcenia liniowego.
$\forall_i \; a_{ii} = 1$
W przypadku rzeczywistym niektóre a_{ii} mogą być mniejsze od 0.
$y_i = \sqrt{|a_{ii}|}x_i$, gdzie $i \leqslant r$
$y_i = x_i$, gdzie $i > r$

Wniosek c.d.

Jeśli pierwsze k współczynników jest dodatnich, a pozostałe są ujemne, to $f(x)$ ma postać:

$$f(x) = y_1^2 + \dots y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_r^2.$$

Definicja 27.2

Niech dana będzie forma kwadratowa nad $\mathbb{R}$ postaci:

$$f(y) = y_1^2 + \dots y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_r^2.$$

Liczbę wyrazów dodatnich i ujemnych w formie kwadratowej nazywamy odpowiednio dodatnim i ujemnym indeksem formy, zaś różnicę między indeksem dodatnim i ujemnym nazywamy sygnaturą.

Twierdzenie 27.3 (Prawo bezwładności form kwadratowych)

Indeks dodatni i ujemny są niezmiennikami formy kwadratowej, tzn. nie zależą od wyboru bazy, w której forma ma postać normalną.

Dowód

Niech dana będzie baza $e'_1, e'_2 \ldots, e'_n$ w której forma f ma postać normalną:

$$f(x) = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_m^2 - z_{m+1}^2 - \ldots - z_r^2, \tag{5}$$

gdzie z_i są współczynnikami x w bazie $e'_1, e'_2 \ldots, e'_n$.
W bazie $e_1, \ldots, e_n$ forma f ma postać normalną:

$$f(x) = y_1^2 + \ldots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \ldots - y_r^2. \tag{6}$$

Mamy udowodnić, że $k = m$.
Załóżmy, że $k \neq m$, np. $k > m$.
Rozważmy w V podprzestrzenie
$L = \text{gen}\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}, \qquad L' = \text{gen}\{e'_{m+1}, e'_{m+2}, \ldots, e'_n\}.$

Dowód c.d.

Ponieważ $\dim(L+L') \leqslant \dim V = n$, więc z Lematu 25.4 wynika że

$$\dim(L \cap L') = \dim L + \dim L' - \dim(L+L') \geqslant k + (n-m) - n = k - m > 0.$$

Istnieje więc niezerowy wektor $a \in L \cap L'$:

$$0 \neq a = a_1 e_1 + \cdots + a_k e_k = a'_{m+1} e'_{m+1} \ldots + a'_n e'_n.$$

Z wzoru (6) mamy $f(a) = a_1^2 + \cdots + a_k^2 > 0$. Ale z (5) wynika, że $f(a) = -(a'_{m+1})^2 - \ldots - (a'_r)^2 \leqslant 0$ (może się zdażyć, że $r < n$ i $a'_{m+1} = \ldots = a'_r = 0$). Co dowodzi, że $\mathrm{k} = \mathrm{m}$.

Sprowadzanie formy kwadratowej do postaci kanonicznej metodą Jacobiego

Niech f - forma kwadratowa nad $\mathbb{R}^n$

$$f(x) = a(x,x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

$a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - forma dwuliniowa symetryczna

$$A = [a_{ij} = a(e_i, e_j)]_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Rozpatrzmy minory główne macierzy A :

$\Delta_0 = 1, \Delta_1 = a_{11}$

$$\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Sprowadzanie formy kwadratowej do postaci kanonicznej metodą Jacobiego c.d.

$$\Delta_3 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$\vdots$

$\Delta_n = \det A$

Metodę Jacobiego można stosować przy założeniu, że $\forall_i \; \Delta_i \neq 0$.

Szukamy specjalnej bazy $e_1', \ldots, e_n'$, w której forma f ma postać kanoniczną:

$$(\bigstar) \left\{ \begin{array}{l} e_1' = P_{11} e_1 \\ e_2' = P_{21} e_1 + P_{22} e_2 \\ \vdots \\ e_n' = P_{n1} e_1 + P_{n2} e_2 + \ldots + P_{nn} e_n \end{array} \right\}, \text{ here } P_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Sprowadzanie formy kwadratowej do postaci kanonicznej metodą Jacobiego c.d.

Żeby w bazie $e'_1, \dots, e'_n$ forma f miała postać kanoniczną musi być spełniony warunek:

$$(*)\ \forall_{1<j<n}\ a(e'_i, e'_j) = a'_{ij} = 0,$$

dla $i = 1, 2, \dots, j-1$ (To założenie jest wystarczające, gdyż założyliśmy, że a symetryczna).
Aby zachodził warunek $(*)$ wystarczy żądać, aby:
$a(e_i, e'_j) = 0 \quad$ dla $i = 1, 2, \dots, j-1$ oraz $j = 1, 2, \dots, n$
$a(e'_i, e'_j) = a(P_{i1}e_1 + P_{i2}e_2 + \dots + P_{ii}e_i, e'_j) =$
$= P_{i1}a(e_1, e'_j) + P_{i2}a(e_2, e'_j) + \dots + P_{ii}a(e_i, e'_j) = 0$
Załóżmy dodatkowo, że $a(e_j, e'_j) = 1$.
Dla $j = 1$ powyższe założenia wyglądają następująco:
$a(e_1, e'_1) = 1 = a(e_1, P_{11}e_1) = P_{11}a_{11}$, czyli $P_{11} = \frac{1}{a_{11}} = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}$.

Sprowadzanie formy kwadratowej do postaci kanonicznej metodą Jacobiego c.d.

Z indukcji, załóżmy, że mamy określone współczynniki w pierwszych $(j-1)$ wierszach wzoru $(\bigstar)$.
Dla znalezienia współczynników występujących w wierszu o numerze j, zapiszmy potrzebne warunki:
$a(e_1, e_j') = \ldots = a(e_{j-1}, e_j') = 0$
$a(e_j, e_j') = 1$
Korzystając z $(\bigstar)$ dostajemy następujący układ równań:

$$(\circ)\begin{cases} a_{11}P_{j1} + a_{12}P_{j2} + \ldots + a_{1j}P_{jj} = 0 \\ \vdots \\ a_{j-1,1}P_{j1} + a_{j-1,2}P_{j2} + \ldots + a_{j-1,j}P_{jj} = 0 \\ a_{j1}P_{j1} + a_{j2}P_{j2} + \ldots + a_{jj}P_{jj} = 1 \end{cases}$$

Ponieważ:

$$0 = a(e_1, e_j') = a(e_1, P_{j1}e_1 + P_{j2}e_2 + \ldots + P_{jj}e_j) = \\ = a_{11}P_{j1} + a_{12}P_{j2} + \ldots + a_{1j}P_{jj}$$

Sprowadzanie formy kwadratowej do postaci kanonicznej metodą Jacobiego c.d.

Wyznacznik tego układu równań jest różny od 0 (tj. $\det \Delta_j \neq 0$).
Stąd można znaleźć P_{ij}, z zapisu ($\circ$).
Pozostało jeszcze sprawdzić, jak wygląda forma f po zmianie bazy z $e_1, \dots, e_n$ na $e_1', \dots, e_n'$.
Ze wzorów Cramera mamy:

$$P_{jj} = \frac{1}{\Delta_j} \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2j-1} & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{j-11} & \dots & a_{j-1j-1} & 0 \\ a_{j1} & \dots & a_{jj-1} & 1 \end{bmatrix} = \frac{\Delta_{j-1}}{\Delta_j}$$

$$\text{Niech} B = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\det B = P_{11} P_{22} \dots P_{nn} = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \dots \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} = \frac{\Delta_0}{\Delta_n} = \frac{1}{\Delta_n}$$

Sprowadzanie formy kwadratowej do postaci kanonicznej metodą Jacobiego c.d.

W końcu napiszmy jak wygląda nasza forma w bazie $e'_1, \ldots, e'_n$:
$a'_{jj} = a(e'_j, e'_j) = a(P_{j1}e_1 + \ldots + P_{jj}e_j, e'_j) = P_{jj}a(e_j, e'_j) = P_{jj} = \frac{\Delta_{j-1}}{\Delta_j}$
Stąd:

$$f(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}(x'_1)^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}(x'_2)^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}(x'_n)^2$$

Udowodnijmy powyższy wzór. Sprowadźmy formę do postaci kanonicznej. W nowej bazie $e'_1, \ldots, e'_n$ forma f ma postać:
$f(x) = a'_{11}(x'_1)^2 + a'_{22}(x'_2)^2 + \ldots + a'_{nn}(x'_n)^2$ oraz $\forall_i \; a'_{ii} \neq 0$.

$$\Delta' = \det \begin{bmatrix} a'_{11} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & \ldots & a'_{nn} \end{bmatrix} = a'_{11} \ldots a'_{nn}$$

$$\Delta' = \det P^T AP = \det P^T \det A \det P =$$
$$= \det P \det A \det P = \det A \det^2 P = \Delta(\det P)^2,$$

gdzie P - macierz zmiany bazy.

Sprowadzanie formy kwadratowej do postaci kanonicznej metodą Jacobiego c.d.

Czyli: $\Delta' = \Delta(\det P)^2$.
Ponieważ $\Delta' > 0$, więc $\Delta > 0$.

Definicja 28.1

Formę f nazywamy dodatnio określoną, jeśli $f(x) > 0$ dla wszystkich $x \neq 0$.

Definicja 28.2

Formę f nazywamy ujemnie określoną, jeśli $f(x) < 0$ dla wszystkich $x \neq 0$.

Uwaga

Zauważmy, że jeśli f jest dodatnie określona, to $\forall_{i=1,\dots,n}\ a_{ii} > 0$.
$a_{ii} = a(e_i, e_i) = f(e_i) > 0$

Przykład

$f(x) = -x_1^2 - x_2^2$ (forma nie jest dodatnio określona)

$\Delta = \det A = \det \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 1$

Uwaga

W przestrzeni $n-$ wymiarowej każda forma dodatnio określona ma rząd n. $(\Delta \neq 0)$

Przykład

$f(x) = x_1^2 + 1000x_1x_2 + x_2^2$

$a_{11} > 0, a_{22} > 0$

$f(-1, 1) = 1 - 1000 + 1 < 0$

Uwaga

Jeśli f jest dodatnio określona, to wyznacznik jej macierzy jest dodatni. $(\Delta = \det A > 0)$

Twierdzenie 28.3 (Kryterium Sylwestera)

Na to, by forma kwadratowa była dodatnio określona potrzeba i wystarcza, aby wszystkie minory główne jej macierzy były dodatnie.

Dowód

" $\Rightarrow$ " Zakładamy, że $\forall_{x\neq 0}\ f(x) > 0$. Rozważmy: $V_k = \mathrm{gen}\{e_1, \ldots, e_k\}$.

$f|_{V_k}(x) = f(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) > 0$

$f(x) = \sum\limits_{i,j=1}^{k} a_{ij}x_i x_j$

Forma f jest dodatnio określona na V_k, gdyż jest dodatnio określona na V. Stąd i z faktu, że $\det A > 0$ mamy:

$$\forall_{1\leqslant i\leqslant n}\ \Delta_i > 0.$$

" $\Leftarrow$ " Niech $\Delta_k > 0$ dla $k = 1, \ldots, n$. Z metody Jacobiego istnieje baza, w której:

$$f(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}(x_1')^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}(x_2')^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}(x_n')^2$$

Dowód c.d.

Jeśli $x \neq 0$, to co najmniej jedna współrzędna jest różna od zera, więc $x_k \neq 0$.
Stąd: $f(x) > 0$.

Przykład

$f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = \frac{1}{a}[(ax+by)^2 + (ac-b^2)y^2]$

$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$

$\Delta_1 = a$

$\Delta_2 = ac - b^2$

Macierz jest dodatnio określona, gdy:

$\Delta_1 > 0 \wedge \Delta_2 > 0$, czyli gdy:

$a > 0 \wedge ac - b^2 > 0$.

Zadania

Metodą Lagrange'a sprowadzić formę kwadratową q do postaci kanonicznej.

- $q = x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2$

Macierz q jest następująca:
$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Wypisujemy czynniki z x_1 i dopełniamy do kwadratu:

$$x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 = (x_1 + 2x_2 - x_3)^2 - 4x_2^2 + 4x_2x_3 - x_3^2$$

Stąd podstawiając powyższe wyrażenie do formy i postępując podobnie z czynnikami zawierającymi pozostałe zmienne otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
q &= [(x_1 + 2x_2 - x_3)^2 - 4x_2^2 + 4x_2x_3 - x_3^2] + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2 = \\
&= (x_1 + 2x_2 - x_3)^2 - x_2^2 + 6x_2x_3 + x_3^2 = \\
&= (x_1 + 2x_2 - x_3)^2 - x_2^2 + 6x_2x_3 - 9x_3^2 + 9x_3^2 + x_3^2 = \\
&= (x_1 + 2x_2 - x_3)^2 - (x_2 - 3x_3)^2 + 10x_3^2.
\end{aligned}
$$

Zadania c.d.

Podstawiamy:

$y_1 = x_1 + 2x_2 - x_3$

$y_2 = x_2 - 3x_3$

$y_3 = x_3$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$q = y_1^2 - y_2^2 + 10y_3^2.$$

Macierzowo to wygląda następująco

$$M^T AM = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Jeśli zaczniemy od x_2, to:
$q = \frac{1}{3}(2x_1 + 3x_2 + x_3)^2 - \frac{1}{3}(x_1 + 5x_3)^2 + 10x_3^2$
Jest to też poprawne sprowadzenie formy q do formy kanonicznej:
$q = \frac{1}{3}(2x_1 + 3x_2 + x_3)^2 - \frac{1}{3}(x_1 + 5x_3)^2 + 10x_3^2 =$
$= \frac{1}{3}(4x_1^2 + 9x_2^2 + x_3^2 + 12x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3) - \frac{1}{3}(x_1^2 + 10x_1x_3 + 25x_3^2) + 10x_3^2 =$
$= \frac{1}{3}(3x_1^2 + 9x_2^2 - 24x_3^2 + 12x_1x_2 - 6x_1x_3 + 6x_2x_3) + 10x_3^2 =$
$= x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

Zadania c.d.

- $q = 2x_1x_2 + 4x_2x_3$

Podstawmy:

$x_1 = y_1 - y_2$
$x_2 = y_1 + y_2$
$x_3 = y_3$

$q = 2(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) + 4(y_1 + y_2)y_3 = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_1y_3 + 4y_2y_3 =$
$= 2[(y_1 + y_3)^2 - y_3^2] - 2[(y_2 - y_3)^2 - y_3^2] = 2[(y_1 + y_3)^2 - (y_2 - y_3)^2]$

$z_1 = \sqrt{2}(y_1 + y_3) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + x_2 + 2x_3)$
$z_2 = \sqrt{2}(y_2 - y_3) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x_1 + x_2 - 2x_3)$
$z_3 = y_3 = x_3$

Inne podstawienie: (Sprawdzić ! Wylicz macierz M^{-1}.)

$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(z_1 - z_2) - 2\sqrt{2}z_3$
$x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(z_1 + z_2)$
$x_3 = z_3$

Definicja 29.1

Hiperpowierzchnią stopnia drugiego nazywamy zbiór:

$$(*)\ \ \{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} b_ix_i + c = 0\}$$

Uwaga

- formę kwadratową $x \longmapsto a(x,x)$ o macierzy $[a_{ij}]$ nazywamy grupą wyrazów stopnia drugiego
- formę liniową $x \longmapsto 2b(x) = 2\sum_{i=1}^{n} b_ix_i$ nazywamy grupą wyrazów stopnia pierwszego
- stałą $c \in \mathbb{R}$ nazywamy wyrazem wolnym

Komentarze

- $x^2 + y^2 + z^2 = -1$ jest to hiperpowierzchnia stopnia 2
- sfera urojona: $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0\}$

Uwaga

Równanie $(*)$ jest to równanie ogólne o $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ zmiennych. Istotnie $\frac{1}{2}n(n+1) + n + 1 = (n+1)(\frac{1}{2}n + 1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

Twierdzenie 29.2

Poprzez zamianę zmiennych można równanie hiperpowierzchni zapisać w formie:

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} x_i x_j = c,$$

gdzie $[a_{ij}]$ jest macierzą formy.

Definicja 29.3

Środkiem hiperpowierzchni drugiego stopnia nazywamy punkt, względem którego wszystkie punkty hiperpłaszczyzny są położone parami symetrycznie.

Uwaga

Symetryczność oznacza:

$$(x_1, \ldots, x_n) \in A \Rightarrow (-x_1, \ldots, -x_n) \in A$$

Definicja 29.4 (bis)

Środkiem dowolnej hiperpowierzchni stopnia drugiego nazywamy taki punkt, że jeśli umieścimy w nim początek układu współrzędnych , to równanie hiperpowierzchni przyjmie postać:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + c = 0.$$

Wykład 30.

Częściowa klasyfikacja hiperpowierzchni drugiego stopnia (stopnia 2.)

Powierzchnia stopnia 2 to zbiór punktów:

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + b_1xy + b_2xz + b_3yz + c_1x + c_2y + c_3z + d = 0,$$

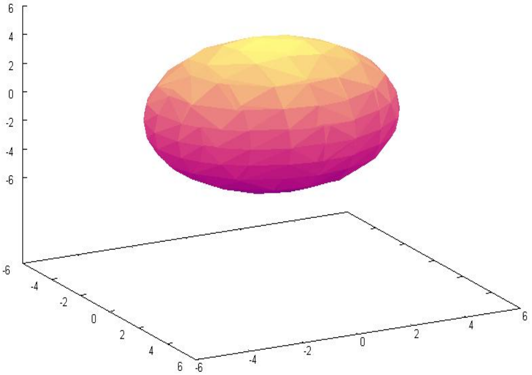
gdzie $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d \in \mathbb{K}$ i przynajmniej jedna z nich $\neq 0$.
Jest to równanie ogólne hiperpowierzchni stopnia 2.
Hiperpowierzchnię stopnia 2 można zapisać też w postaci kanonicznej:

$$\overline{a_1}x^2 + \overline{a_2}y^2 + \overline{a_3}z^2 + \overline{d} = 0.$$

Wyróżniamy hiperpowierzchnie właściwe (niezdegenerowane) i niewłaściwe (zdegenerowane).

Częściowa klasyfikacja hiperpowierzchni stopnia 2 c.d.

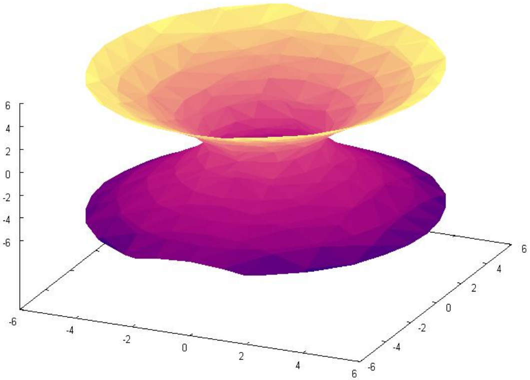
1. Powierzchnie właściwe
   - Elipsoida:
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



Częściowa klasyfikacja hiperpowierzchni stopnia 2 c.d.

- Hiperboloida jednopowłokowa:

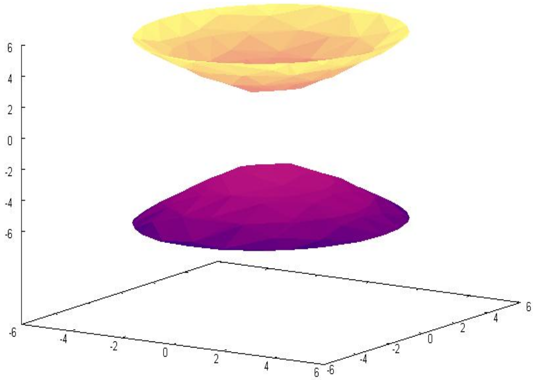
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Częściowa klasyfikacja hiperpowierzchni stopnia 2 c.d.

- Hiperboloida dwupowłokowa:

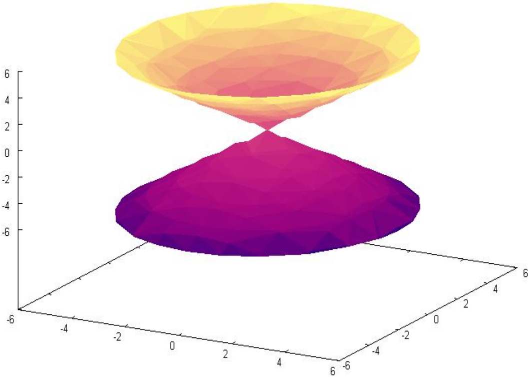
$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Częściowa klasyfikacja hiperpowierzchni stopnia 2 c.d.

- Stożek eliptyczny:

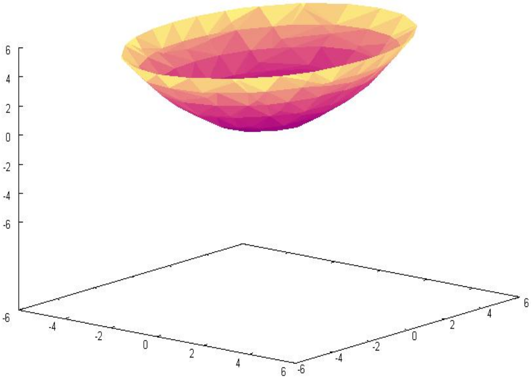
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$



Częściowa klasyfikacja hiperpowierzchni stopnia 2 c.d.

- Paraboloida eliptyczna:

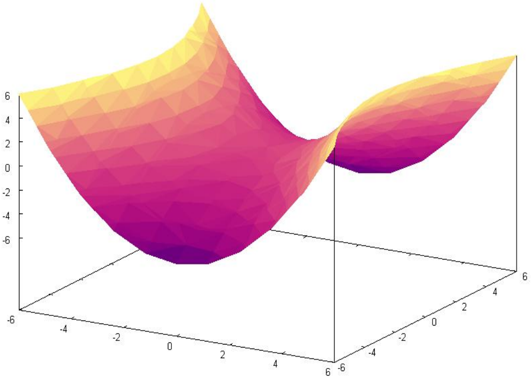
$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



Częściowa klasyfikacja hiperpowierzchni stopnia 2 c.d.

- Paraboloida hiperboliczna:

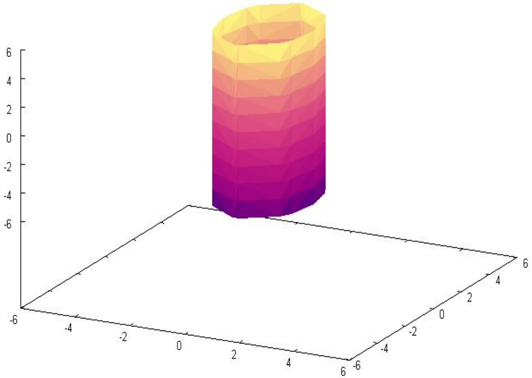
$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$



Częściowa klasyfikacja hiperpowierzchni stopnia 2 c.d.

- Walec eliptyczny:

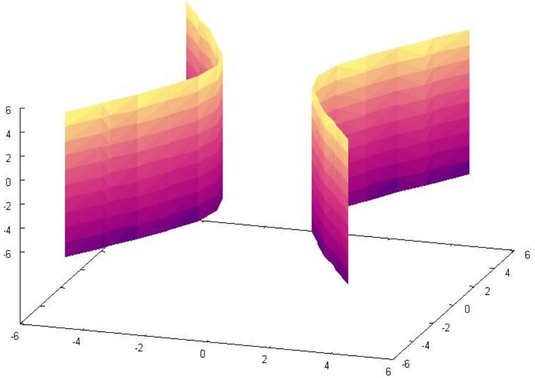
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Częściowa klasyfikacja hiperpowierzchni stopnia 2 - c.d.

- Walec hiperboliczny:

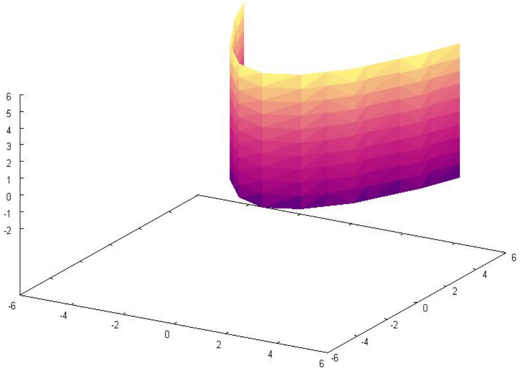
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Częściowa klasyfikacja hiperpowierzchni stopnia 2 c.d.

- Walec paraboliczny:

$$x^2 = 2py$$



Częściowa klasyfikacja hiperpowierzchni stopnia 2 c.d.

2. Kwadryki niewłaściwe
   - Elipsoida urojona:
   $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$
   - Stożek urojony:
   $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$
   - Urojony walec eliptyczny:
   $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$$
   - Równoległe płaszczyzny urojone:
   $$x^2=-a^2$$